Fale elektromagnetyczne

Równania Maxwell'a w układzie SI:

Uwaga: małe litery oznaczają pola *eksplicite* zależne od czasu.

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \qquad \nabla \vec{d} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \qquad \nabla \vec{b} = 0$$

$$\vec{d} = \varepsilon_0 \vec{e} + \vec{p}$$

$$\vec{b} = \mu_0 \mu_r \vec{h}$$

$\vec{h}$	- natężenie pola magnetycznego
$\vec{e}$	- natężenie pola elektrycznego
$\vec{b}$	- indukcja pola magnetycznego
$\vec{d}$	- indukcja pola elektrycznego
$\vec{p}$	- (prąd) polaryzacji
$\vec{j}$	- prąd przewodnictwa: $\vec{j} = \sigma \vec{e}$

field strength

flux density

polarization density

W dielektryku: $\vec{p} \propto \vec{e}$, albo $\vec{p} = \varepsilon_0 \kappa \vec{d}$ (κ - podatność dielektryczna ośrodka).
electric susceptibility

Tak więc:

$$\vec{d} = \varepsilon_0 \vec{e} + \varepsilon_0 \kappa \vec{e} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \vec{e} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{e} \quad (\varepsilon_r = n^2 \text{ jeżeli } \kappa \text{ jest skalarem})$$

ε = electric permittivity

μ = magnetic permeability

Zbadajmy, co wynika z równań Maxwell'a dla ośrodka jednorodnego, amagnetycznego i nieprzewodzącego (dielektryka): $\mu_r = 1, \quad \vec{j} = 0, \quad \varepsilon_r = \text{const.}$):
Obliczmy:

$$\nabla \times \left[\nabla \times \vec{e}\right] = \nabla \times \left[-\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right] = -\mu_0 \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}\right] =$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \times \vec{h}\right] = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \vec{d}}{\partial t}\right] = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \left[\nabla \times \vec{e}\right] = \nabla(\nabla \vec{e}) - \nabla^2 \vec{e} = \nabla(0) - \nabla^2 \vec{e} = -\nabla^2 \vec{e}$$

Tak więc:

$$\nabla^2 \vec{e} - \boxed{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = 0$$

zbadajmy czym jest ta stała

Okazuje się, że rozwiązaniem jest **każda funkcja** postaci $f\left(t - \frac{\vec{s}\,\vec{r}}{v}\right)$, gdzie $\vec{s}$ jest wersorem w kierunku rozchodzenia się fali z prędkością *v*.

Dla uproszczenia dowodu obierzmy taki układ współrzędnych, że $\vec{s} \parallel \hat{z}$: $\Rightarrow f\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v}\right) = f\left(t - \frac{z}{v}\right)$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 f\left(t - \frac{z}{v}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} f\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{v^2} f''\left(t - \frac{z}{v}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(t - \frac{z}{v}\right) &= f''\left(t - \frac{z}{v}\right) \end{aligned}\right\} \frac{1}{v^2} f''\left(t - \frac{z}{v}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r f''\left(t - \frac{z}{v}\right) = 0$$

Tak więc prędkość fazowa:

$$\boxed{\frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r, \ \text{w próżni: } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0}$$

Równanie falowe ma więc postać: $$\boxed{\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{e}(\vec{r},t) \\ \vec{h}(\vec{r},t) \end{Bmatrix} - \frac{1}{v^2} \begin{Bmatrix} \vec{e}(\vec{r},t) \\ \vec{h}(\vec{r},t) \end{Bmatrix} = 0}$$

Łatwo można pokazać, że:

$$\nabla \times \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} = \nabla \times \left[\begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{Bmatrix} \cdot f\left(t - \frac{\vec{\Im} \cdot \vec{r}}{v} \right) \right] = -\frac{1}{v} f'\left(t - \frac{\vec{\Im} \cdot \vec{r}}{v} \right) \left(\vec{\Im} \times \begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{Bmatrix} \cdot f\left(t - \frac{\vec{\Im} \cdot \vec{r}}{v} \right) \right] = f'\left(t - \frac{\vec{\Im} \cdot \vec{r}}{v} \right) \begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{Bmatrix}$$

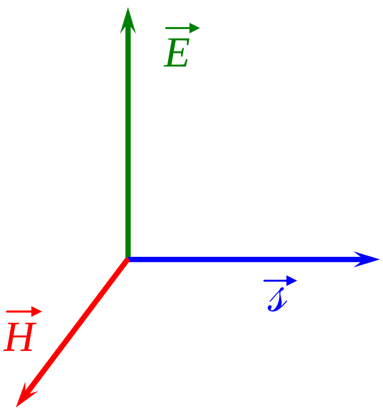
Wstawiając do równań Maxwell'a na rotację :

$$\nabla \times \vec{e} = -\partial \vec{b} / \partial t \quad \Rightarrow \quad \vec{\Im} \times \vec{E}_0 = v \mu_0 \mu_r \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \vec{H}_0$$

$$\nabla \times \vec{h} = \partial \vec{d} / \partial t \quad \Rightarrow \quad \vec{\Im} \times \vec{H}_0 = -v \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \vec{E}_0$$

Wnioski:

1. Pola mogą być zespolone, ale są powiązane przez współczynniki $\in \Re$, a więc są w fazie.
2. Pola $\vec{E}$ i $\vec{H}$ są do siebie prostopadłe
3. Wektory $\vec{\Im}$, $\vec{E}$ i $\vec{H}$ tworzą układ prawoskrętny:



4. Amplitudy pól są powiązane współczynnikiem R_r wyrażanym w Ω i nazywanym opornością falową ośrodka:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \left|\vec{H}_0\right| = R_r \left|\vec{H}_0\right| \quad \text{w próżni: } R_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega$$

$$\left|\vec{H}_0\right| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \left|\vec{E}_0\right| = R_r^{-1} \left|\vec{E}_0\right|$$

Oporność falowa

Dowolne pole zależne od czasu można przedstawić jak sumę lub dystrybucję funkcji o ustalonej częstości ω. Wprowadźmy oznaczenia, np.:

$$\vec{e}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(x,y,z) \cdot e^{i\omega t}\right]$$

pole zespolone, niezależne
explicite od czasu

Zbadajmy, jak może wyglądać funkcja opisująca pole monochromatyczne. W funkcji $e(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ dokonajmy podstawienia $t \to t - (\vec{s} \cdot \vec{r})/v$, aby pole było rozwiązaniem równania falowego:

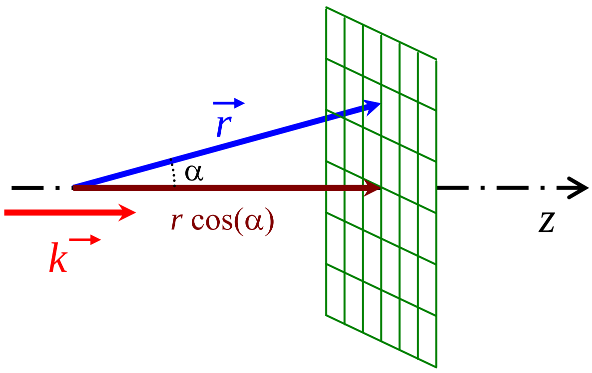
$$\vec{e}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\omega,k) \cdot \exp\left(i\omega t - i\omega \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\omega,k)e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right]$$

Wprowadziliśmy tutaj oznaczenie: $\vec{k} \equiv \vec{s}\,\frac{\omega}{v}$ dla wektora falowego. Tak więc

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{v} = n\frac{\omega}{c} = nk_0, \text{ w próżni: } \left|\vec{k}\right| = k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Uwaga: $\vec{E}$ nie zależy od $\vec{r}$ ponieważ cała zależność jest dalej w eksponencie. Inaczej równanie falowe nie byłoby spełnione.

Pole postaci $\vec{E}(\omega,k)e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$ nazywa się falą płaską.



Front falowy: miejsce geometryczne o takiej samej fazie w danej chwili czasu :

$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r \cdot \cos(\alpha) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot \cos(\alpha) = z = \text{const.} \ (x, y \text{ dowolne })$$

- jest to definicja płaszczyzny prostopadłej do kierunku wektora $\vec{k}$.

Korzystając z dotychczasowych wyników ogólnych dla funkcji $f\left[t - (\vec{s} \cdot \vec{r})/v\right]$ można od razu napisać związki pomiędzy $\vec{k}$ i wektorami pól:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega\mu_0\vec{H}_0 \\ \vec{k} \times \vec{H}_0 &= -\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_0 \end{aligned} \quad ; \quad k_0 \cdot \left|\vec{E}_0\right| = \omega\mu_0\left|\vec{H}_0\right|$$

Wnioski:

5. Oczywiście nadal słuszne są wnioski 1-4 dla fali typu $f\left[t-(\vec{\mathfrak{I}}\cdot\vec{r})/v\right]$

6. Przepływ energii (wektor Poytinga $\vec{S}$): $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}^*$; $\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*$

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\frac{\left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)^*}{\omega\mu_0}=\frac{1}{2\omega\mu_0}\vec{E}_0\times\left(\vec{k}^*\times\vec{E}_0{}^*\right)= \qquad \left|\vec{k}\in\Re^3\right.$$

$$=\frac{1}{2\omega\mu_0}\left[\vec{k}\cdot\left(\vec{E}_0\cdot\vec{E}_0{}^*\right)-\vec{E}_0{}^*\left(\vec{E}_0\cdot\vec{k}\right)\right]$$

$$\boxed{\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{2\omega\mu_0}\left|\vec{E}_0\right|^2\vec{k}=\frac{1}{2}\left|\vec{E}_0\right|^2\frac{1}{R_r}\vec{\mathfrak{I}}}$$