

# Teoria i metody optymalizacji

Oleksandr Sokolov

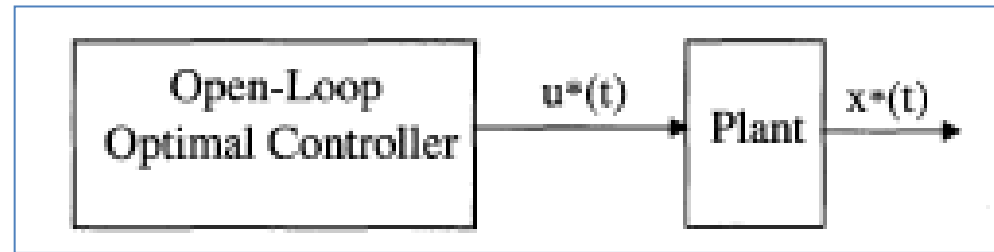
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki

Stosowanej UMK

<http://fizyka.umk.pl/~osokolov/TMO/>

# Typy układów sterowania

## Układ otwarty

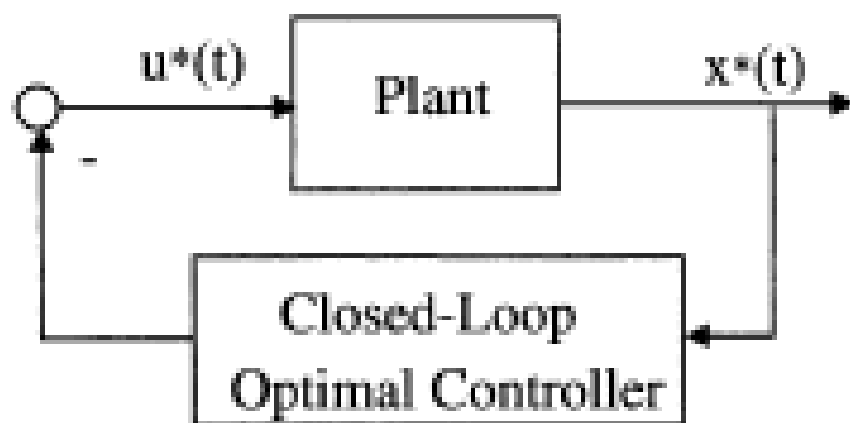


Sterowanie w układzie otwartym (ręczne lub automatyczne) polega na takim nastawieniu wielkości wejściowej, aby znając charakterystykę obiektu i przewidując możliwość działania nań zakłóceń, otrzymać na wyjściu pożądaną wartość. Ponieważ nie istnieje możliwość tłumienia nieznanych zakłóceń oraz osiągnięcie wartości zadanej nie może być zweryfikowane, układ otwarty stosowany jest w przypadku prostych obiektów, dla których znany jest dokładny model matematyczny. W przypadku znanej wartości zakłócenia (np. temperatury na zewnątrz budynku, w którym znajduje się kocioł centralnego ogrzewania) układ otwarty może być użyty do jego kompensacji.

**Podstawową wadą takiego rodzaju sterowania jest wpływ dynamiki układu na wartość wyjściową.** W porównaniu do układu regulacji układ otwarty jest bardziej czuły na zmiany wzmocnienia statycznego w układzie.

# Typy układów sterowania

Układ zamknięty - **Regulator ze sprzężeniem zwrotnym**



Układ zamknięty (ang. closed-loop system) – układ sterowania, w którym przebieg sygnału następuje w dwóch kierunkach. Od wejścia do wyjścia przebiega sygnał realizujący wzajemne oddziaływanie elementów, natomiast od wyjścia do wejścia przebiega sygnał sprzężenia zwrotnego.

Sterowanie w układzie zamkniętym (ręczne lub automatyczne) różni się od sterowania w układzie otwartym tym, że człowiek lub regulator otrzymują dodatkowo poprzez sprzężenie zwrotne informacje o stanie wielkości wyjściowej (lub o stanie obiektu). Informacja ta (odczytana z miernika lub podana w postaci np. napięcia do regulatora) jest używana do korygowania nastaw wielkości wejściowej.

# Regulator liniowo-kwadratowy

**Regulator liniowo-kwadratowy jest regulatorem ze sprzężeniem zwrotnym**, który określa rozwiązanie dla tzw. problemu LQ – to jest dla przypadku, w którym układ dynamiczny został opisany przez układ liniowych równań różniczkowych, a koszt (który ma być zminimalizowany zgodnie z zasadami teorii sterowania optymalnego) opisany jest funkcjonałem kwadratowym. Regulator liniowo-kwadratowy stanowi istotną część w rozwiązaniu dla problemu LQG (ang. Linear-quadratic-Gaussian). Zarówno regulator liniowo-kwadratowy (LQR) jak i problem LQG zaliczają się do fundamentalnych zagadnień w teorii sterowania.

# Regulator liniowo-kwadratowy

Poglądowo rzecz ujmując w regulacji liniowo-kwadratowej chodzi o określanie nastaw regulatora sterującego np. maszyną lub procesem z wykorzystaniem algorytmu matematycznego, który minimalizuje funkcję kosztów.

Parametrami tej funkcji są **wagi** podane przez inżyniera. Koszt (w istocie jego funkcja) jest najczęściej zdefiniowana jako suma pomierzonych **odchyłek** od wartości zadanych. Algorytm znajduje więc takie nastawy regulatora, które minimalizują niepożądane odchyłki pomiarów (np. temperatury, wysokości itp.) Czasami w powyższej sumie ujmuje się też samą wielkość związaną z działaniem sterującym tak by **energia zużyta na działanie sterujące** była jak najmniejsza.

# Regulator liniowo-kwadratowy

Taki regulator wyręcza więc inżyniera w żmudnej pracy związanej z optymalizacją regulacji. Jednak inżynier i tak musi wyspecyfikować wagi i sprawdzić jakie efekty dało ich zastosowanie w praktyce (często takie działanie przybiera charakter iteracyjny gdyż specyfikacje i sprawdzenia trzeba powtarzać do czasu osiągnięcia zadowalających wyników).

*Algorytm regulatora liniowo-kwadratowego jest w istocie zautomatyzowaną metodą doboru regulatora ze sprzężeniem zwrotnym opisanego zmiennymi stanu.* **Konieczność specyfikacji wag** stanowi znaczną niedogodność w tej metodzie. Często inżynierowie preferują alternatywne metody takiego doboru (np. poprzez **określanie położenia biegunów**), które dają im lepszy wgląd w powiązanie pomiędzy zmianą parametrów a zmianami w obserwowanym systemie.

# Zagadnienie

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$J(\mathbf{u}(t)) = J(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t_0)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{y}(t_f)]' \mathbf{F}(t_f) [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{y}(t_f)]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[ \underbrace{[\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)]}_{\mathbf{e}(t)}' \mathbf{Q}(t) [\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)] + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \right] dt$$

# Regulator liniowo-kwadratowy w czasie ciągłym ze skończonym horyzontem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) = 0 \quad \mathbf{e}(t) = 0 - \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t_0)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) & \mathbf{u}'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt$$



# Metoda przez funkcjonal Hamiltona

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$$

1

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

2

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \right)_* = 0 \longrightarrow \mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \mathcal{H}^*(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

3

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_* \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)_*$$

$$\left[ \mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]'_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$

# Rozwiązanie

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)]$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0} \longrightarrow \mathbf{R}(t) \mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}'(t) \boldsymbol{\lambda}^*(t) = 0$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \boldsymbol{\lambda}^*(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_* \longrightarrow \dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) &= - \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)_* \longrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\mathbf{Q}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}'(t) \boldsymbol{\lambda}^*(t). \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{E}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t)$$

# Warunki transversalności

$$\left[ \mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)_* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]'_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \right)_* = \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \right]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}^*(t_f).$$

# Schemat sterowania

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f)$$

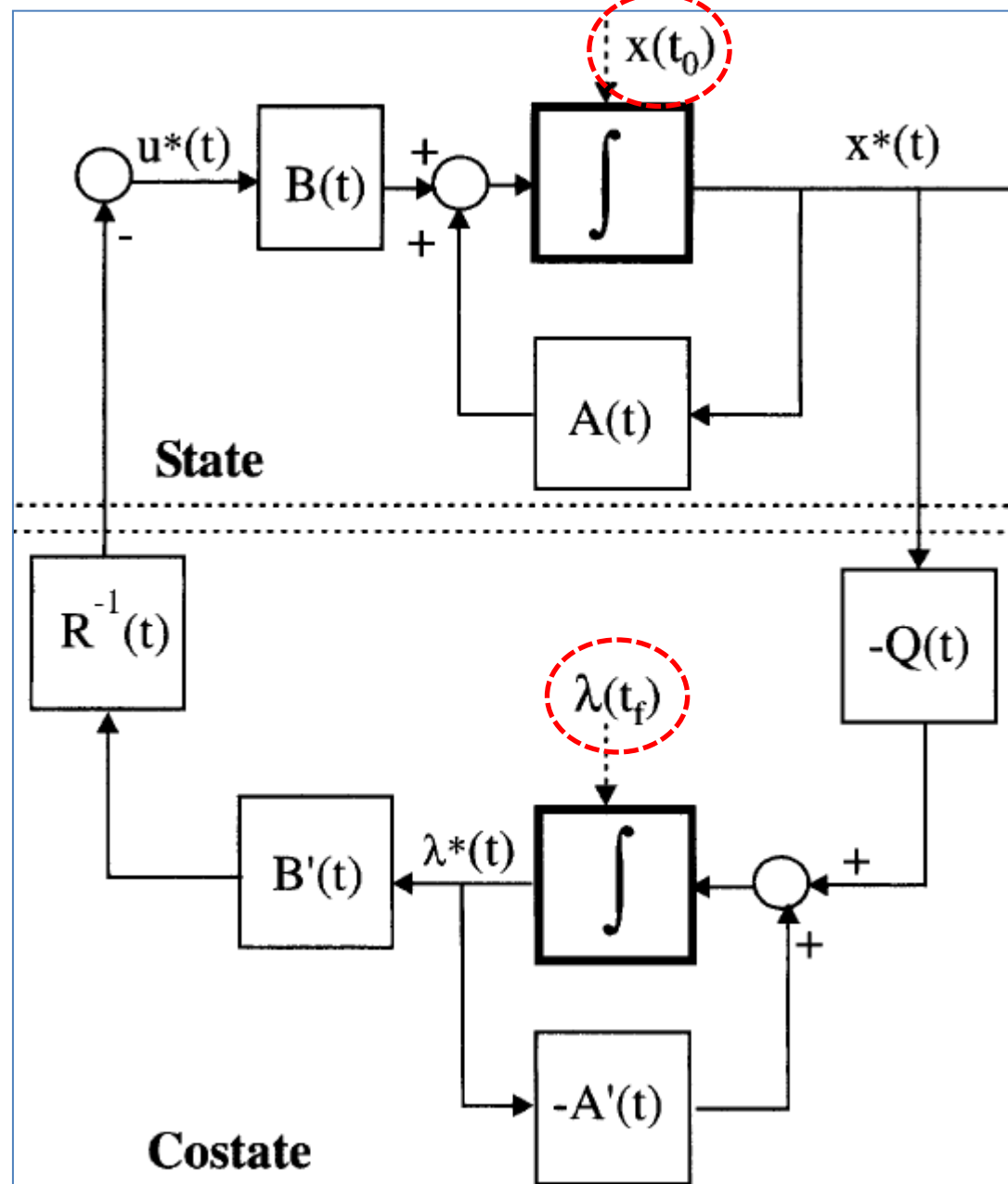
$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}'(t) \boldsymbol{\lambda}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\mathbf{Q}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}'(t) \boldsymbol{\lambda}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}^*(t_f)$$



# Przekształcenie

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{E}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)$$

Niech

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

?

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f).$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) \longrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t).$$

$$-\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{P}(t) \left[ \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) \right] \longrightarrow$$

$$\left[ \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t) \right] \mathbf{x}^*(t) = 0$$

# Równanie różniczkowe Riccatiego

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x).$$

gdzie  $p, q, r$  są funkcjami ciągłymi, określonymi na pewnym ustalonym przedziale  $(a, b)$ .

Równanie różniczkowe Riccatiego macierzowe

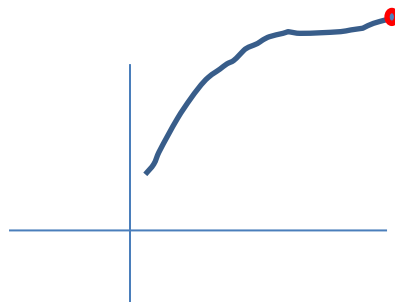
$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{E}(t)\mathbf{P}(t)$$

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)$$

Warunki graniczne

$$\lambda^*(t_f) = \mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) \longrightarrow$$

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}(t_f)$$



**Jacopo Francesco Riccati** (ur. 28 maja 1676 w Wenecji - zm. 15 kwietnia 1754 w Treviso) był włoskim matematykiem, znanym jako twórca równania różniczkowego Riccatiego.

# Właściwości macierzy współczynników

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(t)$$

Jest macierzą symetryczną

ponieważ

$$\mathbf{F}(t_f), \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t)$$

są macierzami symetrycznymi

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

równoważne

$$J^*(\mathbf{x}^*(t), t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{*'}(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}^*(t).$$

# Algorytm

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)$$

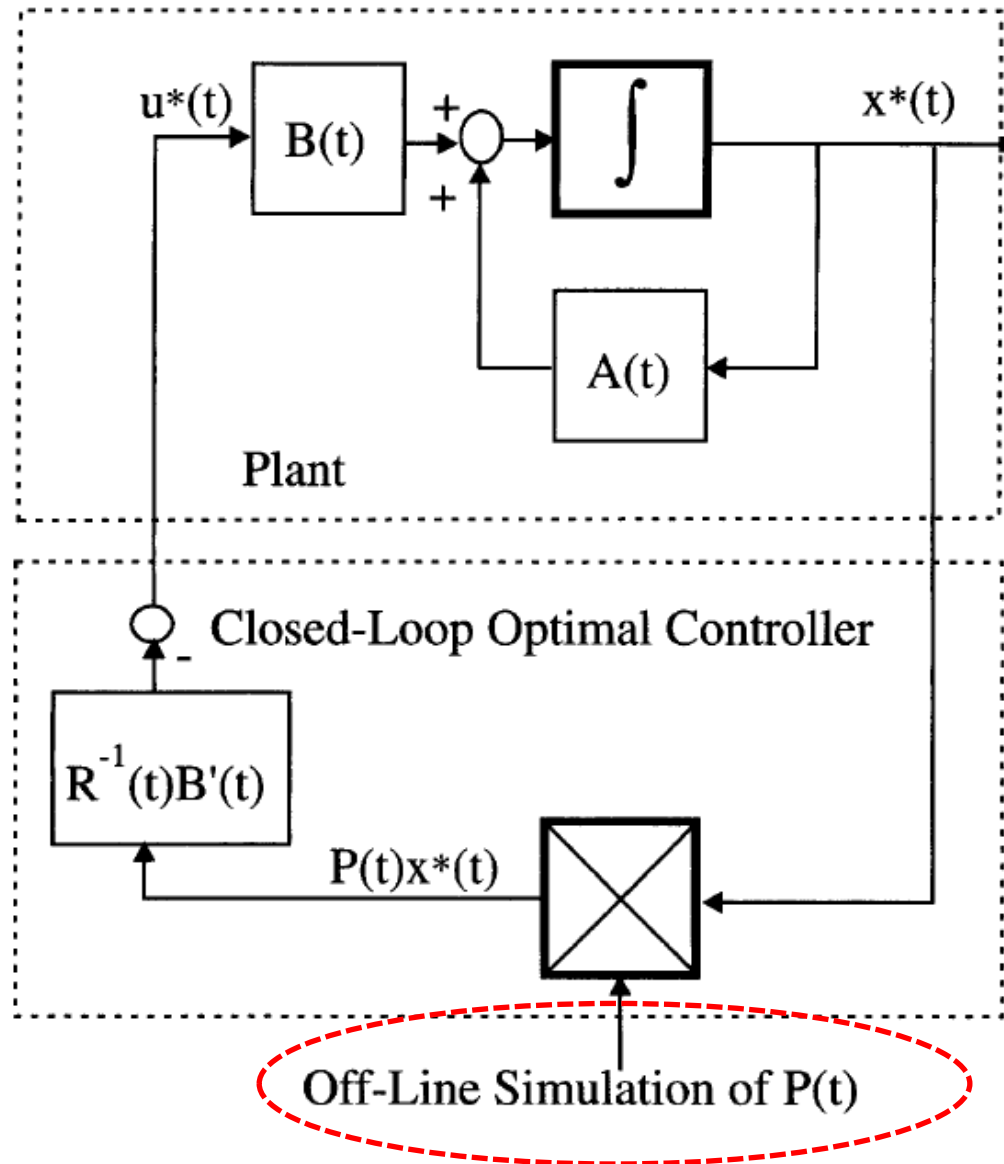
$$\mathbf{P}(t = t_f) = \mathbf{F}(t_f)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)] \mathbf{x}^*(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{*'}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)$$



# Schemat sterowania



# Regulator liniowo-kwadratowy w czasie ciągłym ze skończonym horyzontem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{z}(t) = 0 \quad \mathbf{e}(t) = 0 - \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(t = t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= J(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t), t_0) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}'(t_f) \mathbf{F}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) & \mathbf{u}'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

# Przykład

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2 \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t), & x_2(0) &= -3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2} \left[ x_1^2(5) + x_1(5)x_2(5) + 2x_2^2(5) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^5 \left[ 2x_1^2(t) + 6x_1(t)x_2(t) + 5x_2^2(t) + 0.25u^2(t) \right] dt\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}(t) = r(t) = \frac{1}{4}; \quad t_0 = 0; \quad t_f = 5.$$

# Algorytm

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)$$

$$\mathbf{P}(t = t_f) = \mathbf{F}(t_f)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}^*(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{*'}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

# Przykład (kontynuacja)

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \boxed{\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)}$$

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} \\ &= -4[p_{12}(t)x_1^*(t) + p_{22}(t)x_2^*(t)] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}'\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}(t)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_{11}(t) & \dot{p}_{12}(t) \\ \dot{p}_{12}(t) & \dot{p}_{22}(t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} p_{11}(5) & p_{12}(5) \\ p_{12}(5) & p_{22}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}} \quad \leftarrow \mathbf{F}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

# Przykład (kontynuacja)

$$\dot{p}_{11}(t) = 4p_{12}^2(t) + 4p_{12}(t) - 2,$$

$$p_{11}(5) = 1,$$

$$\dot{p}_{12}(t) = -p_{11}(t) - p_{12}(t) + 2p_{22}(t) + 4p_{12}(t)p_{22}(t) - 3,$$

$$p_{12}(5) = 0.5$$

$$\dot{p}_{22}(t) = -2p_{12}(t) - 2p_{22}(t) + 4p_{22}^2(t) - 5,$$

$$p_{22}(5) = 2.$$

```
S = dsolve('Dp11 = 4*p12*p12+4*p12-2', 'Dp12 = -p12-p11+2*p22+4*p12*p22-3', 'Dp22 = -2*p12-2*p22+4*p22*p22-5', 'p11(5)=1', 'p12(5)=0.5', 'p22(5)=2')
```

Warning: Explicit solution could not be found.

> In dsolve at 102

S =

[ empty sym ]

```
S = dsolve('Dp11 = 4*p12*p12+4*p12-2',  
'Dp12 = -p12-p11+2*p22+4*p12*p22-3', 'Dp22 = -2*p22-2*p12+4*p22*p22-5', 'p11(5)=1',  
'p12(5)=0.5', 'p22(5)=2')
```

>>

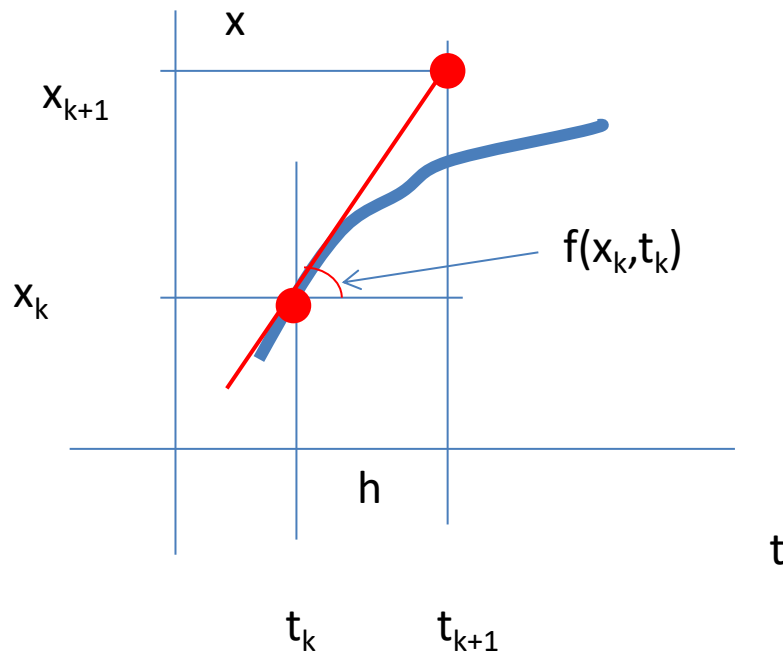
c:\Sasza\UMK\Nauka\OURA\WykladySokolov\w5MatLab\AlgRic.m

# Algorytm całkowania wstecznego

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0,$$

całkowanie w kierunku prostym

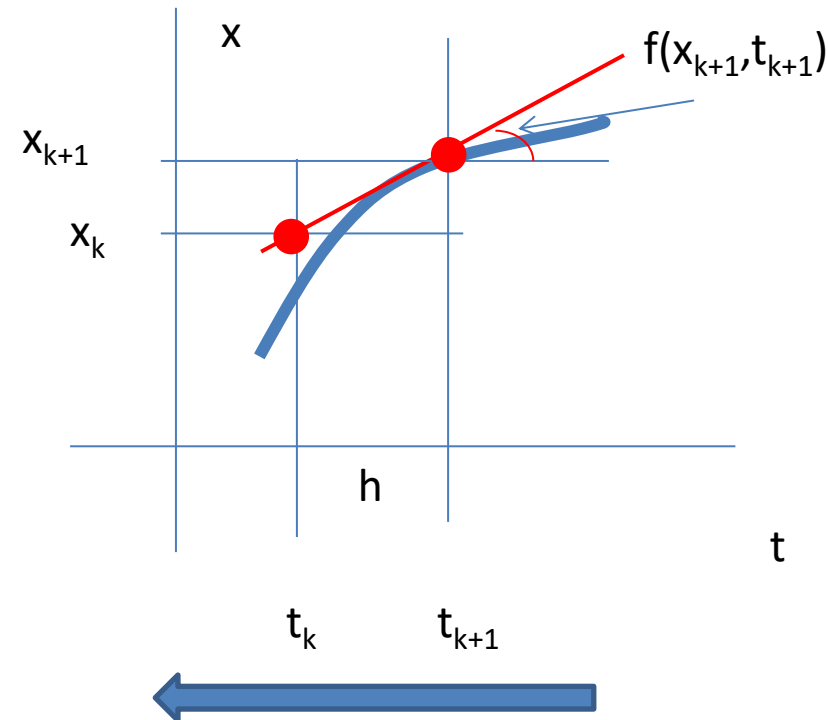
$$x_{k+1} = x_k + h f(x_k, t_k)$$



$$\dot{x} = f(x, t), x(t_f) = x_f$$

całkowanie wsteczne

$$x_{k+1} = x_k + h f(x_{k+1}, t_{k+1})$$



# Algorytm całkowania wstecznego

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0,$$

całkowanie bezpośrednie

$$x_{k+1} = x_k + h f(x_k, t_k)$$

```
function u=riccati(t,p)
u=[4*p(2)^2+4*p(2)-2;...
-p(1)-p(2)+2*p(3)+4*p(2)*p(3)-3;...
-2*p(2)-2*p(3)+4*p(3)^2-5];
```

```
[t,p]=ode45(@riccati,[5 0],[1 0.5 2]);
```

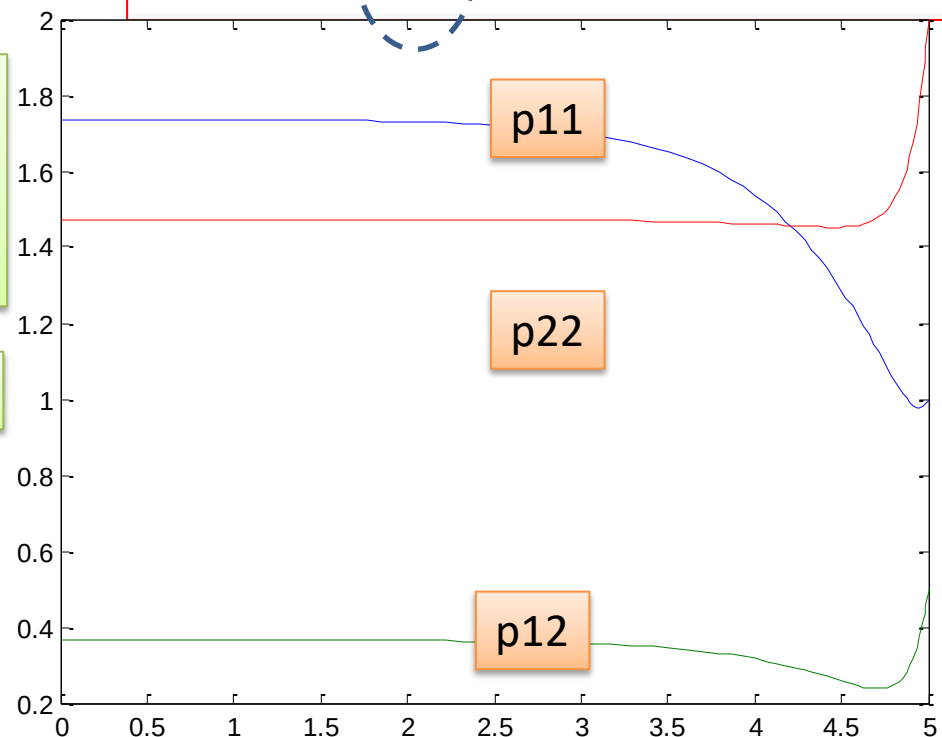
t1=fliplr(t')

Czas wstecz

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_f) = x_{t_f}$$

całkowanie wsteczne

$$x_{k+1} = x_k + h f(x_{k+1}, t_{k+1})$$





# Realizacja w MatLabie

Lookup Table (n-D)

Perform n-dimensional interpolated table function in N variables. Breakpoint sets read from the top (or left) input port.

Table and Breakpoints      Algorithm

Number of table dimensions:      1

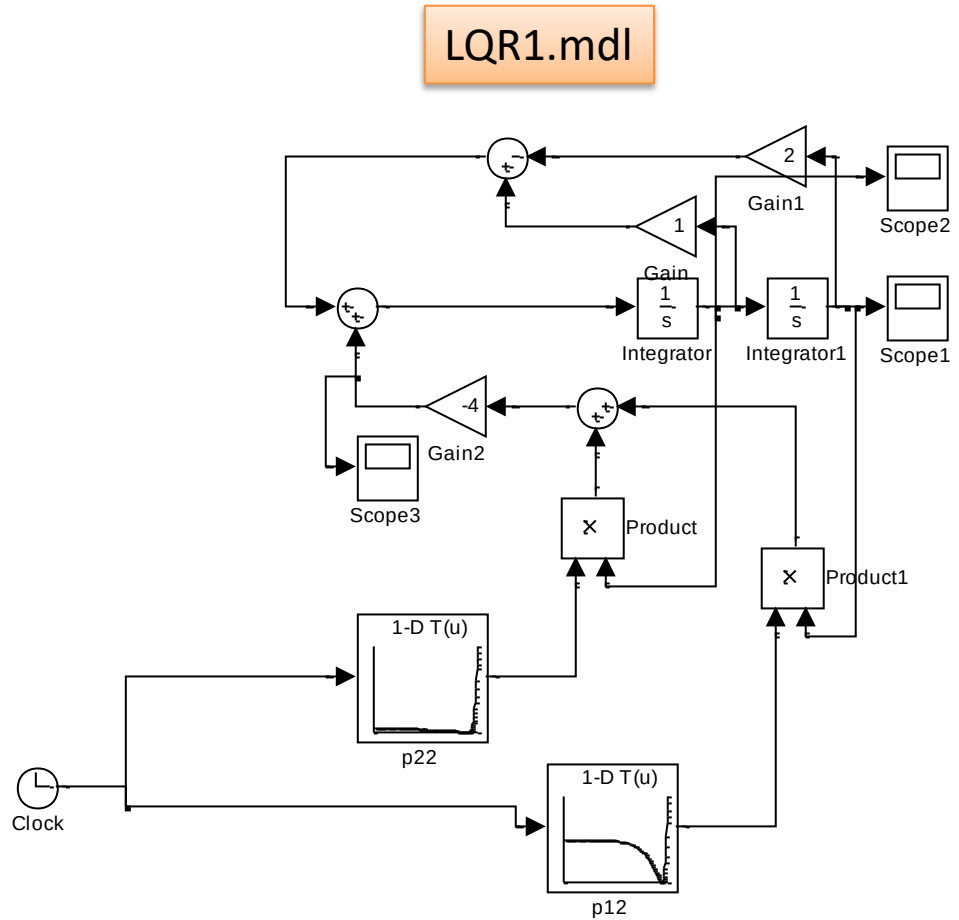
Table data:      p22

Breakpoints 1:      t

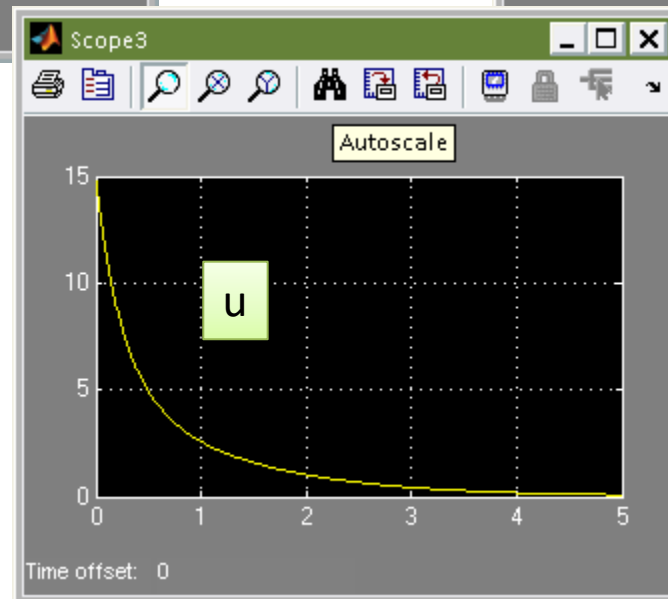
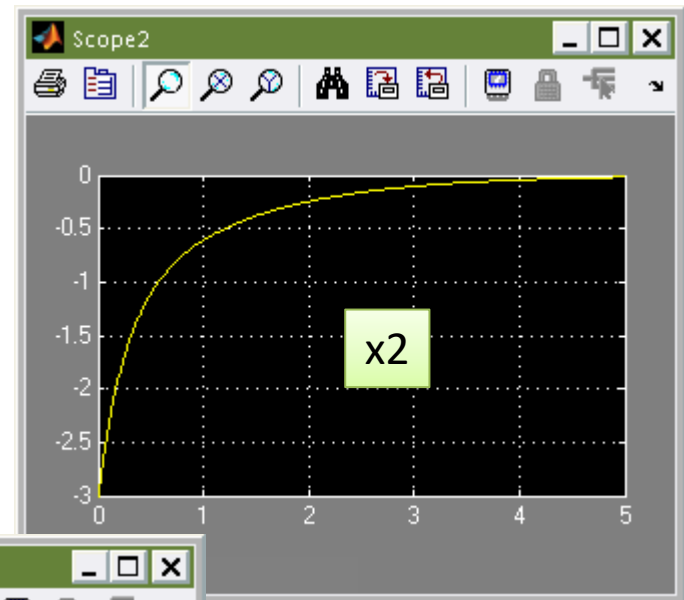
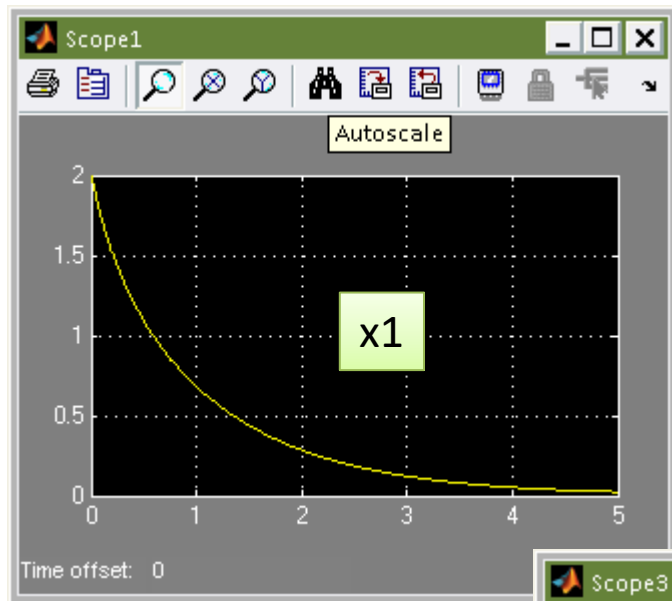
Edit table and breakpoints...

Sample time (-1 for inherited):      0.01

## Load ric



# Symulacja



# LQR w czasie ciągłym ze skończonym horyzontem. Podsumowanie

Dla liniowego systemu czasu ciągłego określonego na przedziale  $t \in [t_0, t_1]$  równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

z kwadratową funkcją kosztu

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym minimalizujące koszt określone jest przez równanie:

$$u = -Kx$$

gdzie  $K$  dane jest wzorem

$$K = R^{-1}B^T P(t)$$

a  $P$  można znaleźć rozwiązując równanie różniczkowe Riccatiego dla czasu ciągłego

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -\dot{P}(t)$$

# Zadanie

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad x(0) = 5$$

$$J = x(2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 + u^2) dt$$

# Rozwiązanie

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}'\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}(t)$$

$$A = 0, B = 1, F = 2, Q = 1, R = 1$$

$$\cancel{p}(t) = p(t)^2 - 1$$

$$\boxed{\mathbf{P}(t = t_f) = \mathbf{F}(t_f)}$$

# Rozwiązanie

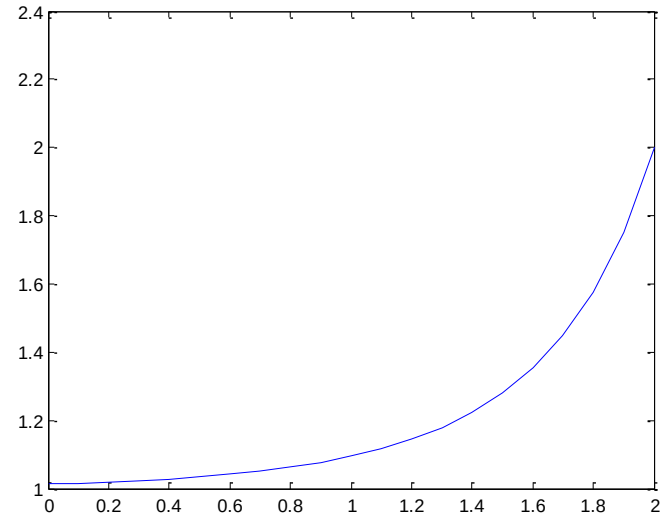
```
>> dsolve('Dp=p^2-1')
```

```
ans =
```

```
1
```

```
-1
```

```
-(exp(2*C41 + 2*t) + 1)/(exp(2*C41 + 2*t) - 1)
```



```
C41=*****
```

$$p(2) = F = 2 \Rightarrow p(t) = -\frac{e^{2t - \ln(3) - 4} + 1}{e^{2t - \ln(3) - 4} - 1}$$

# Rozwiązanie

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

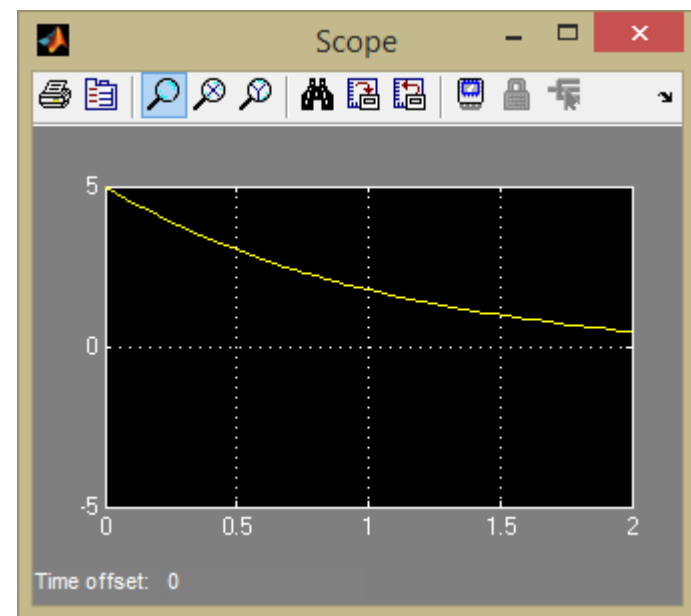
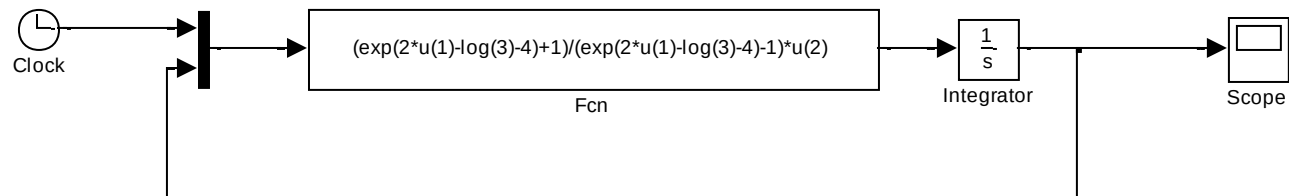
$$u(t) = -p(t)x(t) = \frac{e^{2t-\ln(3)-4} + 1}{e^{2t-\ln(3)-4} - 1} x(t)$$

$$x(t) = u(t) = \frac{e^{2t-\ln(3)-4} + 1}{e^{2t-\ln(3)-4} - 1} x(t)$$

```
>> dsolve('Dx= -(exp(-log(3)-4 + 2*t) + 1)/(-exp(log(3)-4 + 2*t) - 1)*x')
```

```
ans =(C4*exp(t))/(exp(2*t) - 3*exp(4))
```

$$x(0) = 5$$



c:\Sasza\UMK\Nauka\OURA\WykladySokolov\  
w5MatLab\Zw3new.mdl



# Regulator liniowo-kwadratowy w czasie ciągłym z nieskończonym horyzontem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

~~$$\frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f)$$~~

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\hat{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{P}}}(t) = -\hat{\mathbf{P}}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}'(t)\hat{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{Q}(t) + \hat{\mathbf{P}}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\hat{\mathbf{P}}(t)$$

$$\hat{\mathbf{P}}(t = t_f \rightarrow \infty) = 0. \quad \text{ponieważ}$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_f)\mathbf{F}(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

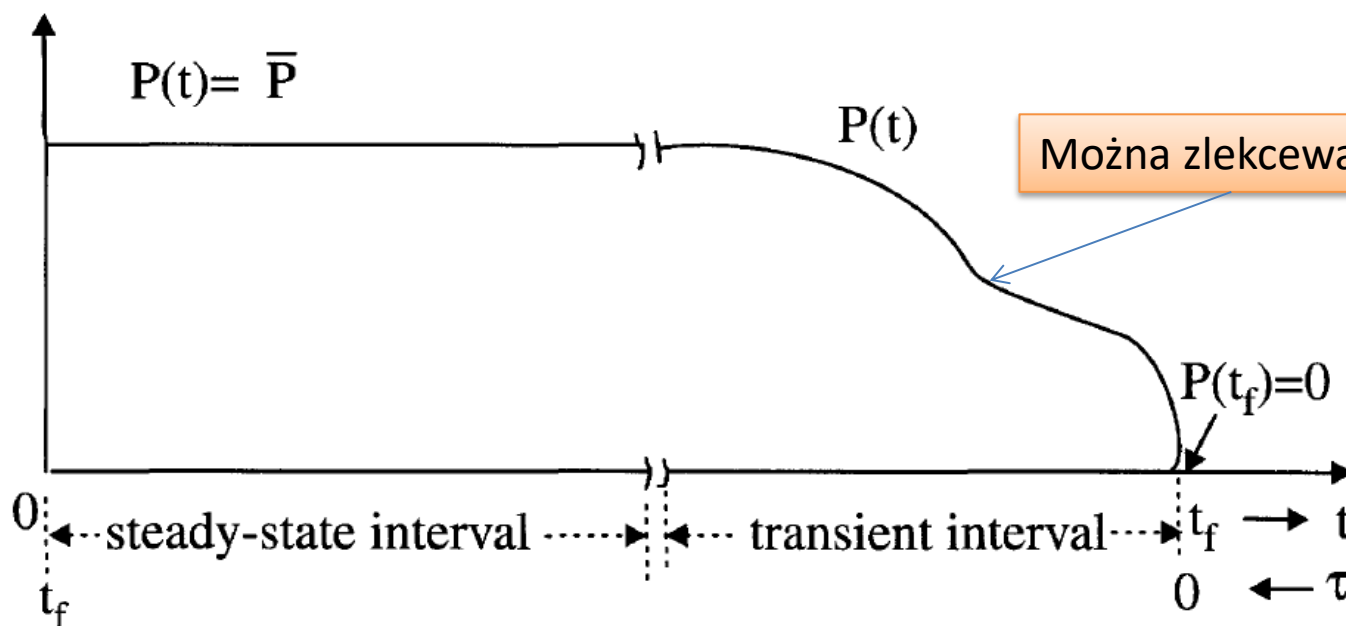
# Algebraiczne równanie Riccatiego

$$F(t_f) = 0 \quad \mathbf{P}(t_f) = 0 \quad \lim_{t_f \rightarrow \infty} \{\mathbf{P}(t_f)\} = \bar{\mathbf{P}}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = 0 = -\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} - \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}.$$

lub

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = 0$$



# Współczynnik Kalmana

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x}^*(t) = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}^*(t)$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \left[ \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} \right] \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{G}\mathbf{x}^*(t)$$

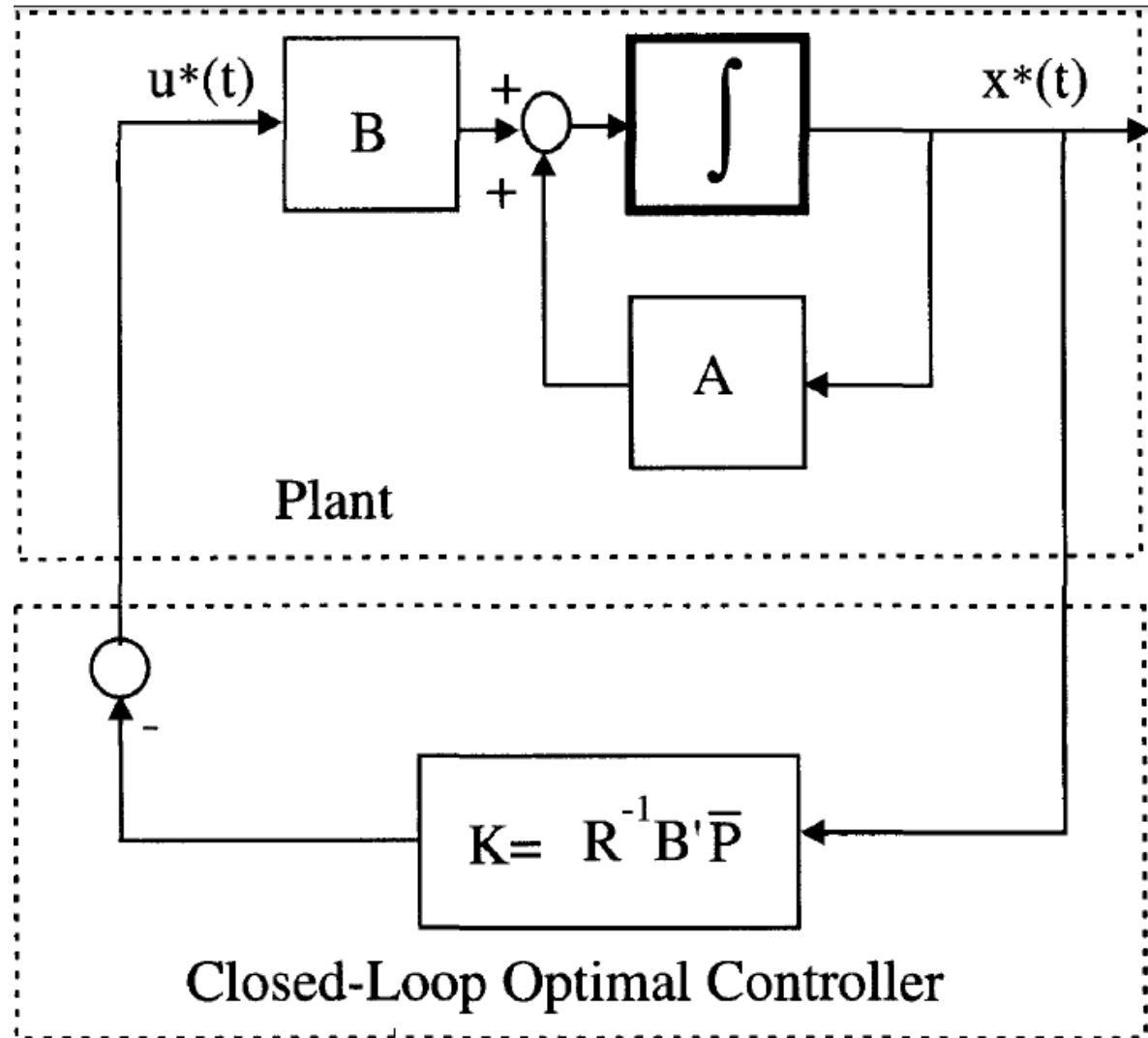
$$\mathbf{G} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}$$

Wszystkie wartości własne  $\mathbf{G}$  są z ujemną częścią rzeczywistą



Rudolf Emil Kalman  
(ur. 19 maja 1930 w  
Budapeszcie,  
Węgry) –  
amerykański  
inżynier elektryk  
pochodzenia  
węgierskiego.

# Schemat systemu sterującego



# Przykład

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2 \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t), & x_2(0) &= -3\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0$$

Porównaj z poprzednim przykładem

$$J = \frac{1}{2} \left[ x_1^2(5) + x_1(5)x_2(5) + 2x_2^2(5) \right] + \frac{1}{2} \int_0^5 \left[ 2x_1^2(t) + 6x_1(t)x_2(t) + 5x_2^2(t) + 0.25u^2(t) \right] dt$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ 2x_1^2(t) + 6x_1(t)x_2(t) + 5x_2^2(t) + 0.25u^2(t) \right] dt$$

# Rozwiązanie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = r = \frac{1}{4}; \quad t_0 = 0; \quad t_f = \infty$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} \\ &= -4[\bar{p}_{12}x_1^*(t) + \bar{p}_{22}x_2^*(t)], \end{aligned}$$

# Równanie Riccatiego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{12} & \bar{p}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4\bar{p}_{12}^2 + 4\bar{p}_{12} - 2 &= 0 \\ -\bar{p}_{11} - \bar{p}_{12} + 2\bar{p}_{22} + 4\bar{p}_{12}\bar{p}_{22} - 3 &= 0 \\ -2\bar{p}_{12} - 2\bar{p}_{22} + 4\bar{p}_{22}^2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = 0$$

# Obliczenia w MatLabie

```
p=solve('4*p^2+4*p2-2=0','-p1-p2+2*p3+4*p2*p3-3=0','-2*p2-2*p3+4*p3^2-5=0')
```

```
>> p.p1
```

```
ans =
```

```
8*((4*3^(1/2) + 17)^(1/2)/4 + 1/4)^3 - 6*((4*3^(1/2) + 17)^(1/2)/4 + 1/4)^2 - (7*(4*3^(1/2) +  
17)^(1/2))/4 - 9/4  
(7*(4*3^(1/2) + 17)^(1/2))/4 - 6*((4*3^(1/2) + 17)^(1/2)/4 - 1/4)^2 - 8*((4*3^(1/2) +  
17)^(1/2)/4 - 1/4)^3 - 9/4  
8*((17 - 4*3^(1/2))^(1/2)/4 + 1/4)^3 - 6*((17 - 4*3^(1/2))^(1/2)/4 + 1/4)^2 - (7*(17 -  
4*3^(1/2))^(1/2))/4 - 9/4  
(7*(17 - 4*3^(1/2))^(1/2))/4 - 6*((17 - 4*3^(1/2))^(1/2)/4 - 1/4)^2 - 8*((17 - 4*3^(1/2))^(1/2)/4  
- 1/4)^3 - 9/4
```



# Obliczenia w MatLabie

```
>> vpa(p.p1)
```

VPA Variable precision arithmetic.

```
ans =
```

```
1.7362899361005299209261007435819  
-6.7362899361005299209261007435819  
-5.2484263820035944560034513697534  
0.24842638200359445600345136975337
```

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1.7363 & 0.3660 \\ 0.3660 & 1.4729 \end{bmatrix}$$

```
>> vpa(p.p2)
```

```
ans =
```

```
0.36602540378443864676372317075294  
0.36602540378443864676372317075294  
-1.3660254037844386467637231707529  
-1.3660254037844386467637231707529
```

```
>> vpa(p.p3)
```

```
ans =
```

```
1.4729115674864717393523545076534  
-0.97291156748647173935235450765344  
1.0434023557488222360125233517089  
-0.54340235574882223601252335170894
```

# Sterowanie optymalne

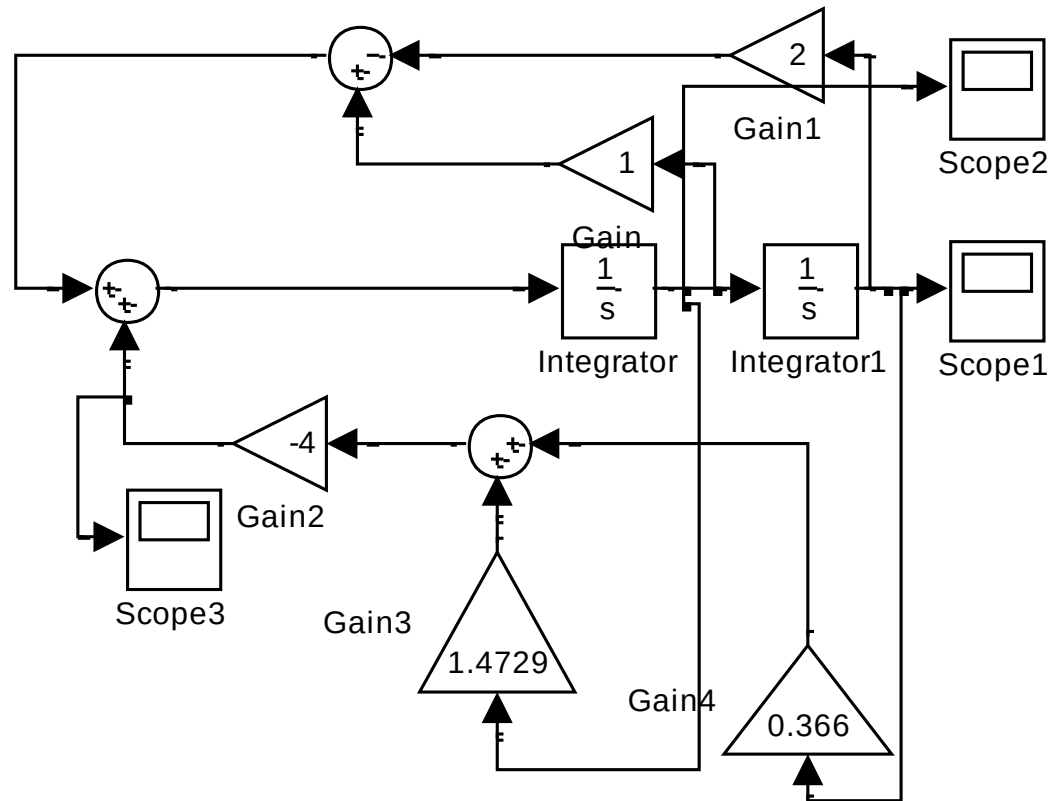
$$\begin{aligned}u^*(t) &= -4[0.366x_1^*(t) + 1.4729x_2^*(t)] \\ &= -[1.464x_1^*(t) + 5.8916x_2^*(t)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^*(t) &= x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) &= -2x_1^*(t) + x_2^*(t) - 4[0.366x_1^*(t) + 1.4729x_2^*(t)]\end{aligned}$$

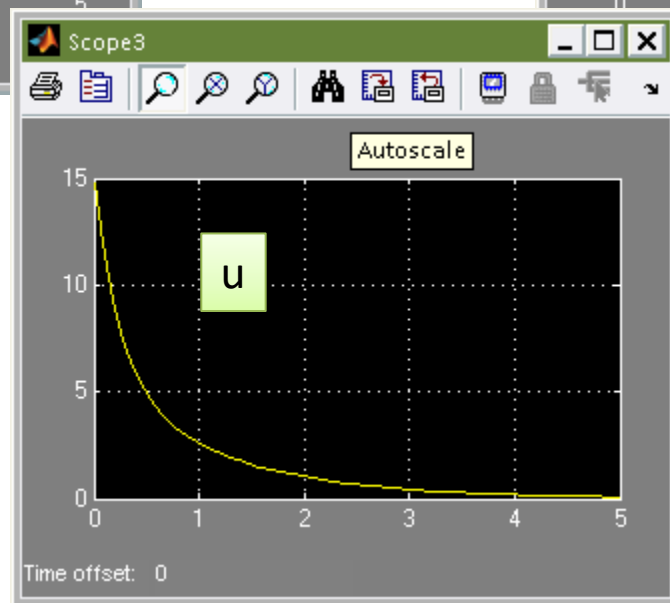
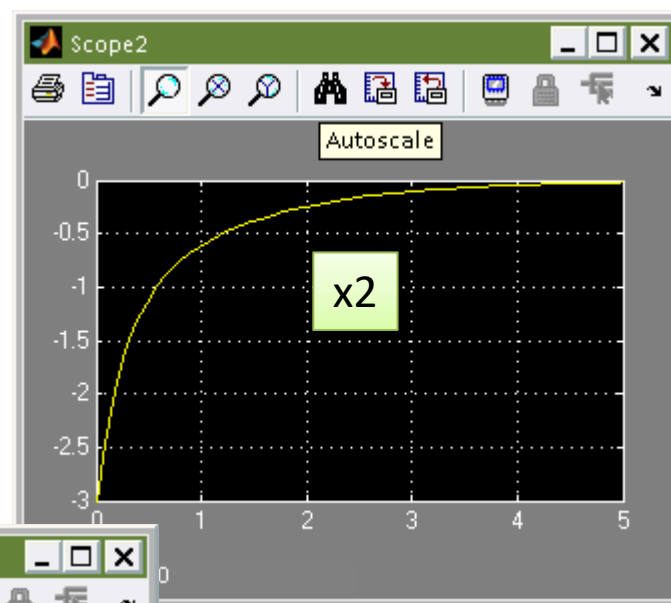
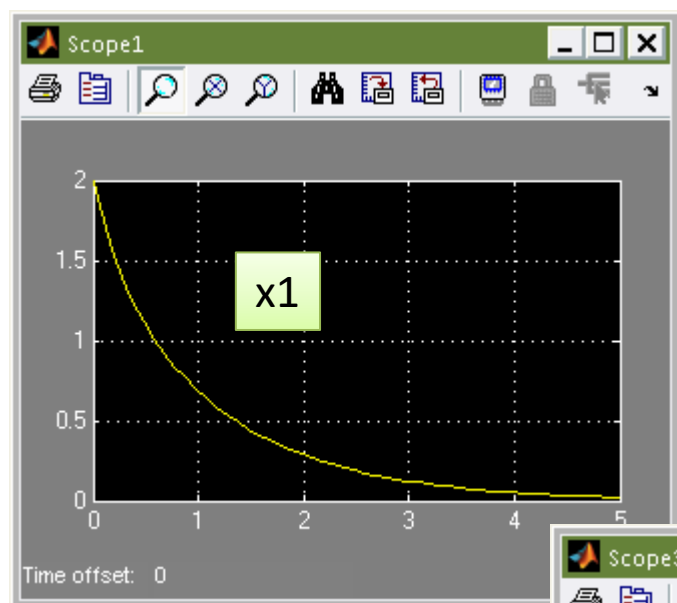
$$\begin{aligned}J^* &= \frac{1}{2}\mathbf{x}'(0)\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7363 & 0.3660 \\ 0.3660 & 1.4729 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= 7.9047.\end{aligned}$$

# Realizacja w MatLabie

LQR2.mdl



# Symulacja



# Funkcje specjalistyczne

```
x10=2; %% initial condition on state x1
x20=-3; %% initial condition on state x2
X0=[x10;x20];
A=[0 1;-2 1]; %% system matrix A
B=[0;1]; %% system matrix B
Q=[2 3;3 5]; %% performance index weighted matrix
R=[0.25]; %% performance index weighted matrix
[K,P,EV]=lqr(A,B,Q,R) %% K = feedback matrix;
%% P = Riccati matrix;
%% EV = eigenvalues of closed loop system A - B*K
K =
```

# Funkcje MatLaba.

## Control System ToolBox

### [-] Matrix Equation Solvers

- fx* bdschur - Block-diagonal Schur factorization
- fx* care - Solve continuous-time algebraic Riccati equation
- fx* dare - Solve discrete-time algebraic Riccati equations (DAREs)
- fx* dlyap - Solve discrete-time Lyapunov equations
- fx* dlyapchol - Square-root solver for discrete-time Lyapunov equations
- fx* gcare - Generalized solver for continuous-time algebraic Riccati equation
- fx* gdare - Generalized solver for discrete-time algebraic Riccati equation
- fx* lyap - Solve continuous-time Lyapunov equation
- fx* lyapchol - Square-root solver for continuous-time Lyapunov equation

# Care

## care

Solve continuous-time algebraic Riccati equation

## Syntax

```
[X,L,G] = care(A,B,Q)
```

```
[X,L,G] = care(A,B,Q,R,S,E)
```

```
[X,L,G,report] = care(A,B,Q,...)
```

```
[X1,X2,D,L] = care(A,B,Q,...,'factor')
```

# Opis

`[X,L,G] = care(A,B,Q)` computes the unique solution  $X$  of the continuous-time algebraic Riccati equation

$$A^T X + XA - XBB^T X + Q = 0$$

The `care` function also returns the gain matrix,  $G = R^{-1}B^T XE$ .

`[X,L,G] = care(A,B,Q,R,S,E)` solves the more general Riccati equation

$$A^T XE + E^T XA - (E^T XB + S)R^{-1}(B^T XE + S^T) + Q = 0$$

When omitted,  $R$ ,  $S$ , and  $E$  are set to the default values  $R=I$ ,  $S=0$ , and  $E=I$ . Along with the solution  $X$ , `care` returns the gain matrix  $G = R^{-1}(B^T XE + S^T)$  and a vector  $L$  of closed-loop eigenvalues, where

$$L = \text{eig}(A - B*G, E)$$

`[X,L,G,report] = care(A,B,Q,...)` returns a diagnosis `report` with:

- -1 when the associated Hamiltonian pencil has eigenvalues on or very near the imaginary axis (failure)
- -2 when there is no finite stabilizing solution  $X$
- The Frobenius norm of the relative residual if  $X$  exists and is finite.

This syntax does not issue any error message when  $X$  fails to exist.

`[X1,X2,D,L] = care(A,B,Q,...,'factor')` returns two matrices  $X1$ ,  $X2$  and a diagonal scaling matrix  $D$  such that  $X = D*(X2/X1)*D$ .

The vector  $L$  contains the closed-loop eigenvalues. All outputs are empty when the associated Hamiltonian matrix has eigenvalues on the imaginary axis.



# Przykład

Given

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad -1] \quad R = 3$$

you can solve the Riccati equation

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C^T C = 0$$

by

```
a = [-3 2; 1 1]
b = [0 ; 1]
c = [1 -1]
r = 3
[x,l,g] = care(a,b,c'*c,r)
```

This yields the solution

```
x
x =
    0.5895    1.8216
    1.8216    8.8188
```

You can verify that this solution is indeed stabilizing by comparing the eigenvalues of  $a$  and  $a-b*g$ .

```
[eig(a)    eig(a-b*g)]
ans =
   -3.4495   -3.5026
    1.4495   -1.4370
```

Finally, note that the variable  $l$  contains the closed-loop eigenvalues  $\text{eig}(a-b*g)$ .

```
l
l =
   -3.5026
   -1.4370
```

# Funkcje MatLaba.

## Control System ToolBox

### [-] LQR/LQG Design

- ... *fx* `augstate` - Append state vector to output vector
- ... *fx* `dlqr` - Linear-quadratic (LQ) state-feedback regulator for discrete-time state-space system
- ... *fx* `kalman` - Design continuous- or discrete-time Kalman estimator
- ... *fx* `kalmd` - Design discrete Kalman estimator for continuous plant
- ... *fx* `lqg` - Continuous linear-quadratic-Gaussian (LQG) control synthesis
- ... *fx* `lqgreg` - Form linear-quadratic-Gaussian (LQG) regulator
- ... *fx* `lqgtrack` - Form Linear-Quadratic-Gaussian (LQG) servo controller
- ... *fx* `lqi` - Linear-Quadratic-Integral control
- ... *fx* `lqr` - Linear-quadratic (LQ) state-feedback regulator for state-space system
- ... *fx* `lqrd` - Design discrete linear-quadratic (LQ) regulator for continuous plant
- ... *fx* `lqry` - Form linear-quadratic (LQ) state-feedback regulator with output weighting

# LQR

## **lqr**

Linear-quadratic (LQ) state-feedback regulator for state-space system

## **Syntax**

```
[K, S, e] = lqr(SYS, Q, R, N)
```

```
[K, S, e] = LQR(A, B, Q, R, N)
```

# Opis

`[K, S, e] = lqr(SYS, Q, R, N)` calculates the optimal gain matrix  $K$ .

For a continuous time system, the state-feedback law  $u = -Kx$  minimizes the quadratic cost function

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt$$

subject to the system dynamics

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

In addition to the state-feedback gain  $K$ , `lqr` returns the solution  $S$  of the associated Riccati equation

$$A^T S + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0$$

and the closed-loop eigenvalues `e = eig(A-B*K)`.  $K$  is derived from  $S$  using

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T)$$

For a discrete-time state-space model,  $u[n] = -Kx[n]$  minimizes

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \{x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u\}$$

subject to  $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$ .

`[K, S, e] = LQR(A, B, Q, R, N)` is an equivalent syntax for continuous-time models with dynamics  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

In all cases, when you omit the matrix  $N$ ,  $N$  is set to 0.

# LQR w czasie ciągłym z nieskończonym horyzontem

## Podsumowanie

Dla liniowego systemu czasu ciągłego określonego równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

z funkcją kosztu

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym minimalizujące koszt określone jest przez równanie:

$$u = -Kx$$

gdzie  $K$  jest dane równaniem

$$K = R^{-1} B^T P$$

a  $P$  można znaleźć rozwiązując algebraiczne równanie Riccatiego dla czasu ciągłego

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

# Równoważność systemu otwartego i systemu ze sprzężeniem zwrotnym

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \quad J = \int_0^{\infty} [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

$$x(0) = 1 \quad x(\infty) = 0$$

# System otwarty

$$V(x(t), u(t)) = x^2(t) + u^2(t),$$

$$f(x(t), u(t)) = -3x(t) + u(t).$$

$$\mathcal{H} = V(x(t), u(t)) + \lambda(t)f(x(t), u(t))$$

$$= x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t)[-3x(t) + u(t)].$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow 2u^*(t) + \lambda^*(t) = 0 \longrightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2}\lambda^*(t)$$

$$\mathcal{H}^* = x^{*2}(t) - \frac{1}{4}\lambda^{*2}(t) - 3\lambda^*(t)x^*(t)$$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda} \longrightarrow \dot{x}^*(t) = -\frac{1}{2}\lambda^*(t) - 3x^*(t),$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x} \longrightarrow \dot{\lambda}^*(t) = -2x^*(t) + 3\lambda^*(t)$$

$$\ddot{x}^*(t) - 10x^*(t) = 0.$$

$$x^*(t) = C_1 e^{\sqrt{10}t} + C_2 e^{-\sqrt{10}t}$$

$$\lambda^*(t) = 2[-\dot{x}^*(t) - 3x^*(t)]$$

$$= -2C_1(\sqrt{10} + 3)e^{\sqrt{10}t} + 2C_2(\sqrt{10} - 3)e^{-\sqrt{10}t}$$

$$x(0) = 1 \longrightarrow C_1 + C_2 = 1$$

$$\lambda(\infty) = 0 \longrightarrow C_1 = 0.$$

Warunek transwersalności

$$x^*(t) = e^{-\sqrt{10}t}$$

$$u^*(t) = -(\sqrt{10} - 3)e^{-\sqrt{10}t}$$

# System ze sprzężeniem zwrotnym

$$\mathbf{A} = a = -3; \quad \mathbf{B} = b = 1; \\ \mathbf{Q} = q = 2; \quad \mathbf{R} = r = 2; \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{p}.$$

$$\bar{p}(-3) + (-3)\bar{p} - \bar{p}(1)\left(\frac{1}{2}\right)(1)\bar{p} + 2 = 0 \longrightarrow \\ \bar{p}^2 + 12\bar{p} - 4 = 0,$$

$$\bar{p} = -6 \pm 2\sqrt{10}$$

$$u^*(t) = -r^{-1}b\bar{p}x^*(t) = -\frac{1}{2}(-6 + 2\sqrt{10})x^*(t) \\ = -(-3 + \sqrt{10})x^*(t).$$

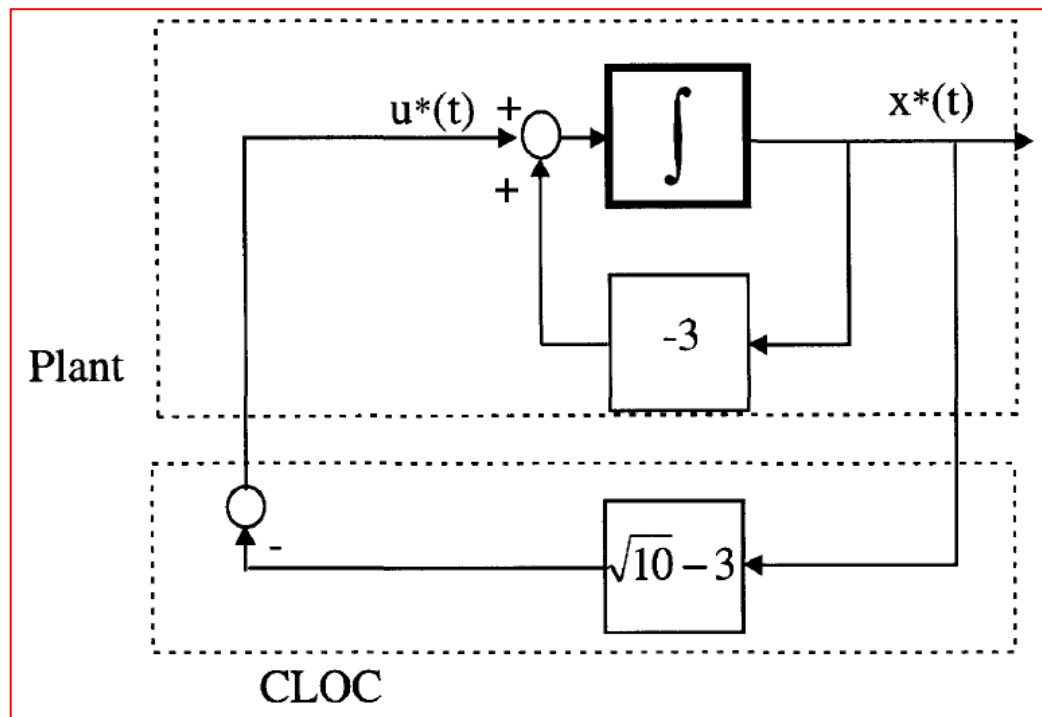
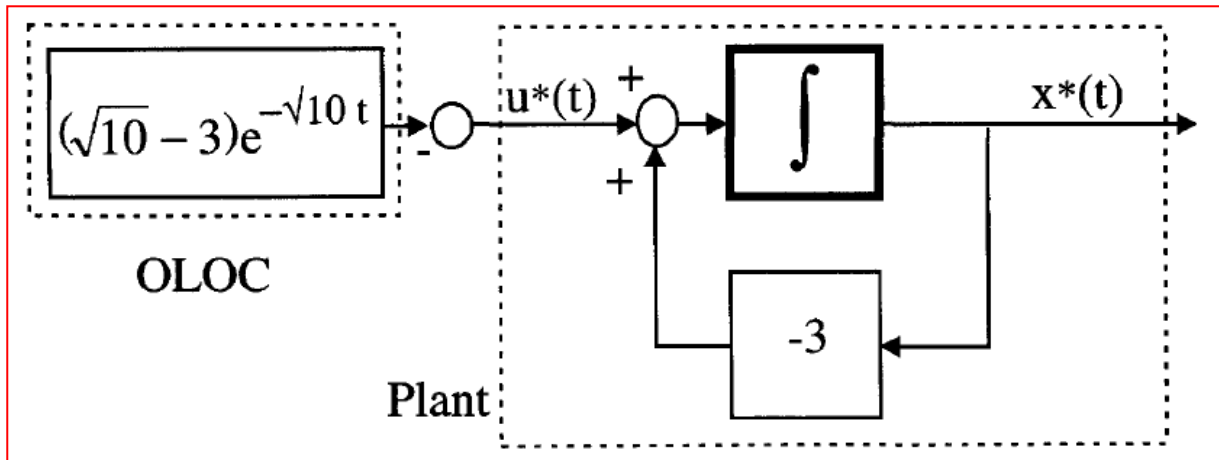
$$\dot{x}(t) = -3x^*(t) - (-3 + \sqrt{10})x^*(t) = -\sqrt{10}x^*(t)$$

$$x^*(t) = e^{-\sqrt{10}t}$$

$$u^*(t) = -(\sqrt{10} - 3)e^{-\sqrt{10}t}$$



# Symulacja



# Dodatki

# LQR w czasie dyskretnym ze skończonym horyzontem.

## Podsumowanie

Dla liniowego systemu dyskretnego określonego przez równanie

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k$$

z miarą jakości określoną przez

$$J = \sum_{k=0}^N (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

optymalna sekwencja sterująca minimalizująca miarę jakości dana jest jako

$$u_k = -F_k x_{k-1}$$

gdzie

$$F_k = (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k A$$

a  $P_k$  można znaleźć poprzez iterację wstecz w czasie z wykorzystaniem dynamicznego równania Riccatiego

$$P_{k-1} = Q + A^T \left( P_k - P_k B (R + B^T P_k B)^{-1} B^T P_k \right) A$$

z warunkiem początkowym  $P_N = Q$ .

### Uwaga (notacja zwyczajowa)

Funkcja minimalizująca (która nakłada "kary" na wartości kwadratów odchyłek sygnału na wejściu  $u$  i zmiennych stanu układu  $x$ ) zawiera odrębne, odpowiednie macierze wag  $Q$  i  $R$  dla obu tych wartości. Przyjął się następujący zapis:

$$J = \sum_{k=0}^N (\|x_k\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2)$$

gdzie wyrażenia [unormowane](#) określone są jak poniżej

$$\|x_k\|_Q^2 = x_k^T Q x_k$$

$$\|u_k\|_R^2 = u_k^T R u_k$$

# LQR w czasie dyskretnym z nieskończonym horyzontem.

## Podsumowanie

Dla liniowego systemu dyskretnego określonego równaniem

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

z miarą jakości określoną przez

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

optymalna sekwencja sterująca minimalizująca miarę jakości dana jest jako

$$u_k = -F x_k$$

gdzie

$$F = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

a  $P$  jest jednoznacznym dodatnio określonym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccati'ego dla czasu dyskretnego

$$P = Q + A^T \left( P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P \right) A.$$

Jedną z metod znalezienia rozwiązania tego równania polega na iteracji dynamicznego równania Riccati'ego dla przypadku ze skończonym horyzontem tak długo aż osiągnie się zbieżność.

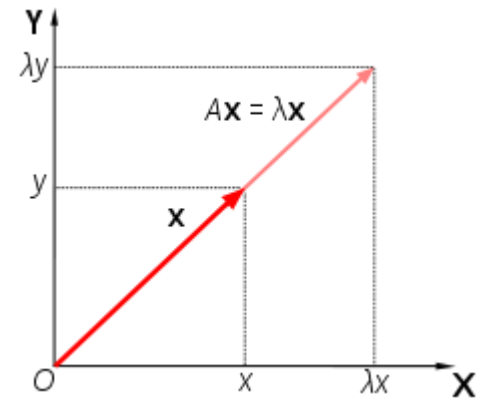
# Rozwiązanie równania Riccatiego

## Definicje

Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową, zaś  $A$  oznacza przekształcenie liniowe tej przestrzeni w siebie. Jeśli dla pewnego niezerowego  $x$  przestrzeni spełniony jest warunek

$$Ax = \lambda x$$

gdzie  $\lambda$  jest pewnym skalarzem, to  $x$  nazywa się **wektorem własnym**, a  $\lambda$  nazywa się **wartością własną** przekształcenia  $T$ .



$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -E \\ -Q & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} A & -E \\ -Q & -A' \end{bmatrix}$$

$$\Delta v = \mu v$$

Wszystkie wartości własne

$$W^{-1} \Delta W = D.$$

$$D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

Macierz modalna,  $W_{11}, W_{21}$  zawierają ujemne wartości własne

# Przekształcenie liniowe

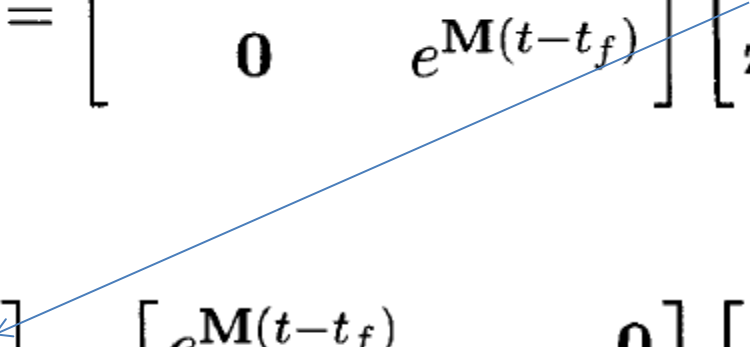

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \Delta \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\mathbf{M}(t-t_f)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{M}(t-t_f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t_f) \\ \mathbf{z}(t_f) \end{bmatrix}$$

lub


$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t_f) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{M}(t-t_f)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{M}(t-t_f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t_f) \end{bmatrix}$$

# Rozwiązanie równania Riccatiego

$$\begin{aligned}\lambda(t_f) &= \mathbf{W}_{21}\mathbf{w}(t_f) + \mathbf{W}_{22}\mathbf{z}(t_f) \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t_f) \\ &= \mathbf{F} [\mathbf{W}_{11}\mathbf{w}(t_f) + \mathbf{W}_{12}\mathbf{z}(t_f)]\end{aligned}$$

$$\mathbf{z}(t_f) = \mathbf{T}(t_f)\mathbf{w}(t_f)$$

gdzie

$$\mathbf{T}(t_f) = - [\mathbf{W}_{22} - \mathbf{F}\mathbf{W}_{12}]^{-1} [\mathbf{W}_{21} - \mathbf{F}\mathbf{W}_{11}]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}\mathbf{z}(t_f) \\ &= e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}\mathbf{T}(t_f)\mathbf{w}(t_f) \\ &= e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}\mathbf{T}(t_f)e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}\mathbf{w}(t)\end{aligned}$$

# Rozwiązanie równania Riccatiego

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{w}(t)$$

gdzie

$$\mathbf{T}(t) = e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}\mathbf{T}(t_f)e^{-\mathbf{M}(t_f-t)}$$

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \mathbf{W}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{W}_{22}\mathbf{z}(t) \\ &= \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{P}(t) [\mathbf{W}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{W}_{12}\mathbf{z}(t)]\end{aligned}$$

$$[\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t)] \mathbf{w}(t) = \mathbf{P}(t) [\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}\mathbf{T}(t)] \mathbf{w}(t).$$

$$\mathbf{P}(t) = [\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}\mathbf{T}(t)] [\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}\mathbf{T}(t)]^{-1}.$$



# Równania Riccatiego

$$y' = ay + by^2 + c,$$

$$\frac{dy}{dx} = ay + by^2 + c,$$

$$\int \frac{dy}{ay + by^2 + c} = \int dx.$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C$$

$(b^2 - 4ac > 0)$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C$$

$(b^2 - 4ac < 0)$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$