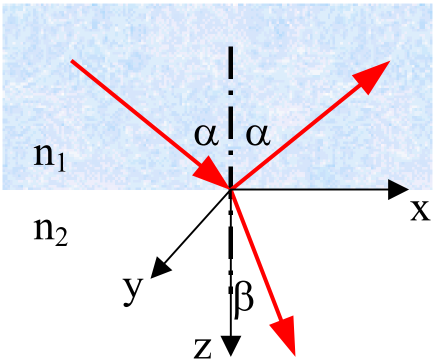
Fala elektromagnetyczna w warunkach całkowitego wewnętrznego odbicia



$$\sin\alpha\cdot n_1=\sin\beta\cdot n_2$$

$$\sin\beta=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\le 1$$

$$\alpha_{gran}=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\quad \text{jeżeli } n_1>n_2$$

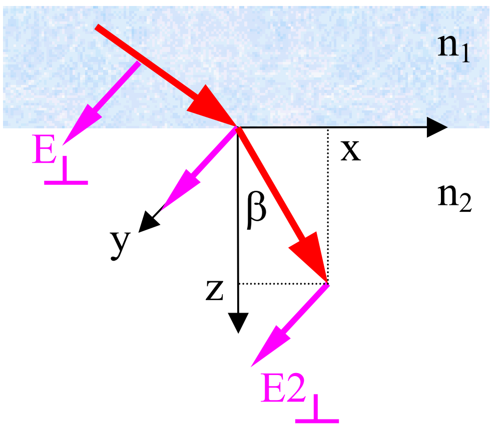
Dla $\alpha>\alpha_{gran}$ nie istnieje kąt β spełniający prawo Snella – następuje całkowite wewnętrzne odbicie. Jednak w równaniach Fresnela występuje $\cos\beta$ – w tym przypadku będzie urojony:

$$\cos(\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\beta)}=\pm i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha)-1}\,.$$

Wstawmy do równań Fresnela, np. na składową poprzeczną:

$$t_\perp=\frac{2\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\pm\frac{n_2}{n_1}i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha)-1}}=\frac{2\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\pm i\sqrt{\sin^2(\alpha)-\frac{n_2^2}{n_1^2}}}\overset{ozn}{=}\left|t_\perp\right|e^{i\varphi_t}$$

$$\rho_\perp=\frac{\cos(\alpha)\mp\frac{n_2}{n_1}i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha)-1}}{\cos(\alpha)\pm\frac{n_2}{n_1}i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha)-1}}=\frac{\cos(\alpha)\mp i\sqrt{\sin^2(\alpha)-\frac{n_2^2}{n_1^2}}}{\cos(\alpha)\pm i\sqrt{\sin^2(\alpha)-\frac{n_2^2}{n_1^2}}}\overset{ozn}{=}\left|\rho_\perp\right|e^{i\varphi_t}$$



W punkcie (0,0) przejścia przez powierzchnię graniczną:

$$E2_\perp(0,0)=E_\perp\left|t_\perp\right|e^{i\varphi_t}$$

W głębi ośrodka 2:

$$E2_\perp(\vec{r})=E2_\perp(0,0)e^{i\left(\omega\tau-\vec{k}_2\vec{r}+\varphi_t\right)}$$

$$k_2=\frac{\omega}{c}n_2,\quad \left|\vec{r}\right|=x\sin(\beta)+z\cos(\beta)$$

Wstawiając wszystko:

$$E2_{\perp}(\vec{r}) = \left| t_{\perp} \right| E_{\perp}(0,0) e^{i\left[\omega\tau - \frac{\omega}{c} n_2 \left(x\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \pm zi\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\alpha) - 1} \right) + \varphi_t \right]} =$$

$$= \left| t_{\perp} \right| E_{\perp}(0,0) e^{i\left[\omega\tau - \frac{\omega}{c} n_1 x \sin(\alpha) + \varphi_t\right]} e^{\pm z\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2(\alpha) - n_2^2}\right]}$$

dla $\alpha > \alpha_{gran.}$ wyrażenie pod pierwiastkiem jest rzeczywiste. Wprowadzając oznaczenia:

$$\gamma = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2(\alpha) - n_2^2} > 0, \quad k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$$

oraz ze względu na zasadę zachowania energii biorąc znak – [$E \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$]:

$$\boxed{E2_{\perp}(\vec{r}) = \left| t_{\perp} \right| E_{\perp}(0,0) e^{-\gamma z} e^{i\left[\omega\tau - (k_1\sin(\alpha))x + \varphi_t\right]} = \left| t_{\perp} \right| E_{\perp}(0,0) e^{-\gamma z} e^{i\left[\omega\tau - \vec{k}_2\vec{r} + \varphi_t\right]}}$$

Jak płynie energia w ośrodku 2?

$$\left\langle \vec{S}(\vec{r}) \right\rangle = \left(\frac{c}{n_2}\right)^2 \frac{1}{2\omega} \varepsilon_0 \varepsilon_r E2 \cdot E2^* \vec{k}_2 \propto e^{-2\gamma z} \cdot \vec{k}_2, \quad \vec{k}_2 = \left[k_1\sin(\alpha), 0, 0\right]$$