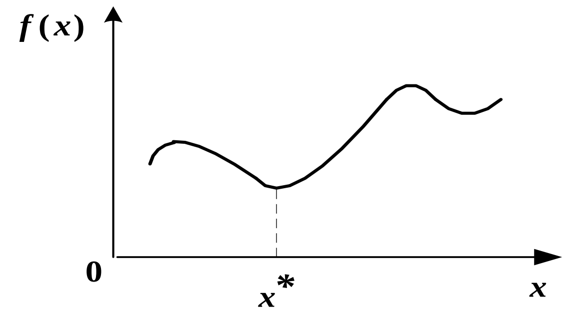
Optymalizacja statyczna

$$\min_x f(x) = -\max_x f(x)$$



$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\alpha} = 0.$$

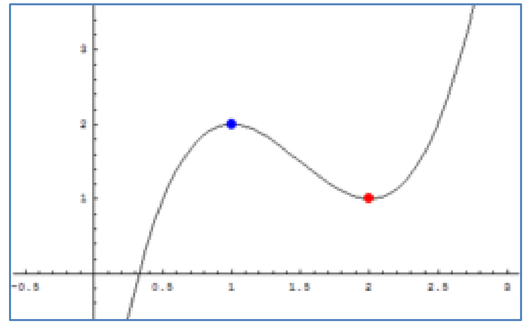
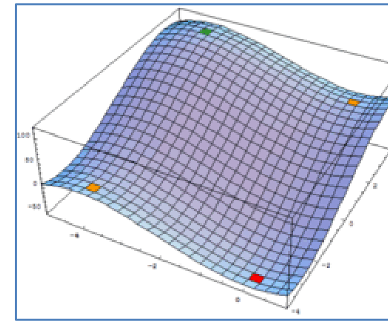
$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=\alpha} > 0 \;\; - \;\; \min$$

Optymalizacja statyczna vs. dynamiczna

Niech dana będzie funkcja

$$f: A \to R, A \subset R^n$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiej wartości $x^* \in A$, że dla każdego $x \in A \setminus \{x^*\}$ zachodzi: $f(x) > f(x^*)$

Ekstremum to największa lub najmniejsza wartość **funkcji**.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego (twierdzenie Fermata)

$$f'(x^*) = 0$$

To jest równanie algebraiczne

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego

$f''(x^*) < 0,$ to jest to maksimum lokalne

$f''(x^*) > 0,$ to jest to minimum lokalne

Metody optymalizacji

- metoda Newtona (optymalizacja)
- przeszukiwanie tabu
- wyszukiwanie binarne
- programowanie liniowe
- programowanie kwadratowe
- algorytm punktu wewnętrznego

Optymalizacja statyczna vs. dynamiczna

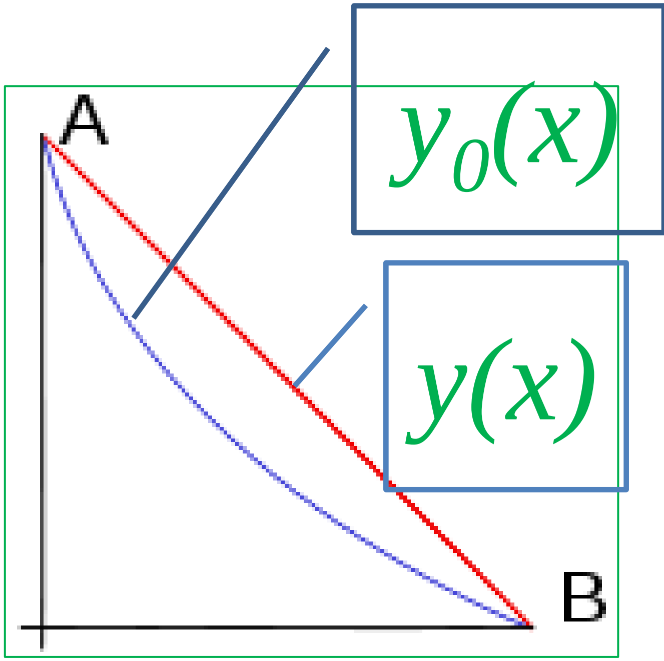
Niech dany będzie funkcjonał

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiej **funkcji** $y_0 = y_0(x)$,

że dla każdej innej funkcji $y_0(a) = A, \quad y_0(b) = B$

zachodzi: $J[y] > J[y_o]$



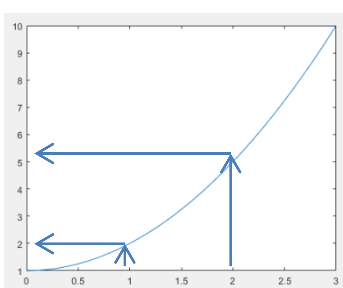
Funkcja vs. funkcjonał

$$x(t) = f(t)$$

$$x(t) = 2t^2 + 1$$

$$t = 1, x = 3,$$

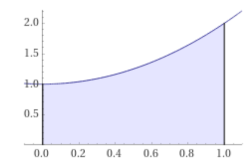
$$t = 2, x = 9$$



$$J\left(x(t)\right) = \int_0^1 x(t)dt$$

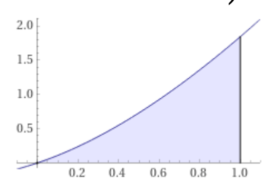
$$x(t) = 2t^2 + 1$$

$$J\left(x(t)\right) = \int_0^1 \left(2t^2 + 1\right)dt = \frac{4}{3}$$



$$x(t) = \sin(t) + t^2$$

$$J\left(x(t)\right) = \int_0^1 \left(\sin(t) + t^2\right)dt \approx 0.7903$$

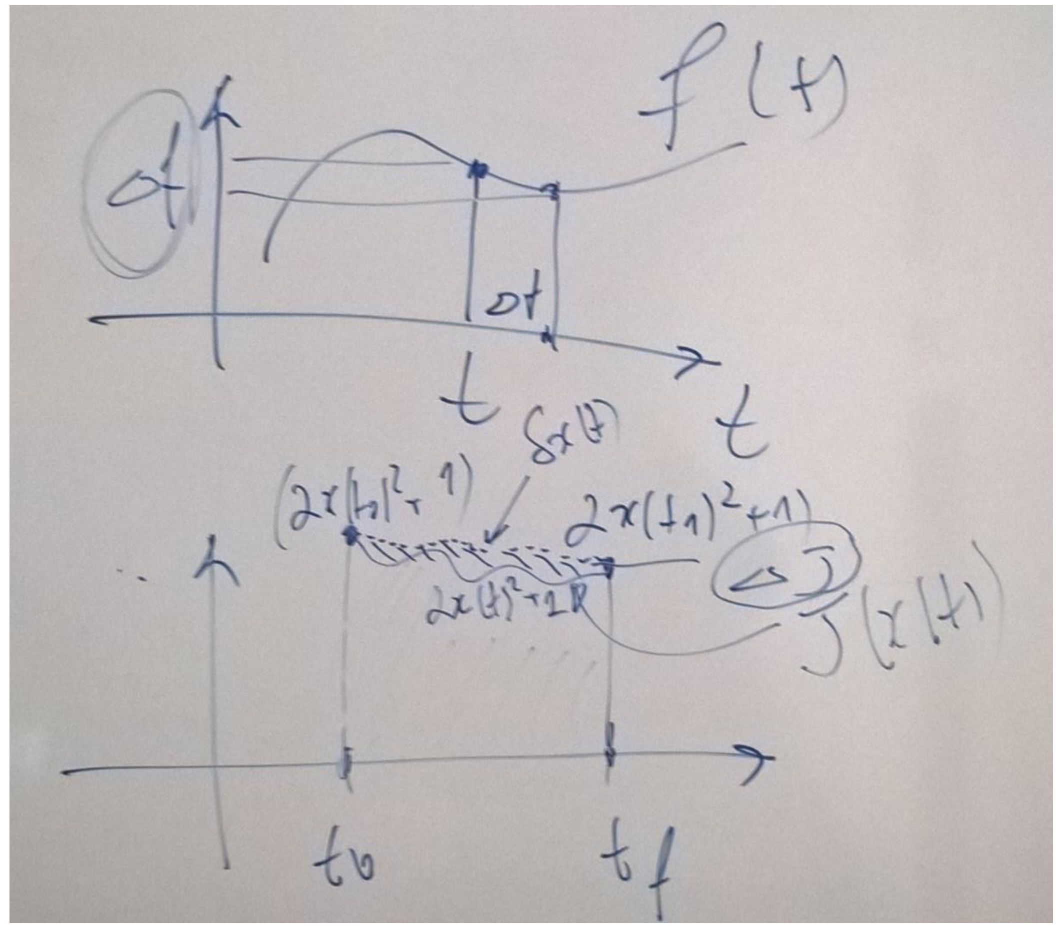


Pole
pod krzywej

Inkrementacja funkcji vs funkcjonału

$$\Delta f \triangleq f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$\Delta J \triangleq J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t))$$



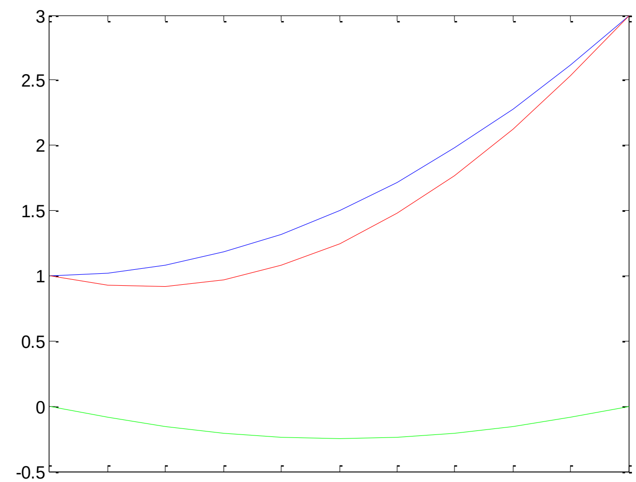
Przykład. **Inkrementacja** funkcjonału

```
clear all;
t=-1:0.1:1;
x=2.*t.^2+1;
plot(t,x);
hold on
delta=t.^2-t;
x1=2.*t.^2+1+delta;
plot(t,x1,'r');
plot(t,delta,'g');
```

$$\Delta J \triangleq J(x(t)+\delta x(t)) - J(x(t))$$

$$x(t) = 2t^2 + 1$$

$$\delta x(t) = t^2 - t$$



$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} f\left(x(t)\right)dt = \int_{t_0}^{t_f}\left[2x^2(t)+1\right]dt$$

$$x(t)+\delta x(t) = 2t^2+1+t^2-t = 3t^2-t+1$$

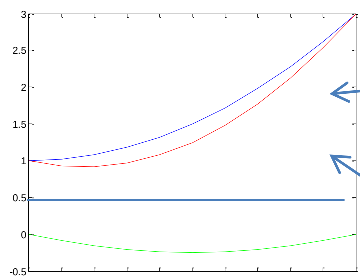
$$t_0 = 0 \quad t_f = 1$$

$$\boxed{\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0}$$

Przykład (cd)

$$x(t) = 2t^2 + 1 \qquad \delta x(t) = t^2 - t$$

$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} \left[2x^2(t) + 1\right] dt$$



Pole pod krzywej

$$J\left(x(t) + \delta x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} \left[2\left(x(t) + \delta x(t)\right)^2 + 1\right] dt$$

integrate 2*(2*t^2+1)^2+1 dx from t=0 to 1

Extended Keyboard Upload

Definite integral:

$$\int_0^1 \left(2\left(2t^2+1\right)^2+1\right) dt = \frac{109}{15} \approx 7.2667$$

integrate 2*(2*t^2+1+t^2-t)^2+1 dx from t=0 to 1

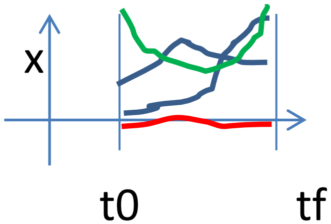
Extended Keyboard Upload

Definite integral:

$$\int_0^1 \left(2\left(2t^2+1+t^2-t\right)^2+1\right) dt = \frac{94}{15} \approx 6.2667$$

Inkrementacja funkcjonału

$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} \left(2x^2(t)+1\right) dt \rightarrow \min$$



$$\Delta J \triangleq J(x(t)+\delta x(t)) - J(x(t))$$

$$\begin{aligned}\Delta J &\triangleq J(x(t)+\delta x(t)) - J(x(t)),\\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[2(x(t)+\delta x(t))^2+1\right] dt - \int_{t_0}^{t_f} \left[2x^2(t)+1\right] dt,\\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[4x(t)\delta x(t) + 2(\delta x(t))^2\right] dt.\end{aligned}$$

Ekstremum funkcji

Optimum w punkcie t^* $|t - t^*| < \epsilon$

$$df = 0$$

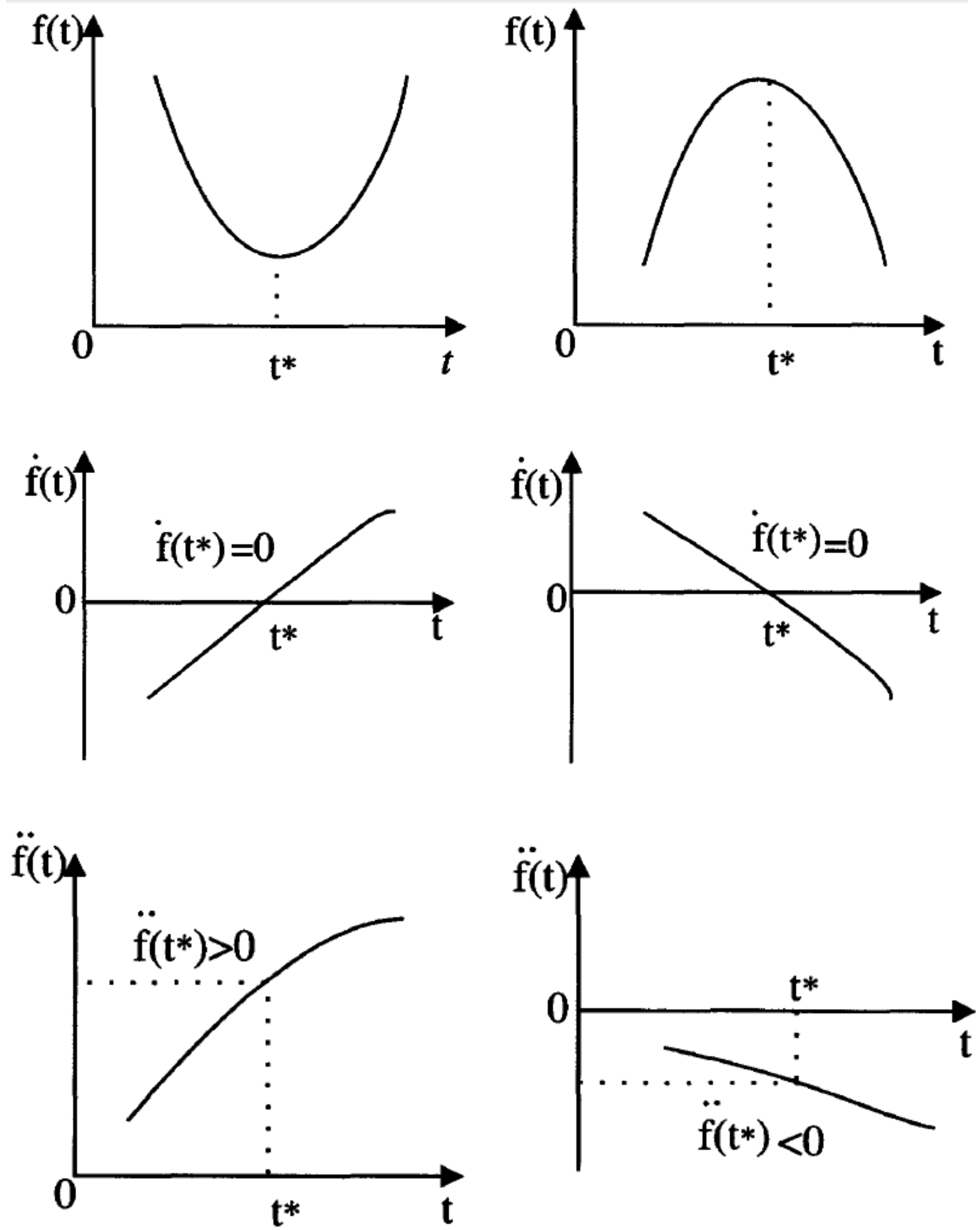
minimum

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \geq 0, \qquad d^2 f > 0$$

maksimum

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \leq 0, \qquad d^2 f < 0.$$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{f'(x_0)}{1!}}}_{=0}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$



f(t)
0
t*
t
f(t)
0
t*
t
$\dot{f}(t)$
$\dot{f}(t^*)=0$
0
t*
t
$\dot{f}(t)$
$\dot{f}(t^*)=0$
0
t*
t
$\ddot{f}(t)$
$\ddot{f}(t^*)>0$
0
t*
t
$\ddot{f}(t)$
t*
0
t
$\ddot{f}(t^*)<0$

Ekstremum funkcjonału

Optimum w punkcie (funkcji) x^*

$$|x - x^*| < \epsilon$$
$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$$

minimum

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0, \qquad \delta^2 J > 0$$

maksimum

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0 \qquad \delta^2 J < 0.$$

$$J\left(x(t) + \delta x(t)\right) = J\left(x(t)\right) + \underbrace{\boxed{\frac{\partial J}{\partial x}}}_{=0} \delta x(t) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}(\delta x(t))^2 + \cdots$$

Rachunek wariacyjny

Punktem wyjścia rachunku wariacyjnego jest funkcjonał J, **którego argumentami są funkcje** specyficzne dla danego problemu. Funkcjonał J ma zwykle postać całki oznaczonej po pewnym przedziale dla funkcji podcałkowej zależącego od argumentu x:

$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), x'(t))dt \qquad (2)$$

$$J\left(x\left(t\right)\right) = \int_a^b \left[x^3\left(t\right) + 2x\left(t\right) + 3t - 5x'\left(t\right)\right]dt \to \min$$

Zagadnienie wg rachunku wariacyjnego

Mamy
$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), x'(t))dt$$
$$x(t_0) = A, \quad x(t_f) = B$$

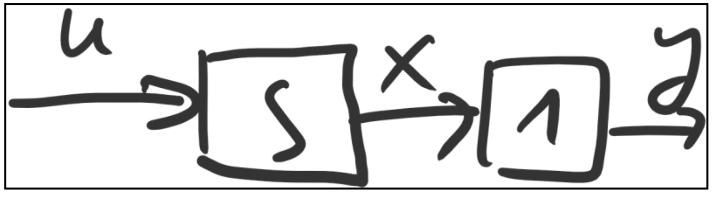
Szukamy
$$x = x(t)$$

żeby
$$J \to \min$$

Przykład. Układ dynamiczny

$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), x'(t))dt$$

$$y(t) = x(t)$$



$$x'(t) = u(t)$$

$$e(t) = \int_t^T \left((Q-y)^2 + \rho u^2\right)dt$$

$$F = (Q-x)^2 + \rho x'^2$$

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$J\left(y\right)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

$$\delta y = y - y_0 \qquad y = \delta y + y_0$$

$$|\delta y(x)| << |y_0(x)|, \ |\delta y'(x)| << |y'(x)|$$

δy(a)=δy(b)=0

Równanie Eulera-Lagrange'a. Wyprowadzenie

$$J\left(y\right)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

$$J\left(y_0(x)+\delta y(x)\right)=J\left(y_0(x)\right)+\frac{\partial J}{\partial y}\delta y(x)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}(\delta y(x))^2+\cdots$$

$$y\left(x\right)=y_0\left(x\right)+\delta y\left(x\right) \qquad \delta y=y-y_0$$

Szereg Taylora dla funkcji F:

$$F(x,y,y')=F(x,y_0,y_0{}')+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\ldots$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$

Równanie Eulera-Lagrange'a. Wyprowadzenie (c.d.)

$$J\left(y\right)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

$$\delta J = J[y]-J[y_0] \qquad (1)$$

$$F(x,y,y')=F(x,y_0,y_0{}')+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\delta y dx+\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx=$$

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\delta y dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y(x)\Bigg|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y(x)dx$$

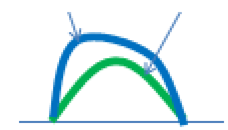
$$\boxed{\int u\,v'\,dx=u\,v-\int v\,u'\,dx}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a. Wyprowadzenie (cd)

$$\delta J = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x)dx =$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)dx + \cancel{\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y(x)\Big|_a^b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y(x)dx$$

δy(a)=δy(b)=0



$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\delta y dx = 0$$

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$0 = \delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0} \Longleftrightarrow \boxed{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,}$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}.$$

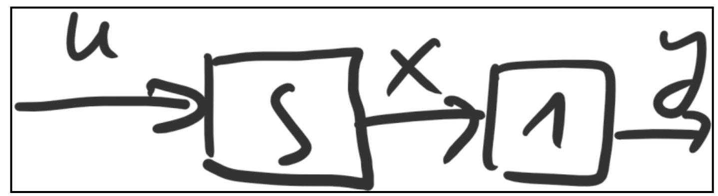
Funkcje ***y(x)*** nazywamy ***ekstremalami***

Funkcja będąca argumentem funkcjonału, dla której ten przyjmuje największą lub najmniejszą wartość liczbową, np. droga całkowania, przy której wartość całki osiąga minimum lub maksimum

http://sjp.pl/ekstremal

Przykład. Układ dynamiczny

$$J\left(x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), x'(t))dt$$



$$y(t) = x(t)$$

$$x'(t) = u(t)$$

$$e(t) = \int_t^T \left((Q - y)^2 + \rho u^2\right) dt$$

$$F = (Q - x)^2 + \rho x'^2$$

Przykład (cd)

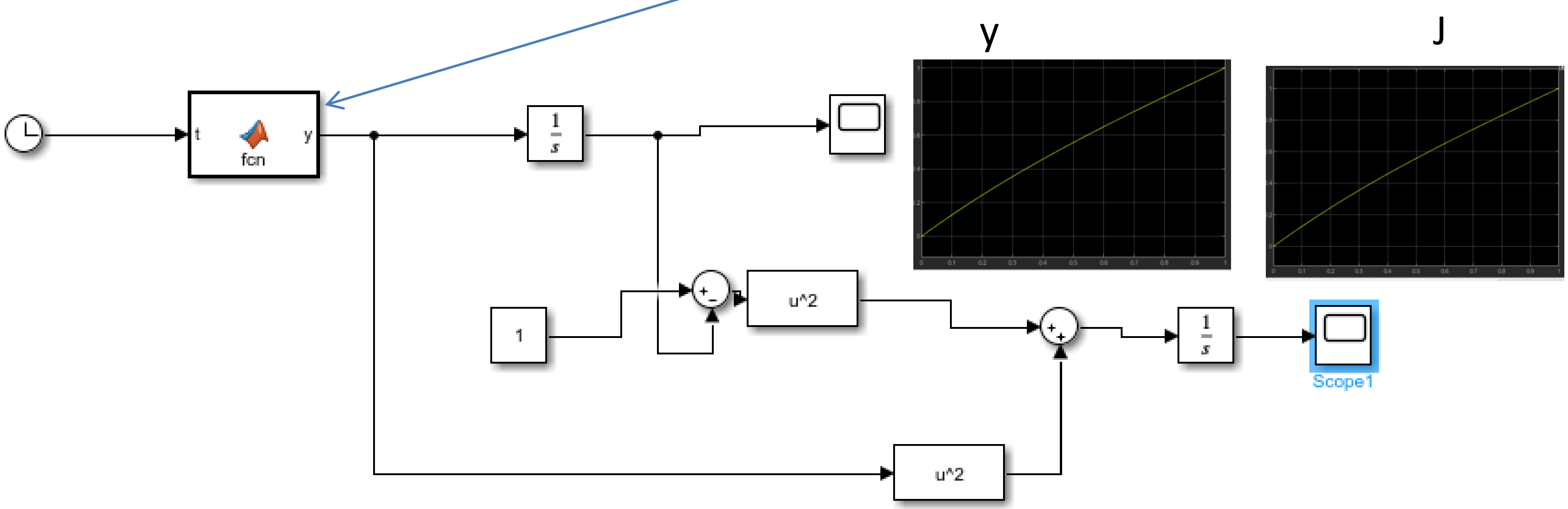
Wolfram alpha

-2+2*x-2*x''=0,x(0)=0,x(1)=1

derivative of (e^(2-t)-e^t+1-e^2)/(1-e^2)

$$x(t) = \frac{e^{2-t} - e^{t} + 1 - e^{2}}{1 - e^{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2-t} - e^{t} + 1 - e^{2}}{1 - e^{2}}\right) = \frac{e^{-t}\left(e^{2t} + e^{2}\right)}{e^{2} - 1}$$



w5ukladDynamiczny.xls

Przykład (cd)

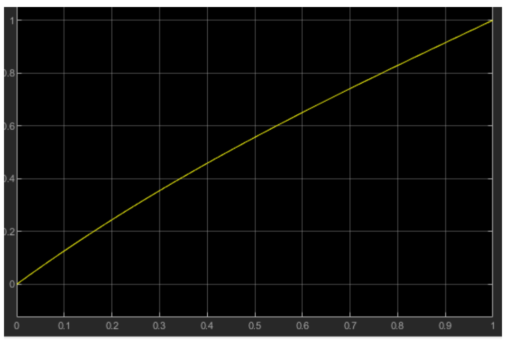
derivative of (e^(2-t)-e^t+1-e^2)/(1-e^2)**+t^2-t**

function y = fcn(t)

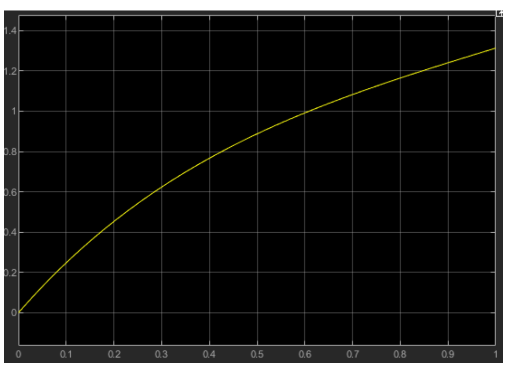
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{2-t}-e^{t}+1-e^{2}}{1-e^{2}}+t^{2}-t\right)=\frac{e^{-t}\left(e^{2t}+e^{2}\right)}{e^{2}-1}+2t-1$$

```
%y = exp(-t)*(exp(2*t)+exp(2))/(exp(2)-1);
y = exp(-t)*(exp(2*t)+exp(2))/(exp(2)-1)+2*t-1;
```

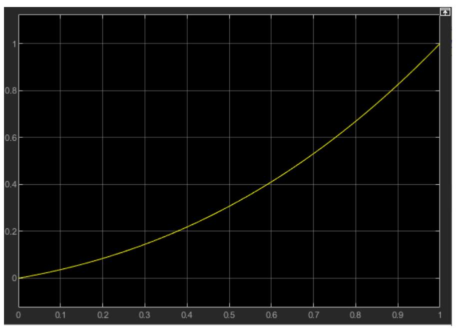
Y



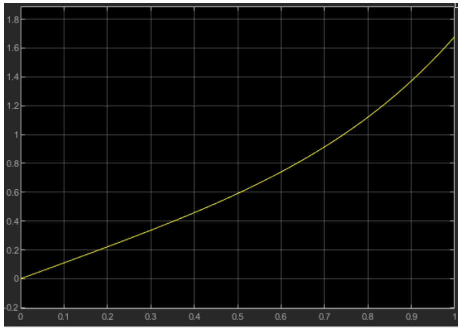
J



Y



J



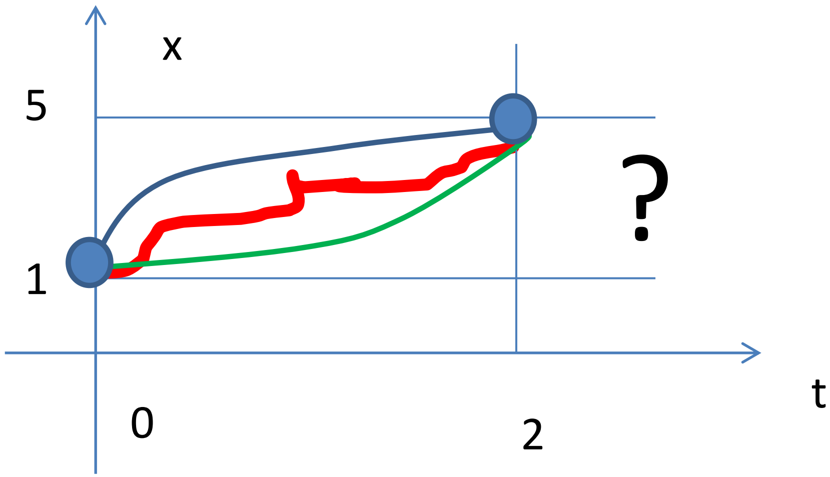
Zadanie 1

30-04

$$J\left(x(t)\right)=\int_0^2\Big[\underbrace{\dot{x}^2(t)-2tx(t)}_{F}\Big]dt$$

$$x(0)=1$$

$$x(2)=5$$



Rozwiązanie

funkcjonał

V

$$J = \int_0^2 \left[\boxed{\dot{x}^2(t) - 2tx(t)}\right] dt$$

V(t,x,x')

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{-2t} - \boxed{\frac{d}{dt}\boxed{(2\dot{x}(t))}} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) = t.}$$

$x(0) = 1$

$x(2) = 5$

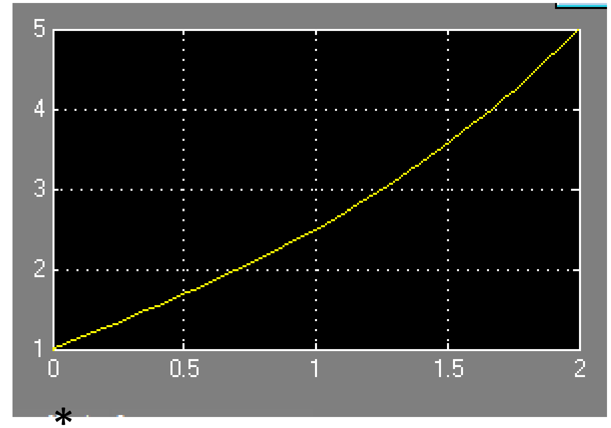
$$\boxed{x^*(t) = \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2}$$

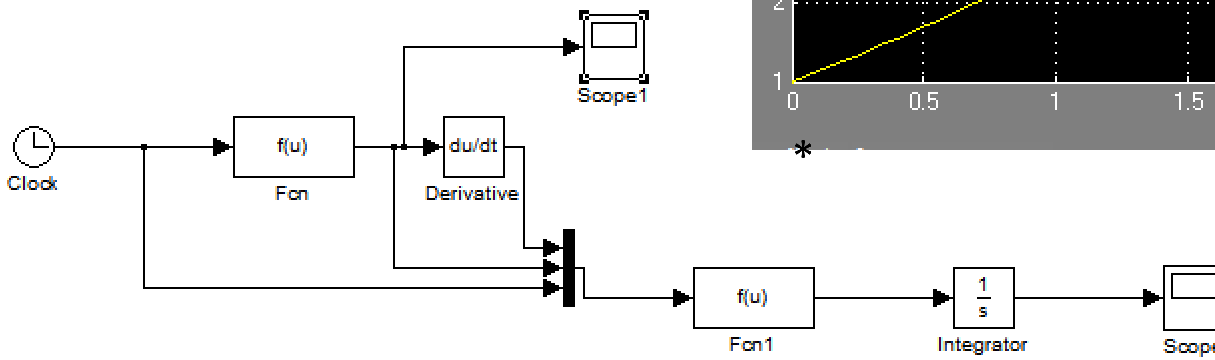
ekstremal

$$x(0) = 1 \longrightarrow C_2 = 1, \quad x(2) = 5 \longrightarrow C_1 = \frac{4}{3}$$

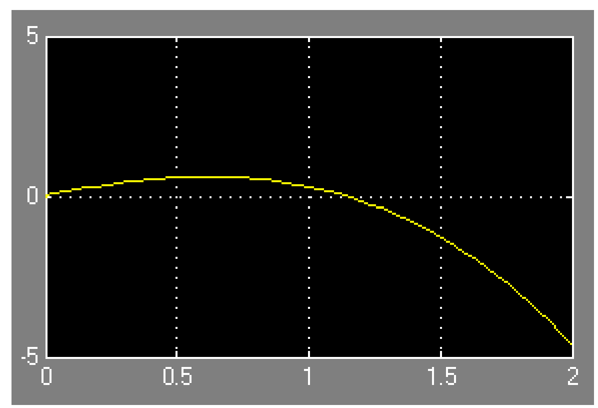
Symulacja

- Prz1.mdl





int(sym('(1/2*t^2+4/3)^2-
2*t*(1/6*t^3+4/3*t+1)'),'t',0,2)
ans =-68/15= -4.5333



Druga wariacja

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

$$\delta J=\int_a^b\left[F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')\right]dx$$

$$h(a)=h(b)=0$$

Ze wzoru Taylora wynika, że

$$h'(a)=h'(b)=0$$

$$F(x,y+h,y'+h')-F(x,y,y')=h\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}+h'\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}+$$

$$\boxed{+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+hh'\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}+\frac{1}{2}h'^2\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}$$

gdzie pochodne $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ obliczone są w punkcie $(x, y+\theta h, y'+\theta h')$

$$0<\theta<1$$

Dostateczny warunek ekstremum

Podobno jak w przypadku badania funkcji używamy ***pierwszej i drugiej różniczki***, tak samo, przy badaniu funkcjonałów używamy ***pierwszej i drugiej wariacji.***

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2hh' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + h'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right] dx$$

Dostateczny warunek ekstremum

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2hh' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + h'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right] dx \qquad (2)$$

Jeżeli funkcjonał ***J(y)*** ma **minimum** dla funkcji y(x), to dla każdej funkcji ***h(x)*** , i zerującej się na końcach przedziału **(a,b)**, musi zachodzić

$$\delta^2 J \geq 0$$

Całkując przez części (2) mamy $\delta^2 J = \int_a^b \left[h^2 P + h'^2 R \right] dx$

gdzie $P = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'} \right)$ $\qquad R = \frac{1}{2} F_{y'y'}$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Twierdzenie Legendre'a

Jeśli funkcjonał J(y) dla funkcji y(x) ma ekstremum słabe, to muszą być spełnione warunki konieczne:

1. Funkcja y(x) ma spełniać równanie Eulera-Lagrange'a

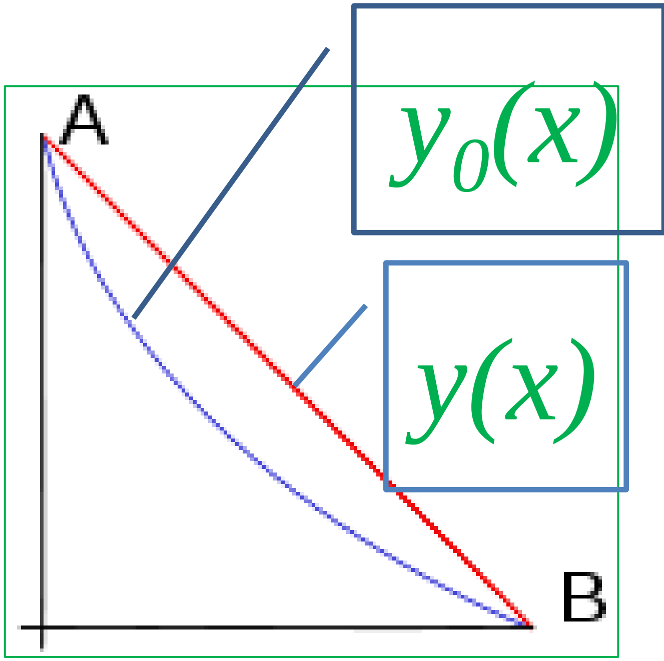
$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,}$$

2. Dla funkcji y(x) musi być spełniony warunek na minimum

$$\boxed{R = \frac{1}{2} F_{y'y'} \geq 0}$$

Optymalizacja statyczna vs. dynamiczna

Niech dany będzie funkcjonał



$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu

takiej **funkcji** $y_0 = y_0(x)$,

że dla każdej innej funkcji $y_0(a) = A, \quad y_0(b) = B$

zachodzi: $J[y] > J[y_o]$

Warunek konieczny

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Krzywe całkowe równania Eulera nazywamy ***ekstremalami***

To jest równanie różniczkowe

Warunek wystarczający
(na minimum)

$$R = \frac{1}{2} F_{y'y'} \geq 0$$

Schemat badania

y(x) x* miny(x*)

$$J(y(x))=\int_0^1\left(y'^2+12xy\right)dx\to \text{extr}$$

- Funkcja
- **Ekstremum (punkt)**

- Warunek konieczny
- **Równanie algebraiczne**

Y’(x)=0

- Warunek wystarczający
- Sprawdzanie na ekstrema

Y’’(x*)>0

- Funkcjonał
- **Ekstremal (funkcja)**

- Warunek konieczny
- **Równanie różniczkowe**

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0}$$

Y*(x)

- Warunek wystarczający
- Sprawdzanie na ekstrema

$$\boxed{R=\frac{1}{2}F_{y'y'}\geq 0}$$

Zadanie 2

$$J(y(x)) = \int_0^1 \left(y'^2 + 12xy \right) dx \to \text{ extr}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

$$F(x, y, y') = y'^2 + 12xy$$

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,}$$

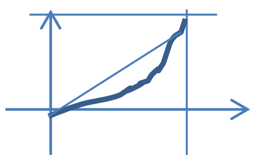
Rozwiązanie

$$F\left(x,y,y'\right)=y'^2+12xy$$

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

$$F_y=12x;\quad F_{y'}=2y'.\qquad \frac{dF_{y'}}{dx}=2y''.\qquad \boxed{12x-2y''=0,}\qquad y''=6x.$$

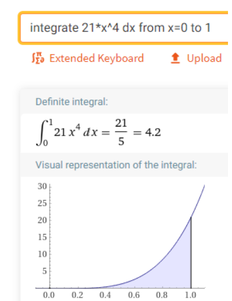
$$\begin{cases} y(0)=0; \\ y(1)=1. \end{cases}$$



$$y(x)=x^3+C_1x+C_2.$$

$$J(y(x))=\int_0^1\left(y'^2+12xy\right)dx\to \text{extr}$$

$$\begin{cases} y(0)=C_2=0; \\ y(1)=1+C_1+C_2=1, \end{cases}\qquad \begin{cases} C_1=0; \\ C_2=0; \end{cases}$$



$$\boxed{y(x)=x^3.}$$

ekstremal

21*x^4

$$\boxed{R=\frac{1}{2}F_{y'y'}\geq 0}$$

$$F_{y'y'}=2>0,$$

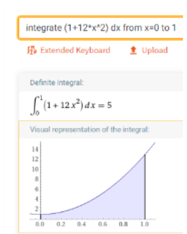
minimum

Y=x

F=1+12x^2

$$P=\frac{1}{2}\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)$$

$$F\left(x,y,y'\right)=y'^2+12xy$$



MatLab. Porównywanie.

$$J(y)=\int_0^1 \left(y'^2+12xy\right)dx \to \text{extr}$$

```
clear all
syms x
k=1:5;
y=x.^k;
Dy=diff(y,x);
F=Dy.^2+12*x.*y;
J=int(F,x,0,1);
Jm=eval(J);
disp('k      J(x^k)')
fprintf('%d   %12.10f\n',[k;Jm])
```

$y(x)=x^3.$

k	J(x^k)
1	5.0000000000
2	4.3333333333
3	**4.2000000000**
4	4.2857142857
5	4.4920634921

$M_1(0,0)\;\; M_2(1,1)$

\w1MatLab\ex1.m

Zadanie 3

$$y = y(x) \qquad y(0) = y(1) = 0 \qquad \boxed{J = \int_0^1 \left(y'^2 + 4y^2 - 2y \right) dx \to \min}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

$$F\left(x, y, y'\right) = y'^2 + 4y^2 - 2y$$

Rozwiązanie

$$y = y(x) \qquad y(0) = y(1) = 0$$

$$\boxed{J = \int_0^1 \left(y'^2 + 4y^2 - 2y \right) dx \to \min}$$

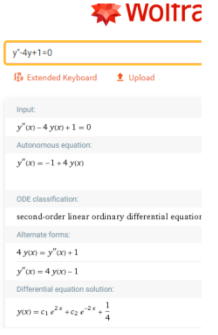
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

$$F\left(x, y\right) = y'^2 + 4y^2 - 2y$$

$$y'' - 4y + 1 = 0$$

Rozwiązanie ogólne (jako niejednorodne)

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}$$



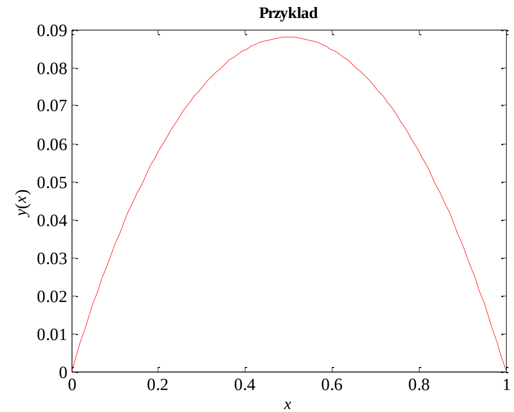
$$c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 0 \qquad c_1 = -\frac{4}{4\left(e^2 + 1\right)}$$

$$c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + \frac{1}{4} = 0 \qquad c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{4}{4\left(e^2 + 1\right)}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{4}{4\left(e^2 + 1\right)} e^{2x} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{4\left(e^2 + 1\right)} \right) e^{-2x} + \frac{1}{4}}$$

Rozwiązanie komputerowe

Rozwiazanie
Dane wejsciowe:
Funkcja podcalkowa F(x,y,y')=4*y^2 - 2*y + Dy
Rozwiazanie
Dane wejsciowe:
Funkcja podcalkowa F(x,y,y')=Dy^2 + 4*y^2 - 2*y
Warunki z lewej strony: y(0)=0
warunki z prawej strony: y(1)=0
Fy=8*y - 2
Fy'=2*Dy
dFy'/dx=2*D2y
warunek Legendre a:
Fy'y'=2
Rownianie Eulera:
8*y - 2*D2y - 2=0
Rozwiazanie ogolne rowniania Eulera :
y(x)=C2/exp(2*x) + C3*exp(2*x) + 1/4
Rowniania dla warunkow granicznych:
C2 + C3 + 1/4=0
(562949953421312*C2)/4159668786720471 +
(4159668786720471*C3)/562949953421312 + 1/4=0
Rownanie ekstremali:
y(x)=0.25 - 0.22019926949447/exp(2.0*x) - 0.029800730505529*exp(2.0*x)
Jextr =
  -0.0596
Jlin =
    0



Zadanie1.m

Zadanie 4

$$J(y) = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right) dx \to \text{extr}$$

$$F\left(x, y, y'\right) = y'^2 - y^2$$

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ y(2\pi) = 1. \end{cases}$$

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,}$$

Rozwiązanie nie jednoznaczne

$F_y = -2y; \quad F_{y'} = 2y'.$ $\qquad y'' + y = 0.$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1; \\ y(2\pi) = C_1 = 1. \end{cases}$$

$$y(x) = \cos x + C_2 \sin x.$$

C2<-R

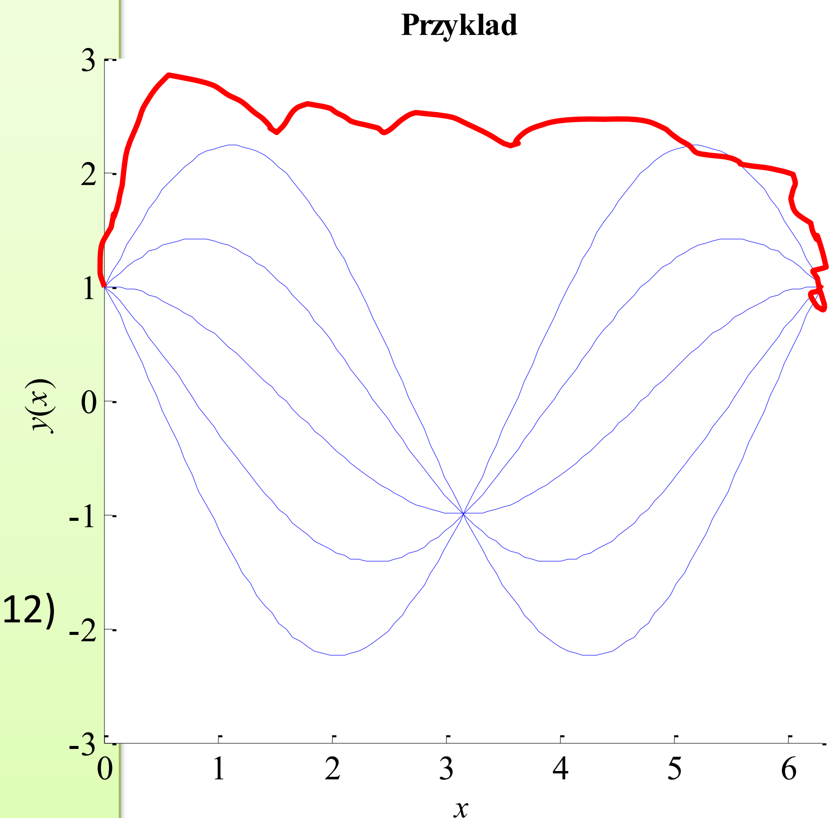
$$F_{y'y'} = 2,$$

minimum

Rodzina funkcji y(x) jest rozwiązaniem

MatLab

```
clear all
syms x
C2=-2:2;
y=cos(x)+C2*sin(x);
Dy=diff(y,x);
F=Dy.^2-y.^2;
J=int(F,x,0,2*pi)
xpl=linspace(0,2*pi);
figure
hold on
for k=1:length(J),
  ypl=subs(y(k),x,xpl);
  plot(xpl,ypl)
end
hold off
set(get(gcf,'CurrentAxes'),...
  'FontName','Times New Roman Cyr','FontSize',12)
xlim([0 2*pi])
da=daspect;
da(1:2)=min(da(1:2));
daspect(da);
title ('\bfPrzyklad ')
xlabel ('\itx\rm')
ylabel ('\ity\rm(\itx\rm)')
```



\w1MatLab\ex2.m

Brachistochrona

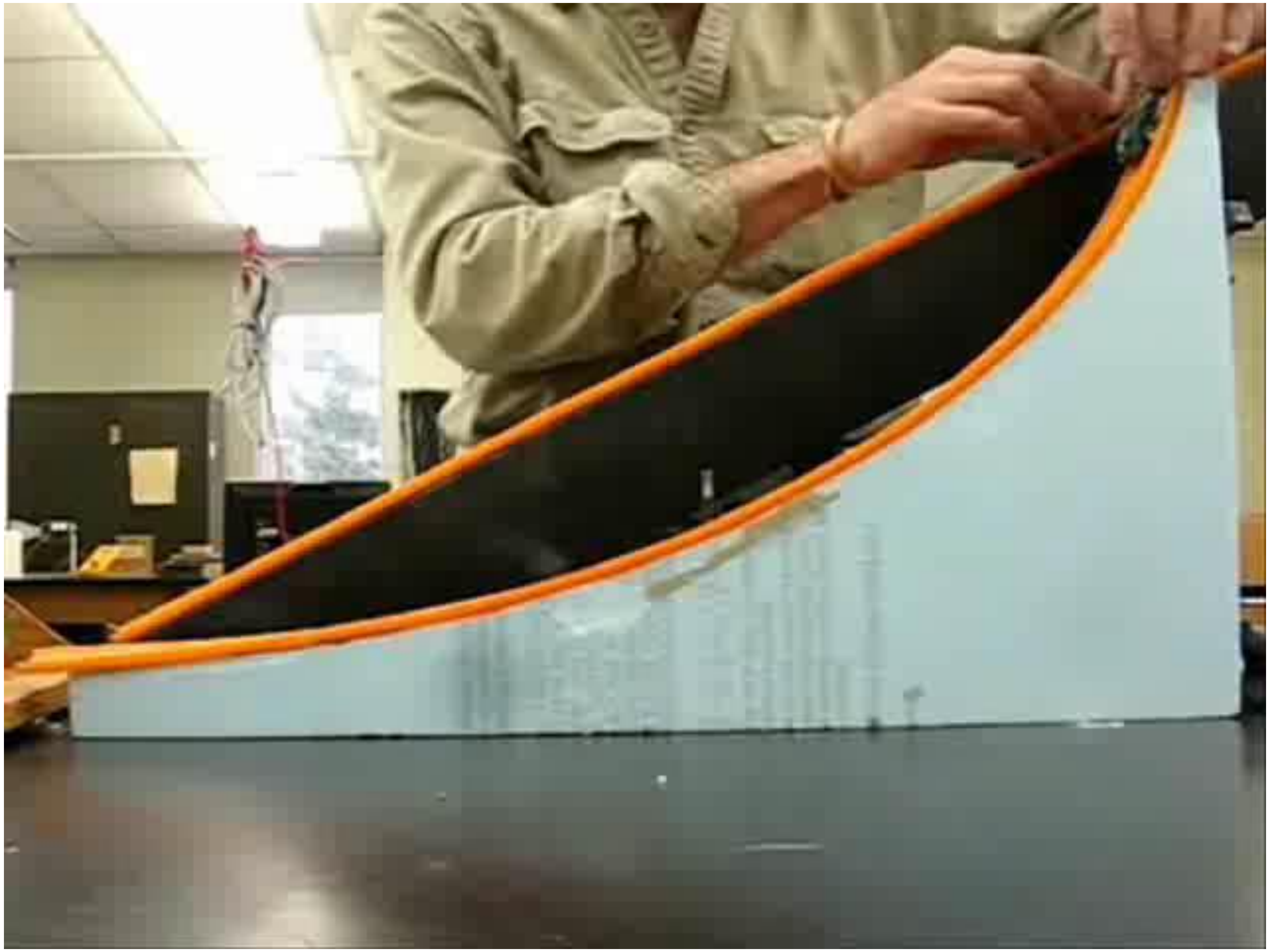
Brachistochrona – krzywa, po której czas staczania się masy punktowej od punktu A do punktu B pod wpływem stałej siły (siły ciężkości) jest najkrótszy. Nazwa pochodzi od złożenia greckich słów ***brachistos*** (βραχιστος) - "najkrótszy" i **chronos** (χρονος) - "czas".

Brachistochrona

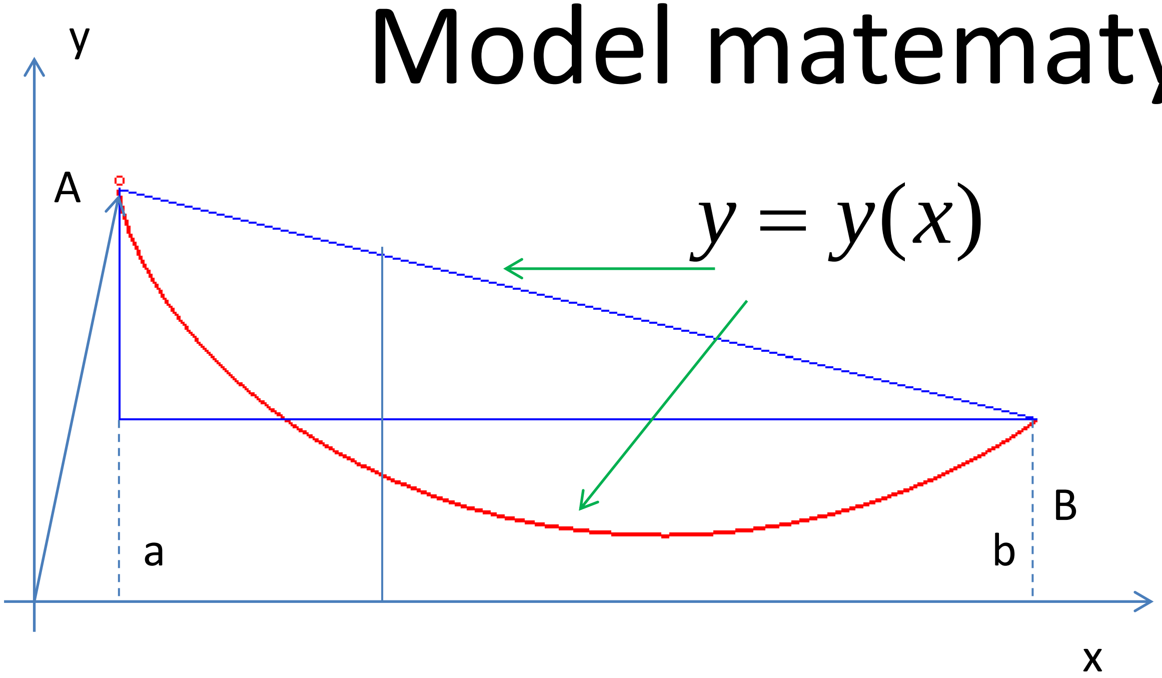
Zagadnienie brachistochrony było jednym z pierwszych, do rozwiązania którego wykorzystano rachunek wariacyjny. Postawiony w 1696 przez Jakuba Bernoulliego problem znalezienia krzywej najszybszego spadku został rozwiązany niezależnie przez Leibniza, Newtona, Jana Bernoulliego oraz de L'Hospitala.

W zadaniu o brachistochronie szukamy linii łączącej dwa punkty A i B, nieleżące na jednej prostej pionowej, po której punkt materialny stacza się najszybciej. Krzywa taka nazywa sie **brachistochrona**.

Eksperyment



Model matematyczny



$$y = y(x)$$

Trzeba znaleźć

$$y = y(x)$$

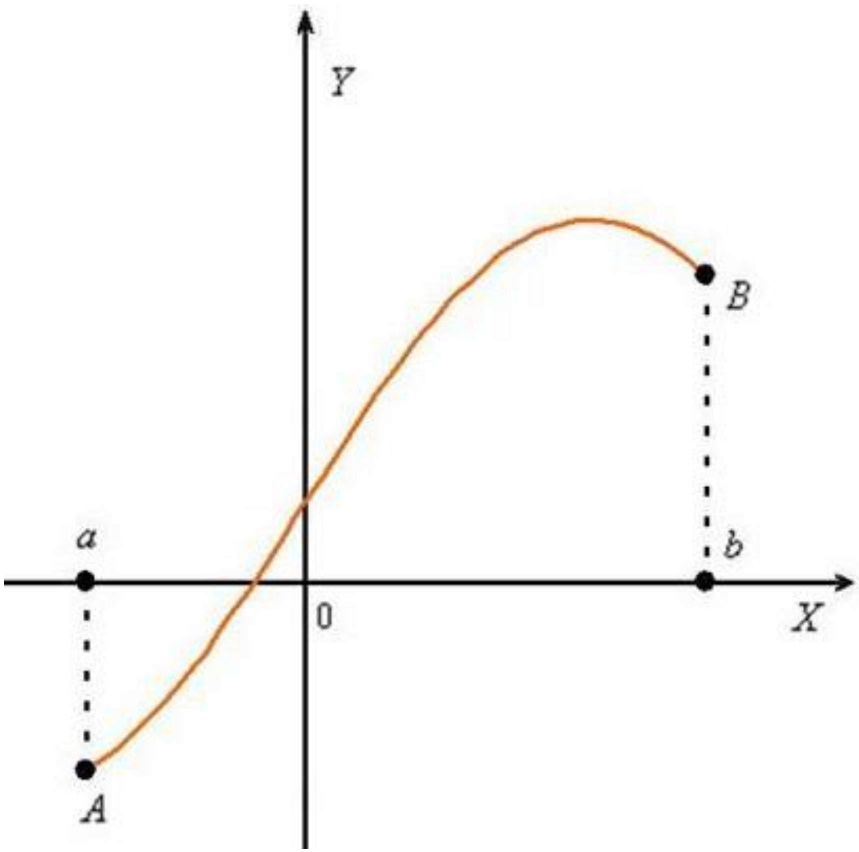
$$v = y'(x)$$

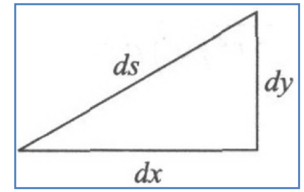
Kryterium optymalności
Problem sterowania ujmuje funkcjonał kosztów

W każdym punkcie prędkość ma być maksymalną,
Czyli czas całkowity musi mycz minimalny

$$J = \int_a^b \frac{ds}{v} \rightarrow \min$$

Długość krzywej





$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dy = y'(x) \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Model matematyczny (cont.)

Zasada zachowania energii – empiryczne prawo fizyki, stwierdzające, że w układzie izolowanym *suma wszystkich rodzajów energii układu jest stała*

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y(a) - y(x))$$

$$v = \sqrt{2g(y(a) - y(x))}$$

$$J\left(y\left(x\right)\right) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y(a) - y(x))}}dx$$

$$\mathrm{A} = (0,0)$$

$$\boxed{J = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}}dx \to \min}$$

$$F\left(x, y\right) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y(a) - y(x))}}$$

Brachistochrona. Rozwiązanie

$$J = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y(a) - y(x))}}\,dx \qquad F(x, y) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y(a) - y(x))}}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy brachistochronę:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}k^2(t - \sin t)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos t)}$$

gdzie **k** to stała zależna od warunków brzegowych, czyli od punktów A i B.

Brachistochrona

$$F\left(y, y'\right) = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g \cdot y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Gdy F zależy od y i y' i nie zależy od x mamy

$$\boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C}$$

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g \cdot y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{2g \cdot y} \cdot \sqrt{1 + y'^2}} = C \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2g \cdot y} \cdot \sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$\left(1 + y'^2\right) y = C_0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C_0 - y}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

$$C_0 = \frac{1}{2g \cdot C^2} > 0$$

Brachistochrona

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{C-y}{y}},\ \ C>0$$

parametr

$$y(t)=\frac{C}{2}-\frac{C}{2}\cos t=C\cos^2\frac{t}{2}$$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=\sqrt{\frac{C\cos^2\frac{t}{2}}{C\sin^2\frac{t}{2}}}\Rightarrow\frac{C\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{x'(t)}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Rightarrow x'(t)=C\sin^2\frac{t}{2}$$

$$x'(t)=\frac{C}{2}(1-\cos t)\Leftrightarrow x(t)=\frac{C}{2}(t-\sin t)+C_1,$$

$$C_1=0,\ x(0)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)&=\frac{C}{2}(t-\sin t)\\ y(t)&=\frac{C}{2}(1-\cos t)\end{aligned}}$$

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

Rozwiązanie zagadnienia

x(T),y(T)->C,T

$$x(t)=\frac{C}{2}(t-\sin t)$$
$$y(t)=\frac{C}{2}(1-\cos t)$$

$$x(0)=\frac{C}{2}(0-\sin 0)=0$$
$$y(0)=\frac{C}{2}(1-\cos 0)=0$$

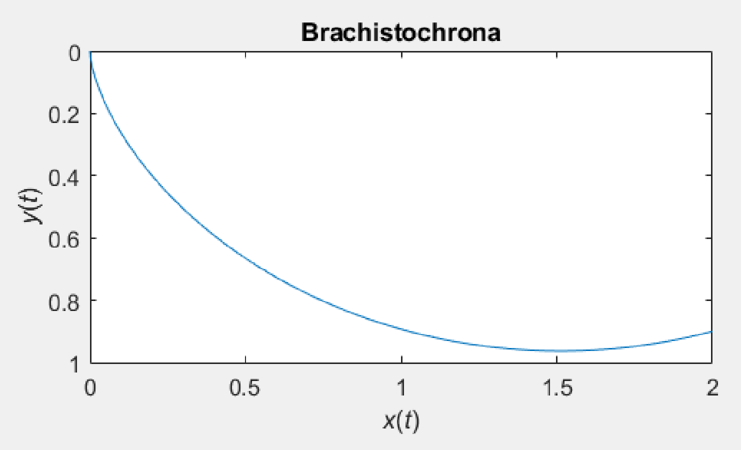
$$x(T)=\frac{C}{2}(T-\sin T)$$
$$y(T)=\frac{C}{2}(1-\cos T)$$

Brach.m

```
clear all
disp('Brachistochrona')
x2=2;
y2=0.9;
fprintf('Punkt prawy: y(%d)=%d\n',x2,y2)
eq1=['C1*(t2-sin(t2))=' num2str(x2)];
eq2=['C1*(1-cos(t2))=' num2str(y2)];
fprintf('System rownian:\n%s\n%s\n',eq1,eq2)
syms C1 t2;
eq1=C1*(t2-sin(t2))==x2;
eq2=C1*(1-cos(t2))== y2;

%Sol=solve(eq1,eq2,C1,t2);
Sol=vpasolve(eq1,eq2,C1,t2);

C1=eval(Sol.C1);
t2=eval(Sol.t2);
```



Główna cecha brachistochrony – najmniejszy czas

Functional equation: $\int_{x=0,\,y=0}^{x=a,\,y=-b} \frac{ds}{\sqrt{|y|}}$ minimal (expression coming from the fact that the speed of the moving body is proportional to $\sqrt{|y|}$).

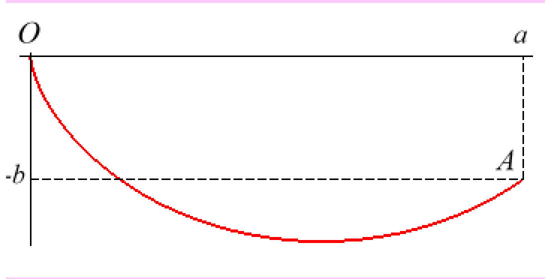
Differential equation (obtained by applying the Euler-Lagrange equation): $\frac{ds}{dx} = \frac{C}{\sqrt{|y|}}$.

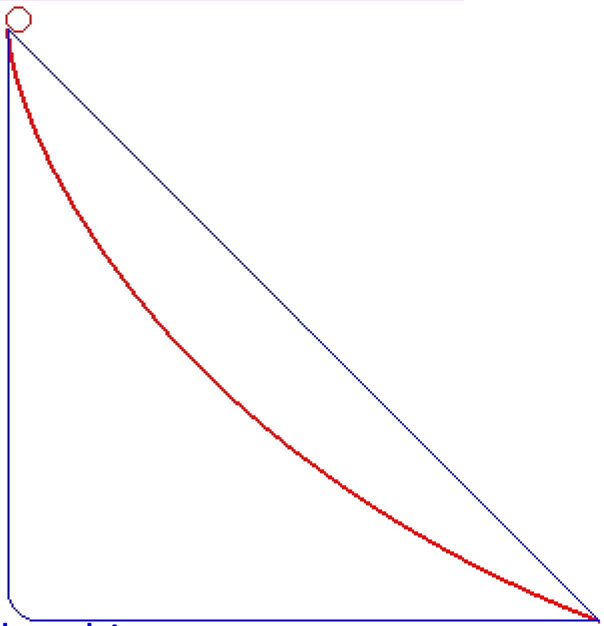
Movement: $\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(\cos\theta - 1) \end{cases}$, where $\theta = \sqrt{\frac{g}{R}}t$, and $R = \frac{C^2}{2}$ is defined by $\begin{cases} a = R(\Theta - \sin\Theta) \\ b = R(1 - \cos\Theta) \end{cases}$.

Travel time: $T = \sqrt{\frac{R}{g}}\Theta$ where Θ is defined above.

Travel time on a straight line: $T_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b}}$.

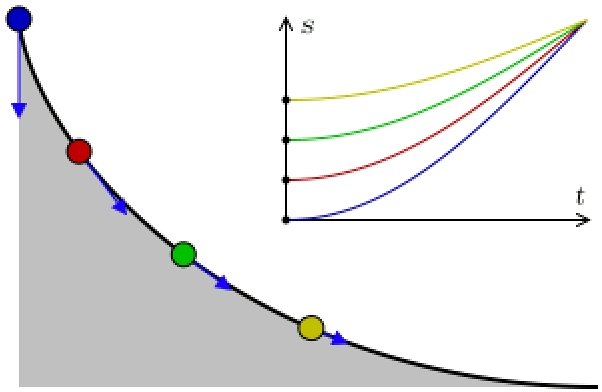
Travel time by the bent path: $T_2 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{b} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\right)$ ($T_1 < T_2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > \frac{3}{4}$).





https://mathcurve.com/courbes2d.gb/brachistochrone/brachistochrone.shtml

Tautochrona



Tautochrona (gr. ταυτος tautos, taki sam + χρονος chronos, czas) – **linia krzywa**, po której masa punktowa pod wpływem stałej siły ciężkości stacza się do najniższego punktu krzywej **w takim samym czasie, niezależnie od punktu startowego** na tej krzywej. Tautochrona jest odwróconą cykloidą

https://pl.wikipedia.org/wiki/Tautochrona_(fizyka)

Video od 22-ej minuty

https://www.youtube.com/watch?v=skvnj67YGmw