Eikonał Optyczny

Rozpatrzmy ośrodek bez ładunków i prądów z polem o pulsacji ω

Uwaga: nie zakłada się jednorodności ośrodka: $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x,y,z)$, $\mu_r = \mu_r(x,y,z)$

Równania Maxwella:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) = ik_0 c\varepsilon_0\varepsilon_r(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$$
$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\mu_r(\vec{r})\vec{H}(\vec{r}) = -ik_0 c\mu_0\mu_r(\vec{r})\vec{H}(\vec{r})$$
$$\nabla\left[\varepsilon_0\varepsilon_r(\vec{r})\vec{E}\right] = 0$$
$$\nabla\left[\mu_0\mu_r(\vec{r})\vec{H}\right] = 0$$

Przypomnienie: jeżeli ε i μ nie zależą od $\vec{r}$, to rozwiązaniem była fala płaska:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-ik_0 n(\vec{\mathcal{S}}\vec{r})}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}, \quad k = k_0 \cdot n = \frac{\omega}{c}\cdot\frac{c}{v} = \frac{w}{v}$$

gdzie $\vec{\mathcal{S}}$ jest wersorem w kierunku rozchodzenia się fali.

Teraz postuluje się ogólniejszą postać rozwiązania:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}, \quad H(\vec{r}) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}}$$

$J(\vec{r})$ - eikonał albo „droga optyczna” - rzeczywista, skalarna funkcja położenia

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$ - wektorowe, w ogólności zespolone, funkcje położenia

Uwaga 1: na powierzchniach spełniających warunek $J(\vec{r}) = const.$ faza pozostaje stała – powierzchnie te nazywamy frontami falowymi.

Uwaga2 : dla fali płaskiej: $J(\vec{r}) = n\vec{\mathcal{S}}\cdot\vec{r}$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0$, $\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{r}$

dla fali kulistej: $J(\vec{r}) = n\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0 \dfrac{1}{|\vec{r}|}$, $\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \vec{r}$

Zbadajmy, kiedy funkcja postaci $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}$ spełnia równania Maxwell'a:

$$\mathrm{L} = \nabla\times\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right] = \left[\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]\cdot e^{-ik_0 J(\vec{r})} + \nabla\left[e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right]\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) =$$

$$= \left[\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]\cdot e^{-ik_0 J(\vec{r})} + \left[-ik_0\nabla J(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right]\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) =$$

$$= \left[\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) - ik_0\nabla J(\vec{r})\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]e^{-ik_0 J(\vec{r})}$$

$$\mathrm{P} = -ik_0 c\mu_r(\vec{r})\mu_0\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}$$

Tak więc:

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla J(\vec{r})\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) - c\mu_r(\vec{r})\mu_0\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0}\nabla\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\\ &\nabla J(\vec{r})\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) + c\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0}\nabla\times\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})\end{aligned}}$$

Zbadajmy podobnie równania na dywergencje:

$$\mathrm{L} = \nabla\left[\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right] =$$

$$= \left[\nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0 e^{-ik_0 J(\vec{r})} + \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\nabla\left[\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0 e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right] =$$

$$= \left[\nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0 e^{-ik_0 J(\vec{r})} + \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\left\{\nabla\left[\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0\right]e^{-ik_0 J(\vec{r})} + \varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0\nabla\left[e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right]\right\} =$$

$$= \left\{\left[\nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\right]\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0 + \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\varepsilon_0\nabla\left[\varepsilon_r(\vec{r})\right] - ik_0\varepsilon_r(\vec{r})\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\nabla J(\vec{r})\right\}e^{-ik_0 J(\vec{r})}$$

$$\mathrm{P} = 0$$

Przyrównując $\{\ldots\} = 0$ i dzieląc przez $ik_0\varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0$ uzyskujemy:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\nabla J(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0}\left[\nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\frac{\nabla\varepsilon_r(\vec{r})}{\varepsilon_r(\vec{r})}\right]$$

albo:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\nabla J(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0}\left\{\nabla\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\nabla\left[\ln\varepsilon_r(\vec{r})\right]\right\}\\ &\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})\cdot\nabla J(\vec{r}) = \frac{1}{ik_0}\left\{\nabla\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{H}}(\vec{r})\cdot\nabla\left[\ln\mu_r(\vec{r})\right]\right\}\end{aligned}}$$

Uwaga: we wzorach w ramkach wszędzie po prawej stronie występuje $\frac{1}{ik_0}$.

Przybliżenie optyczne polega na przyjęciu, że $\frac{1}{k_0} \to 0 \quad \left(k_0 \approx 10^6\,\mathrm{m}^{-1}\right)$ to znaczy, że amplitudy pól $\mathcal{E}$ i $\mathcal{H}$ oraz własności ośrodka nie zmieniają się na odległościach rzędu długości fali. Uzyskamy wówczas:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla J(\vec r)\times\vec{\mathcal{E}}(\vec r)-c\mu_r(\vec r)\mu_0\vec{\mathcal{H}}(\vec r)&=0 && (1)\\ \nabla J(\vec r)\times\vec{\mathcal{H}}(\vec r)+c\varepsilon_r(\vec r)\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec r)&=0 && (2)\\ \vec{\mathcal{E}}(\vec r)\cdot\nabla J(\vec r)&=0 && (3)\\ \vec{\mathcal{H}}(\vec r)\cdot\nabla J(\vec r)&=0 && (4)\end{aligned}}$$

Na podstawie równań (3) i (4) od razu widać, że $\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\perp\nabla J(\vec r)$ i $\vec{\mathcal{H}}(\vec r)\perp\nabla J(\vec r)$.

Jednakże, równania te można też uzyskać z (1) i (2), na przykład:
$(1)\cdot\nabla\left(J(\vec r)\right)=(4)$, ponieważ: $\left(\vec X\times\vec Y\right)\cdot\vec X\equiv 0$

Tak więc, na to aby pole elektromagnetyczne dane wzorami $\vec{\mathcal{E}}(\vec r)e^{-ik_0J(\vec r)}$ i $\vec{\mathcal{H}}(\vec r)e^{-ik_0J(\vec r)}$ było rozwiązaniem równań Maxwell'a w przybliżeniu optycznym potrzeba i wystarcza, aby pola $\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$, $\vec{\mathcal{H}}(\vec r)$ oraz $J(\vec r)$ spełniały równania (1) i (2).

Aby uzyskać równanie na $J(\vec r)$ spróbujmy wyredukować z (1) i (2) pola $\vec{\mathcal{E}}$ i $\vec{\mathcal{H}}$.
Wyznaczając z (1) pole $\vec{\mathcal{H}}(\vec r)$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec r)=\frac{1}{c\mu_r(\vec r)\mu_0}\nabla J(\vec r)\times\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$$

i wstawiając do (2) uzyskamy:

$$\nabla J(\vec r)\times\left[\frac{1}{c\mu_r(\vec r)\mu_0}\nabla J(\vec r)\times\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\right]=-c\varepsilon_r(\vec r)\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$$

$$\nabla J(\vec r)\times\left[\nabla J(\vec r)\times\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\right]=-c^2\mu_r(\vec r)\mu_0\varepsilon_r(\vec r)\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$$

$$\nabla J(\vec r)\left[\nabla J(\vec r)\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\right]-\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\left[\nabla J(\vec r)\cdot\nabla J(\vec r)\right]=-\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\mu_r(\vec r)\mu_0\varepsilon_r(\vec r)\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec r)\left[\nabla J(\vec r)\right]^2=\mu_r(\vec r)\varepsilon_r(\vec r)\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$$

Aby powyższa równość zachodziła dla dowolnego pola $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, koniecznym jest aby:

$$\boxed{\left|\nabla J(\vec{r})\right|^2 = \mu_r(\vec{r})\varepsilon_r(\vec{r}) = \left[n(\vec{r})\right]^2} \quad \text{albo} \quad \boxed{\left|\nabla J(\vec{r})\right| = n(\vec{r})} \tag{5}$$

Zależność (5) nazywa się równaniem eikonału.

Uwaga1: $J(\vec{r})$ jest skalarem, $\nabla J(\vec{r})$ jest wektorem o długości $n(\vec{r})$. Oznaczmy kierunek wektora $\nabla J(\vec{r})$ przez $\vec{\mathcal{S}}$ (zgodnie z oznaczeniem dla fali płaskiej). Tak więc:

$$\nabla J(\vec{r}) = n(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{S}} \quad \text{oraz} \quad \vec{\mathcal{S}} = \frac{\nabla J(\vec{r})}{n(\vec{r})}.$$

Uwaga2: na powierzchni falowej (foncie falowym) eikonał jest stały: $J(\vec{r}) = \text{const}$. Wektor $\nabla J(\vec{r})$ nie może więc mieć składowej stycznej do powierzchni falowej. Jest więc do niej prostopadły.

Uwaga3: ponieważ dla dowolnego skalara $\nabla \times (\nabla f) \equiv 0$, to $\nabla \times \left[n(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{S}}\right] \equiv 0$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Obliczmy wartość wektora Poytinga $\vec{S}$:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right] \times \left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})e^{-ik_0 J(\vec{r})}\right]^* = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r})$$

Pomnóżmy $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ wektorowo przez równanie sprzężone zespolono do (1):

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \left\{\nabla J(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}) - c\mu_r(\vec{r})\mu_0 \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r})\right\} = 0 \quad \left[J(\vec{r}) = J^*(\vec{r}), \quad \Leftarrow \mathrm{J} \in \Re\right]$$

$$\nabla J(\vec{r})\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\right] - \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cdot \nabla J(\vec{r})\right] = c\mu_r(\vec{r})\mu_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r})$$

$$\frac{\nabla J(\vec{r})\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\right]}{c\mu_r(\vec{r})\mu_0} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \times \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r})$$

Tak więc:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\nabla J(\vec{r})\left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})\right]}{c\mu_r(\vec{r})\mu_0}\right]$$

Mamy też dla gęstości energii w polu elektrycznym:

$$w_e(t,\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r})\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}), \quad \left\langle w_e(\vec{r}) \right\rangle = \frac{1}{2}w_e(t,\vec{r})$$

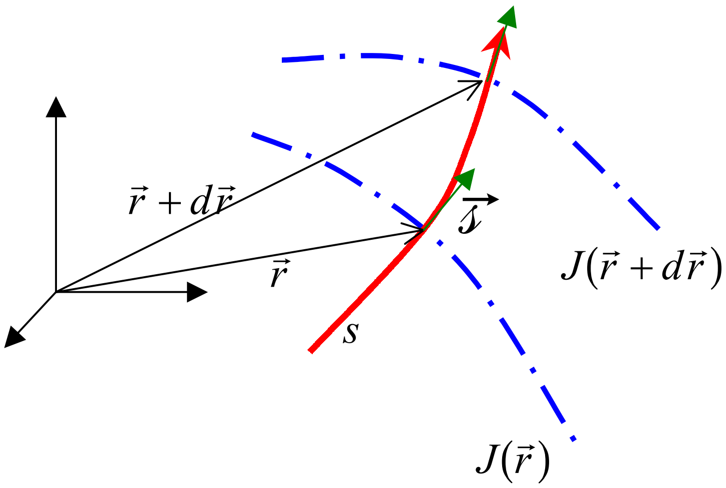
oraz $\left\langle w_e \right\rangle = \left\langle w_h \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle w \right\rangle = 2\left\langle w_e \right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r})\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r})$.

Wstawiając do wzoru na $\left\langle \vec{S} \right\rangle$ uzyskamy:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\nabla J(\vec{r})\left[\frac{2\left\langle w \right\rangle}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r})}\right]}{c\mu(\vec{r})\mu_0}\right] = \frac{c}{n^2}\left\langle w \right\rangle \nabla J(\vec{r}) = \frac{c}{n}\left\langle w \right\rangle \vec{\mathcal{s}} = \mathrm{v}\left\langle w \right\rangle \vec{\mathcal{s}}$$

WNIOSKI:

1. Kierunek wektora Poytinga $\langle \vec{S} \rangle$ jest zgodny z kierunkiem gradientu eikonału
2. Moduł wektora Poytinga $\langle \vec{S} \rangle$=prędkość fali x gęstość energii
3. Promienie światła to trajektorie w kierunku wektora Poytinga (przepływu energii). Tak więc są to trajektorie w kierunku $\nabla J(\vec{r})$, prostopadłe do powierzchni falowych.



s – droga geometryczna wzdłuż promienia światła.

Jeżeli $\vec{r}$ jest promieniem wodzącym promienia światła, to:

$$d\vec{r} = \vec{\tau}\, ds, \qquad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} = \frac{\nabla J(\vec{r})}{n(\vec{r})}$$

oraz oczywiście:

$$|d\vec{r}| = ds$$

Obliczmy pochodną, różniczkując jak funkcję złożoną:

$$\frac{dJ(\vec{r}(s))}{ds} = \nabla J(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds} = n(\vec{r})\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds} = n(\vec{r})\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = n(\vec{r}).$$

Tak więc:

$$(F\circ G)'(x_0) = F'(G(x_0))\circ G'(x_0)$$

tutaj: $F:\Re^3 \to \Re^1 \leftrightarrow f(y); \quad G:\Re^1 \to \Re^3 \leftrightarrow \left(g^1(x)\ldots g^3(x)\right)$

$$(F\circ G)'(x_0) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial x}$$ [K. Maurin, *Analiza - Elementy*, s.131]

1.
$dJ(\vec{r}) = n(\vec{r})ds$ - eikonał jest drogą optyczną (n x dłuższą od geometrycznej):

$$[P_1,P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n(\vec{r})ds = \int_{P_1}^{P_2} dJ(\vec{r}) = J(P_2) - J(P_1)$$

2. $ds = \dfrac{dJ(\vec{r})}{n(\vec{r})}$ - fronty falowe są odległe od siebie jak $\dfrac{1}{n(\vec{r})}$ - światło odchyla się w kierunku większego współczynnika załamania.