Teoria i metody optymalizacji

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
UMK http://fizyka.umk.pl/~osokolov/TMO/

Programowanie liniowe

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{(l+1)1}x_1 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

$$\min_{x} f(x),\ \begin{cases} c(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub, \end{cases}$$

fmincon

Przykład

Mała firma South American Coffee Ltd. (SAC Ltd.) produkuje na rynek polski cztery mieszanki kawy: *Northwest Passage Blend*, *Sunrise Blend*, *Harbormaster* oraz *French Expedition*. Każda mieszanka zawiera trzy podstawowe składniki: kawę brazylijska, kolumbijską i peruwiańską. Firma posiada ograniczone zapasy poszczególnych gatunków kawy. Popyt na każdą z mieszanek jest większy niż możliwości produkcyjne firmy SAC Ltd. Jak zaplanować produkcję poszczególnych mieszanek, aby uzyskać maksymalny zysk z ich sprzedaży?

Skład mieszanek kawy

Mieszanka	Kawa brazylijska [kg]	Kawa kolumbijska [kg]	Kawa peruwiańska [kg]	zysk [zł/kg]
Northwest Passage	2	4	4	80
Sunrise Blend	4	5	1	60
Harbormaster	3	3	4	40
French Expedition	7	2	1	50
zapas [kg]	800	640	600	

Ile kilogramów każdej z mieszanek należy wyprodukować z posiadanych zapasów surowca, aby **całkowity zysk ze sprzedaży był maksymalny**?

Model matematyczny

Oznaczmy przez x_1 ilość (w kilogramach) mieszanki Northwest Passage Blend planowaną do produkcji, x_2 - ilość mieszanki Sunrise Blend, x_3 - ilość mieszanki Harbormaste i przez x_4 ilość mieszanki French Expedition. Skoro zysk ze sprzedaży 1 kg kawy Northwest Passage Blend wynosi 80 zł, to łatwo obliczyć, że zysk ze sprzedaży wyprodukowanej ilosci wynosi $80x_1$ zł. Podobnie przeliczamy zysk dla pozostałych mieszanek. Całkowity zysk ze sprzedaży tych mieszanek obliczamy jako sumę zysków ze sprzedaży każdej mieszanki $z = 80x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4$. Zysk ten jest funkcją zmiennych decyzyjnych $x_i, i = 1, \ldots, 4$. Szukamy maksymalnej wartości tej funkcji, co zapisujemy następująco:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4 \longrightarrow \text{max}$$

Ograniczenia

Wartość zysku, który firma SAC Ltd. może uzyskać jest jednak ograniczona od góry ze względu na ograniczone zapasy kawy. Ograniczenia te formułujemy osobno dla każdego gatunku kawy. Ilość kawy brazylijskiej we wszystkich mieszankach nie może przekroczyć 80 kg.

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_x + 7x_4 \leqslant 800$$

Podobnie budujemy ograniczenia dla pozostałych gatunków kawy: kolumbijskiej i peruwiańskiej

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_x + 2x_4 \leqslant 640$$

$$4x_1 + x_2 + 4x_x + x_4 \leqslant 600$$

$$x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, 4$$

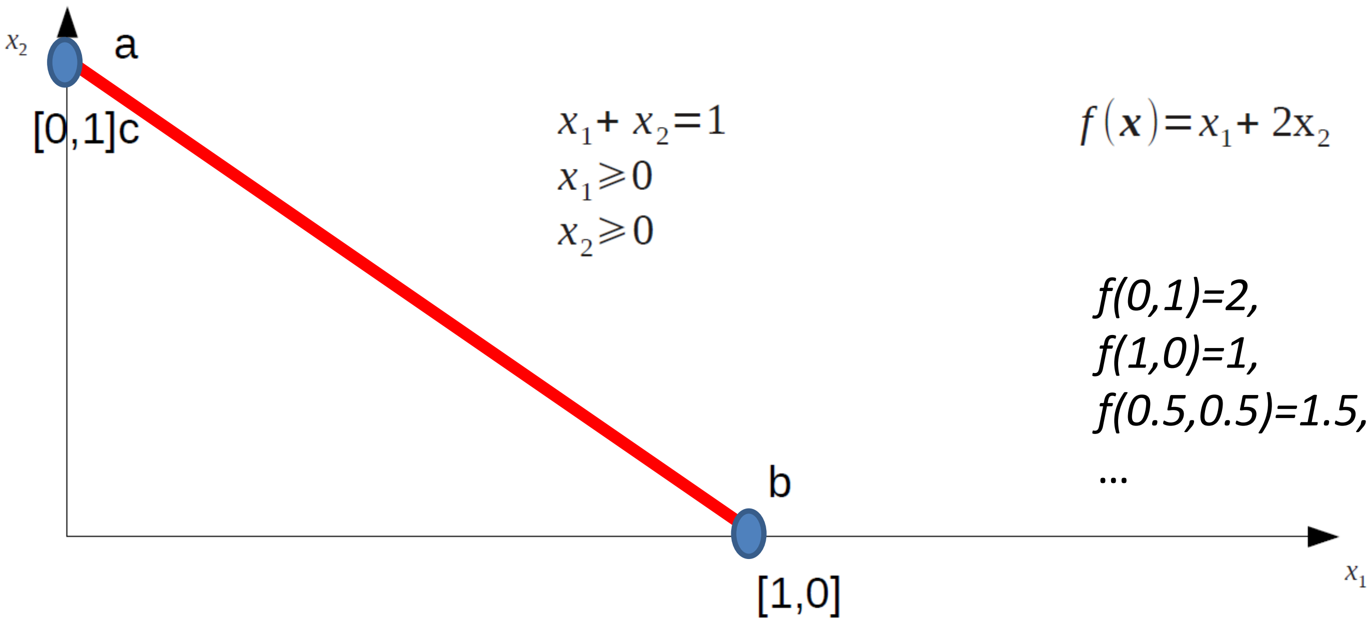
Metoda graficzna

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Przykład



$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

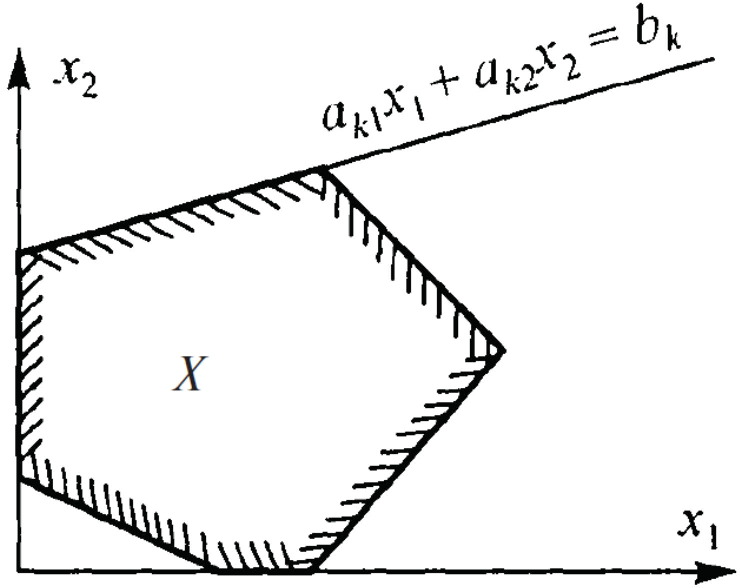
$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2$$

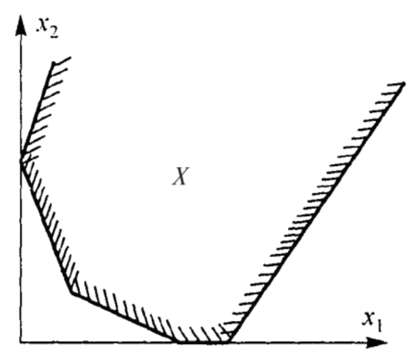
f(0,1)=2,
f(1,0)=1,
f(0.5,0.5)=1.5,
…

Cały odcinek [a,b] jest zbiorem **punktów dopuszczalnych**

Półpłaszczyzny

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$





$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min$$

Kierunek wzrostu/spadku funkcji

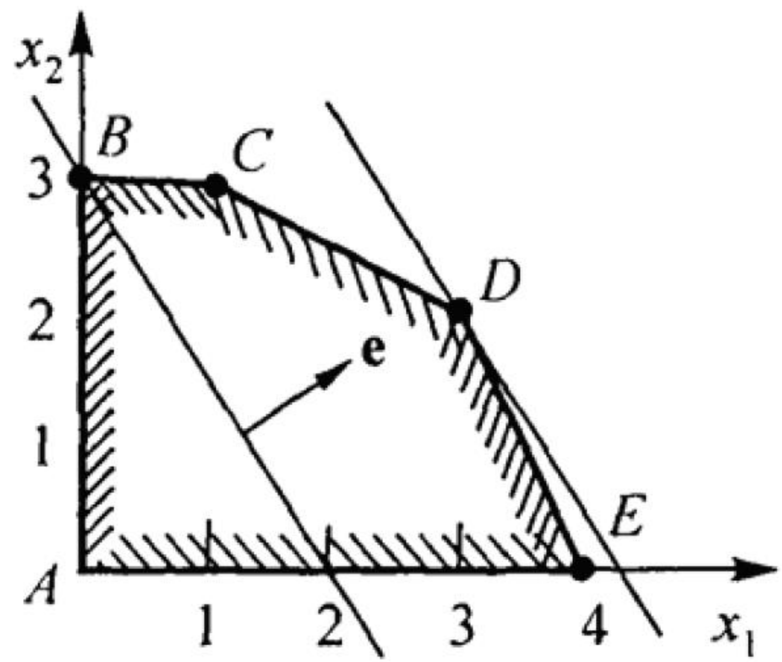
$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min$$

$$\nabla f(x) = \boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C = \mathrm{const}$$

Kierunek zmniejszenia funkcji

$$-\nabla f(x) = (-c_1, -c_2) = e$$



Przykład

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$$

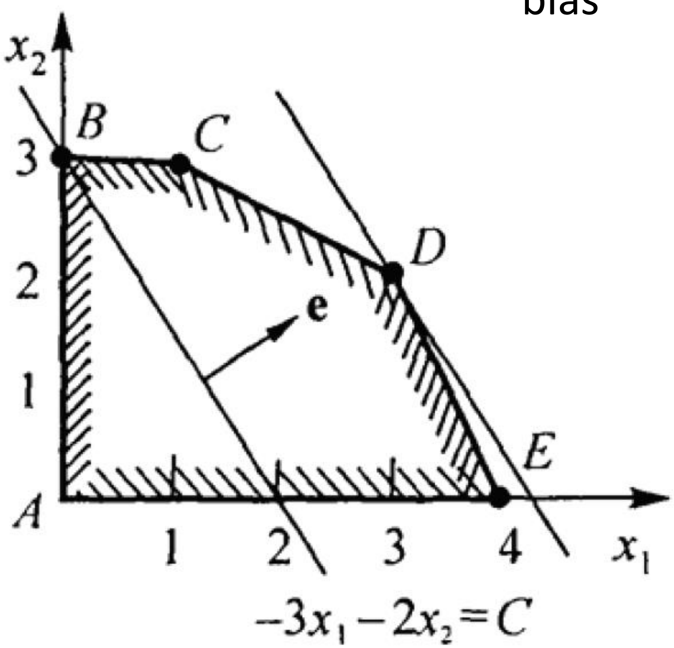
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Przykład (cd)

$$-3x_1 - 2x_2 = F$$

bias



$$-\nabla f(x) = (3,\ 2) = e$$

rozwiązanie

$$D = (3,\ 2)$$

$$f^* = f(x^*) = f(3,\ 2) = -13$$

Przykład 2

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min,$$

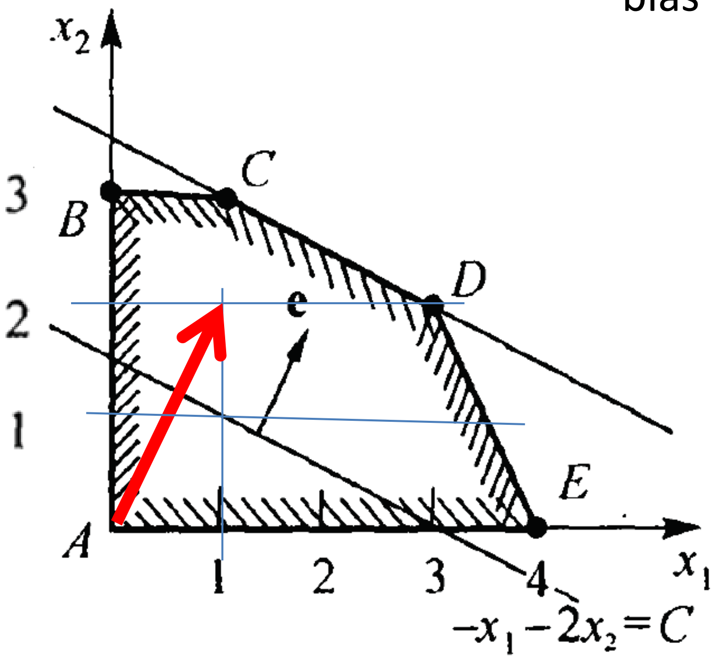
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Rozwiązanie

$$-x_1 - 2x_2 = C$$

bias



$$-\nabla f(x) = (1,\ 2) = e$$

$$x^* = \lambda(1,\ 3) + (1-\lambda)(3,\ 2) = (3-2\lambda,\ 2+\lambda)$$

$$\lambda \in [0,\ 1]$$

$$f^* = f(x^*) = -7$$

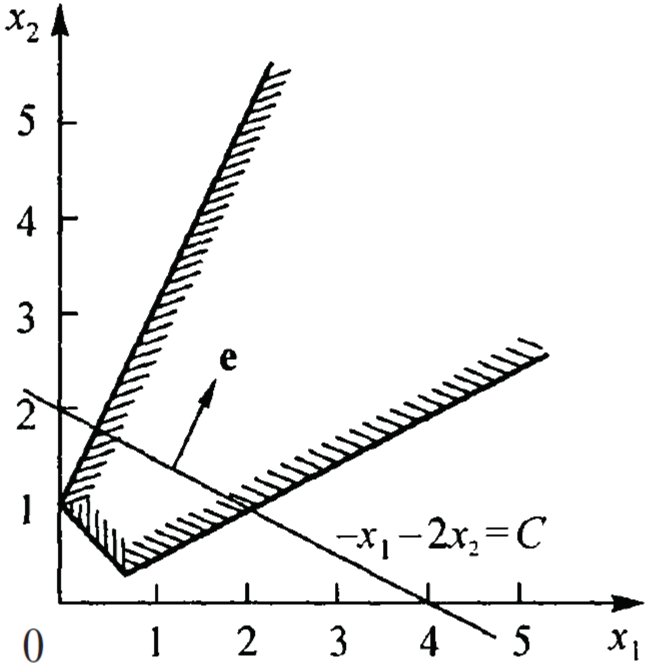
Przykład 3

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

$$-x_1 - 2x_2 = C$$



$$-\nabla f(x) = (1,\ 2) = e$$

Nie ma rozwiązania

Przykład 4

$$f(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min,$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = (c,\ x) \to \min, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{gathered}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rank(A)=4 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 = 50 - x_5, \\ x_3 = 30 - x_6, \\ x_4 = 60 - x_5 - x_6. \end{cases}$$

Przykład 4 (cd)

$$f(x) = 740 - 7x_5 + 7x_6 \to \min,$$

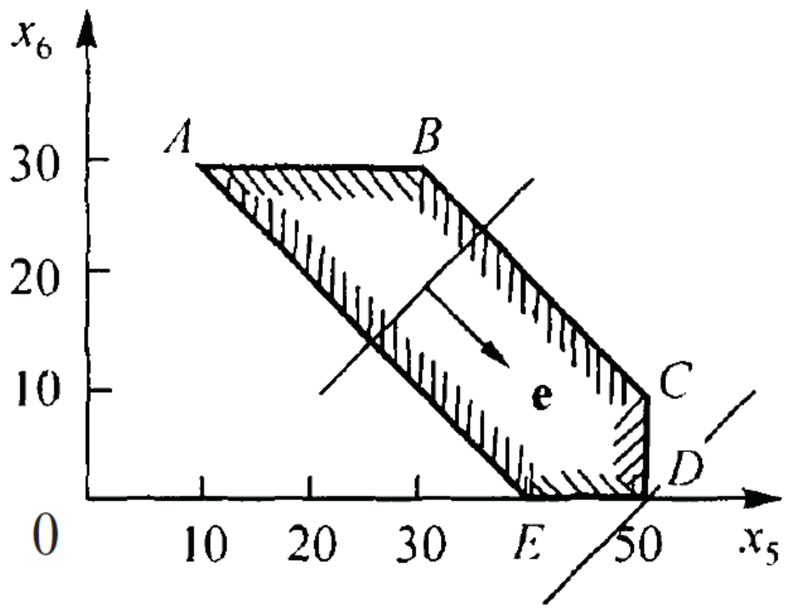
$$\begin{cases} x_5 + x_6 \geq 40, \\ x_5 \leq 50, \\ x_6 \leq 30, \\ x_5 + x_6 \leq 60, \end{cases}$$

$$x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Przykład 4 (cd)

$$-7x_5 + 7x_6 = C$$

$$-\nabla f(x) = (7,\ -7) = e$$



$$D = (50,\ 0)$$

Przykład 4 (cd)

$$x_5 = 50, x_6 = 0$$

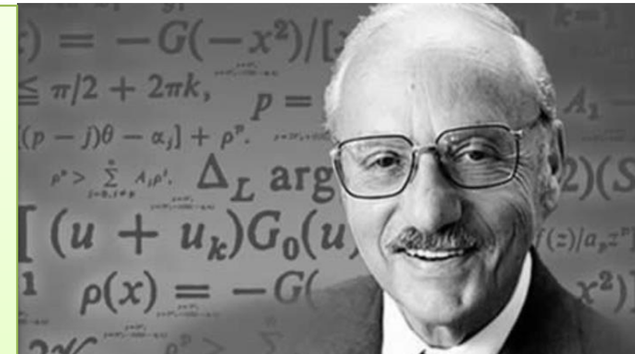
$$x^* = (10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0).$$

$$f^* = f(x^*) = f(10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0) = -390$$

Metoda sympleks

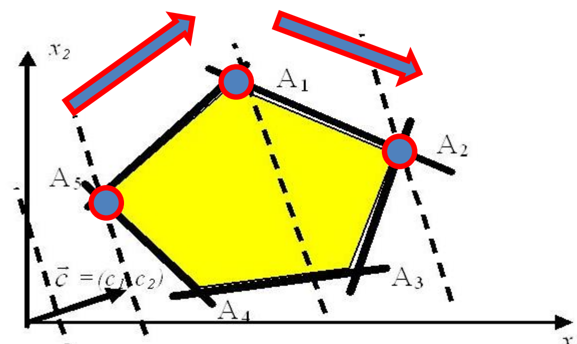
Istnieje kilka metod rozwiązywania zadań programowania liniowego. Najprostszą jest **metoda graficzna**, jednak jej praktyczne zastosowanie ogranicza się do zadań z dwiema zmiennymi decyzyjnymi. Drugą, najczęściej stosowaną metodą jest metoda sympleks, zaproponowana w roku 1947 przez Amerykanina George'a Dantziga. Metoda ta bazuje na własnościach zbiorów rozwiązań dopuszczalnych i wynikach algebry liniowej. Jej nazwa pochodzi od ***sympleksu***, *czyli figury liniowo wypukłej, jaką jest* ***zbiór rozwiązań dopuszczalnych*** *problemu programowania liniowego.*

W metodzie sympleks optimum jest poszukiwane **przez przemieszczanie się po punktach wierzchołkowych zbioru punktów dopuszczalnych.** Zbiór punktów dopuszczalnych przeszukiwany jest w uporządkowany sposób generując punkty x_1 , x_2 , x_k , o wartości funkcji celu **nie gorszej** niż w poprzednim punkcie.



George Bernard Dantzig

1914 — 2005



Metoda sympleks

-2***x1**+3***x2**-5***x3**->max

+2***x1**-3***x2**+5***x3**->min

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Jeżeli c_i<=0 to x_i=0 dla i=1,…,n   a c^Tx=max

Rzeczywiście, jeśli ci<= 0 dla wszystkich i, to dla x> =0 nie możemy liczyć na najlepszą (dodatnią) wartość funkcji celu. I odwrotnie**,**

jeśli ci> 0 dla jakiegoś i to możemy zwiększyć wartość funkcji celu zwiększając xi.

Można **przesunąć się wzdłuż jakiejś krawędzi**, **zwiększając pewne xi, dla którego ci> 0**. O ile możemy zwiększyć xi?
Dopóki nie napotkamy innego ograniczenia. Innymi słowy, sprawiamy, że jedna z nierówności definiujących wierzchołki xi>=0 będzie ścisła i zwiększamy xi, aż inna nierówność, która wcześniej była nierównością, zamieni się w równość. Co więcej, znowu mamy n równości, to znaczy **jesteśmy w nowym wierzchołku**.

Metoda sympleks (cd)

$$2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

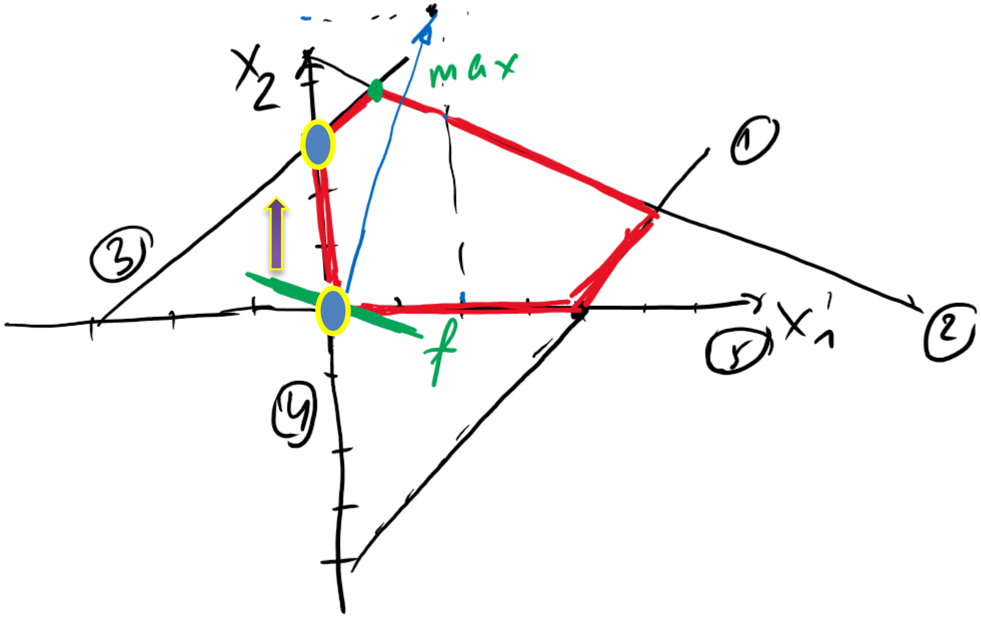
$$2x_1 - x_2 \leqslant 4 \qquad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \qquad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad (3)$$

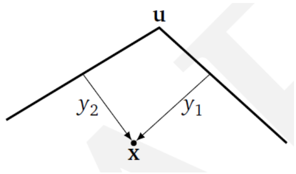
$$x_1 \geqslant 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geqslant 0 \qquad (5)$$



Metodę simpleks można uruchomić w **początku układu** , który jest określony przez ograniczenia 4 i 5. W przypadku przejścia „uwalniamy" ograniczenie x2> 0, przekształcając je z równości w ścisłą nierówność.
X2 wybieramy ponieważ f=2x1+**5**x2
Zwiększając x2, najpierw napotykamy ograniczenie —x1 + x2 <= 3 i dlatego musimy zatrzymać się na x2 = 3, w punkcie, w którym ta nowa nierówność zamienia się w równość. Nowy wierzchołek jest określony przez nierówności 3 i 4.

Metoda sympleks (cd)



W ten sposób robimy, jeśli jesteśmy w **początku układu** . Ale co, jeśli nasz aktualny wierzchołek **u** znajduje się gdzie indziej? Sprowadzamy ten przypadek do już rozważanego przy użyciu ***liniowej transformacji współrzędnych***. Jako nowe współrzędne wybieramy te same funkcje liniowe, które są używane w nierównościach definiujących punkt, przesunięte do zera. Innymi słowy, nowe współrzędne punktu x są proporcjonalne do odległości y1, ..., yn od punktu x do hiperpłaszczyzn, których przecięciem jest wierzchołek u:

Dokładniej, jeśli jedna z nierówności definiujących wierzchołek ma postać **ai*x<=b**
to odległość od punktu x do powierzchni odpowiadającej tej nierówności jest proporcjonalna do **yi=bi-ai*x**.
Otrzymujemy n funkcji liniowych **yi**, po jednej na każdy kres, a przejście z x do y można odwrócić i wyrazić xi jako funkcję liniową od yi. W ten sposób możemy przepisać cały program liniowy w zmiennych yi.
Otrzymujemy równoważny program liniowy (np. optymalna wartość pozostaje taka sama), ale napisane w innym układzie współrzędnych.

Metoda sympleks (cd)

1. Nowy program zawiera nierówności y >= 0, w których transformują się nierówności definiujące u.
2. Punkt u staje się początkiem współrzędnych przestrzeni y.
3. **Funkcja docelowa** staje się **cu + ct*y**, gdzie cu jest wartością docelową funkcja w u, a ct jest przekształconym wektorem współczynników funkcji celu w nowych współrzędnych.
W efekcie wróciliśmy do przypadku, z którym już wiemy, jak pracować!

Przykład

$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 4 \qquad ①$$

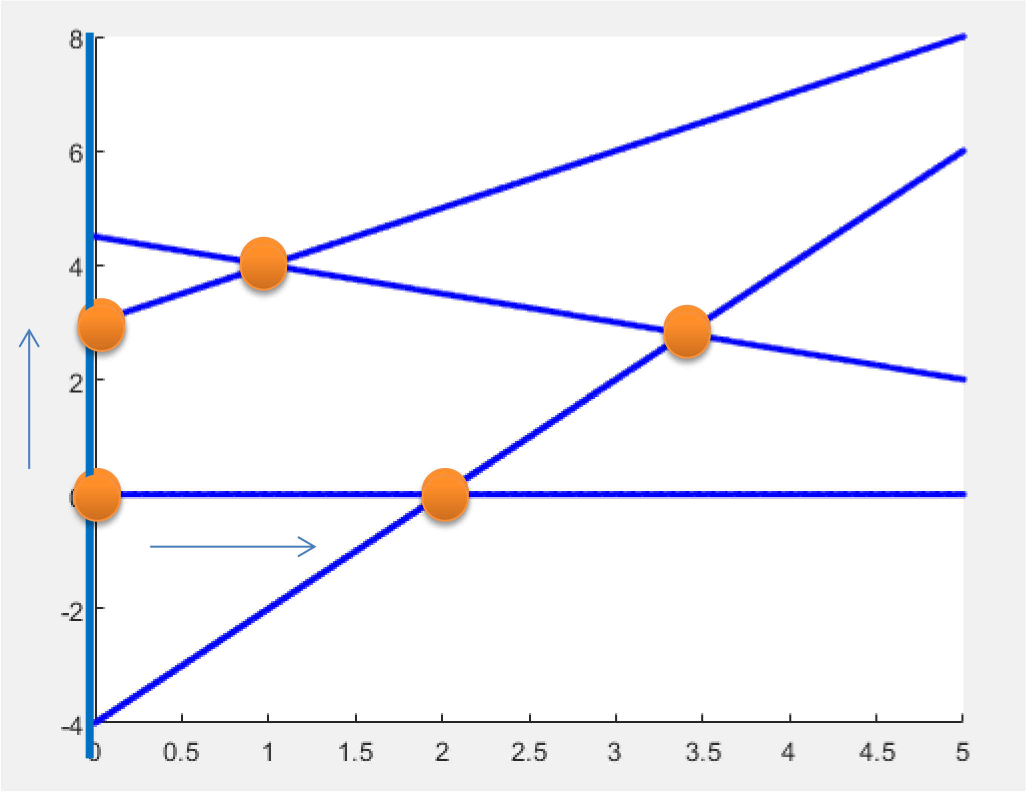
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \qquad ②$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad ③$$

$$x_1 \geqslant 0 \qquad ④$$

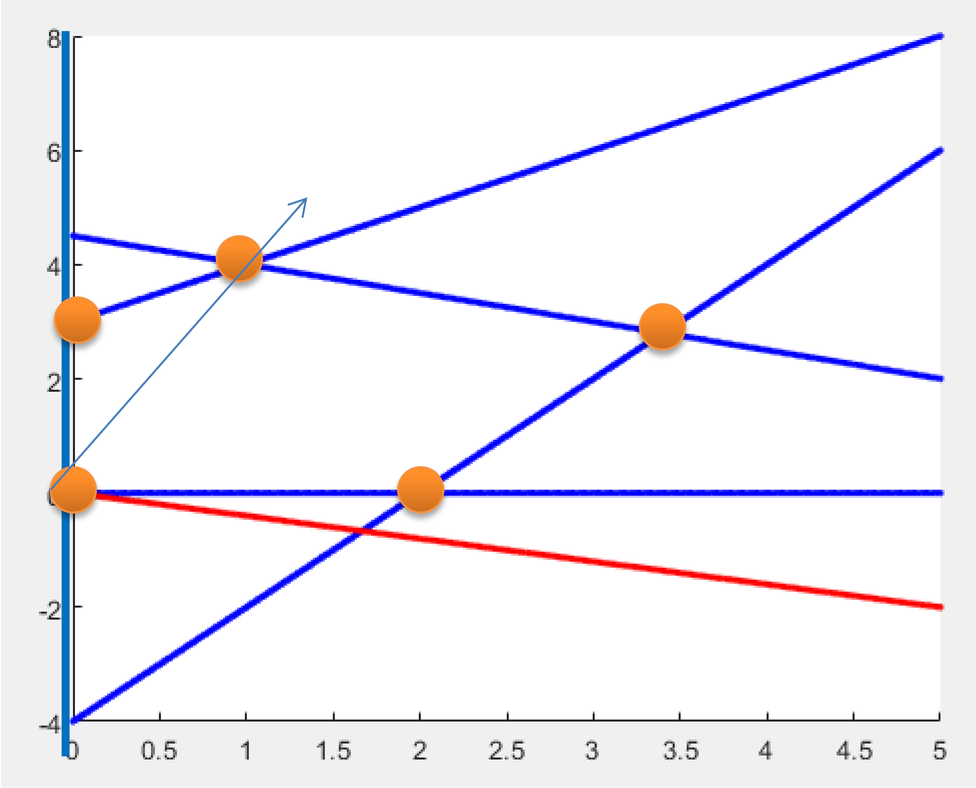
$$x_2 \geqslant 0 \qquad ⑤$$

Rozwiązanie. Metoda graficzna



$$2x_1 - x_2 \leqslant 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 3$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

Rozwiązanie. Metoda graficzna (cd)



$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 4 \qquad (1)$$

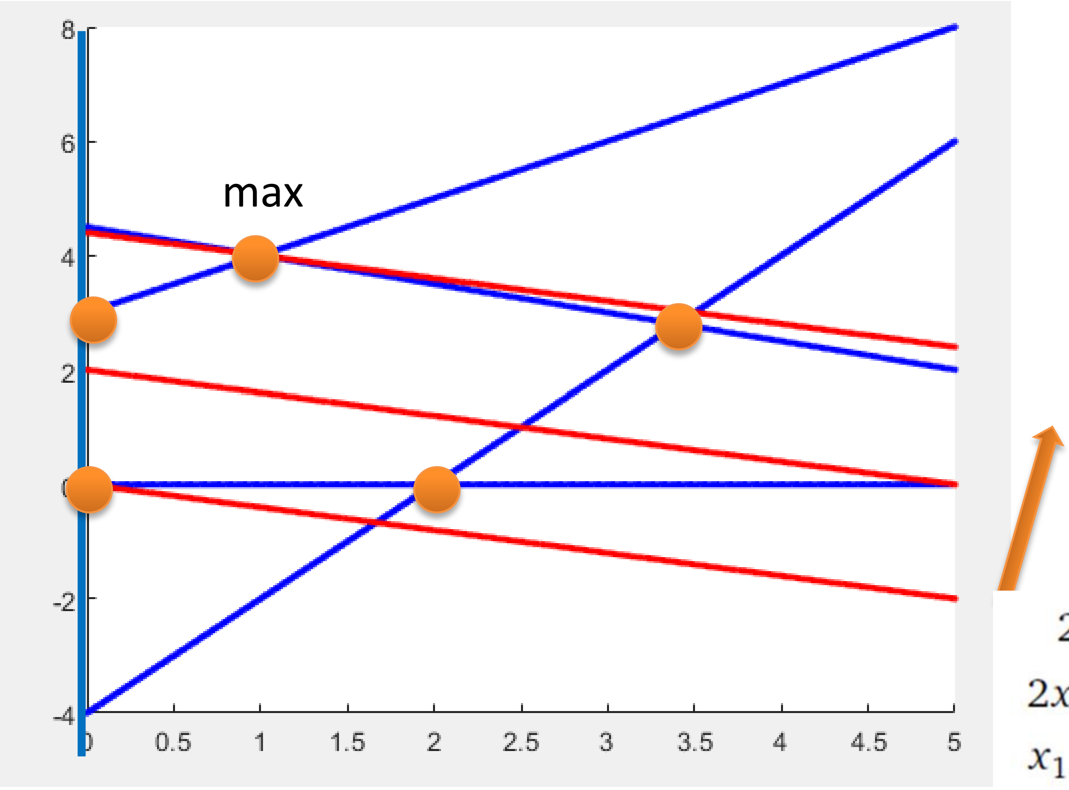
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \qquad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad (3)$$

$$x_1 \geqslant 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geqslant 0 \qquad (5)$$

Rozwiązanie. Metoda graficzna (cd)



$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 4 \qquad ①$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \qquad ②$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \qquad ③$$

$$x_1 \geqslant 0 \qquad ④$$

$$x_2 \geqslant 0 \qquad ⑤$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks

Krok 1

$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 \leqslant 4 \quad ①$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \quad ②$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 3 \quad ③ \longrightarrow x_2 = 3$$

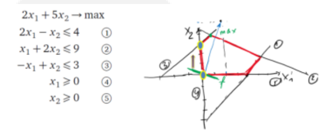
$$x_1 \geqslant 0 \quad ④$$

$$x_2 \geqslant 0 \quad ⑤$$

Punkt bieżący $\{④, ⑤\}$ f=0

Zmienne lokalne $\{④, ③\}$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = 3 + x_1 - x_2$$



Y2=0→x2=4

Krok 2

$$15 + 7y_1 - 5y_2 \to \max$$

$$y_1 + y_2 \leqslant 7 \quad ①$$

$$3y_1 - 2y_2 \leqslant 3 \quad ② \longrightarrow y_1 = 1$$

$$y_2 \geqslant 0 \quad ③$$

$$y_1 \geqslant 0 \quad ④$$

$$-y_1 + y_2 \leqslant 3 \quad ⑤$$

Punkt bieżący $\{④, ③\}$ f=15

Zmienne lokalne

$$z_1 = 3 - 3y_1 + 2y_2, \quad z_2 = y_2$$

Z1=0 z2=0, y1=1→y2=0

Krok 3

$$22 - \frac{7}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \to \max$$

$$-\frac{1}{3}z_1 + \frac{5}{3}z_2 \leqslant 6 \quad ①$$

$$z_1 \geqslant 0 \quad ②$$

$$z_2 \geqslant 0 \quad ③$$

$$\frac{1}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 \leqslant 1 \quad ④$$

$$\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \leqslant 4 \quad ⑤$$

Punkt bieżący $\{②, ③\}$ f=22

Wszystkie ci<0

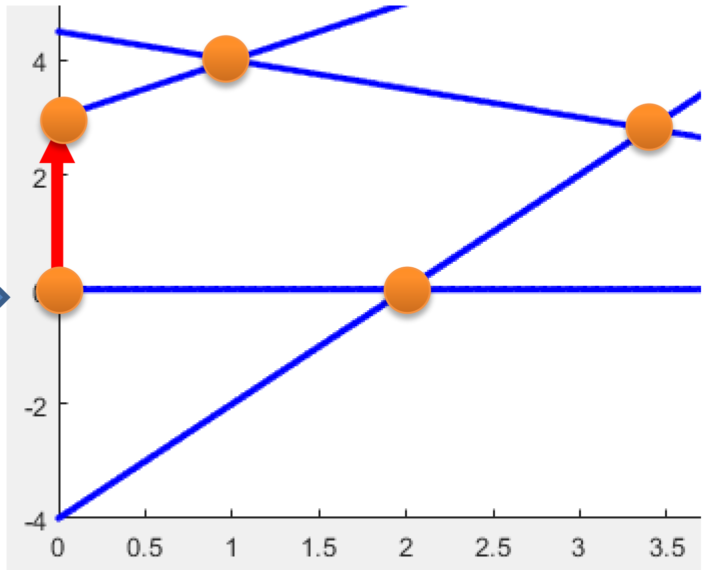
$$(x_1, x_2) = (1, 4)$$

2x1+5x2=22→x1=1(x1=y1)→x2=4

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Układ x1,x2

start



$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$
\begin{array}{rl}
2x_1 - x_2 \leqslant 4 & ① \\
x_1 + 2x_2 \leqslant 9 & ② \\
-x_1 + x_2 \leqslant 3 & ③ \longrightarrow x_2 = 3 \\
x_1 \geqslant 0 & ④ \\
x_2 \geqslant 0 & ⑤
\end{array}
$$

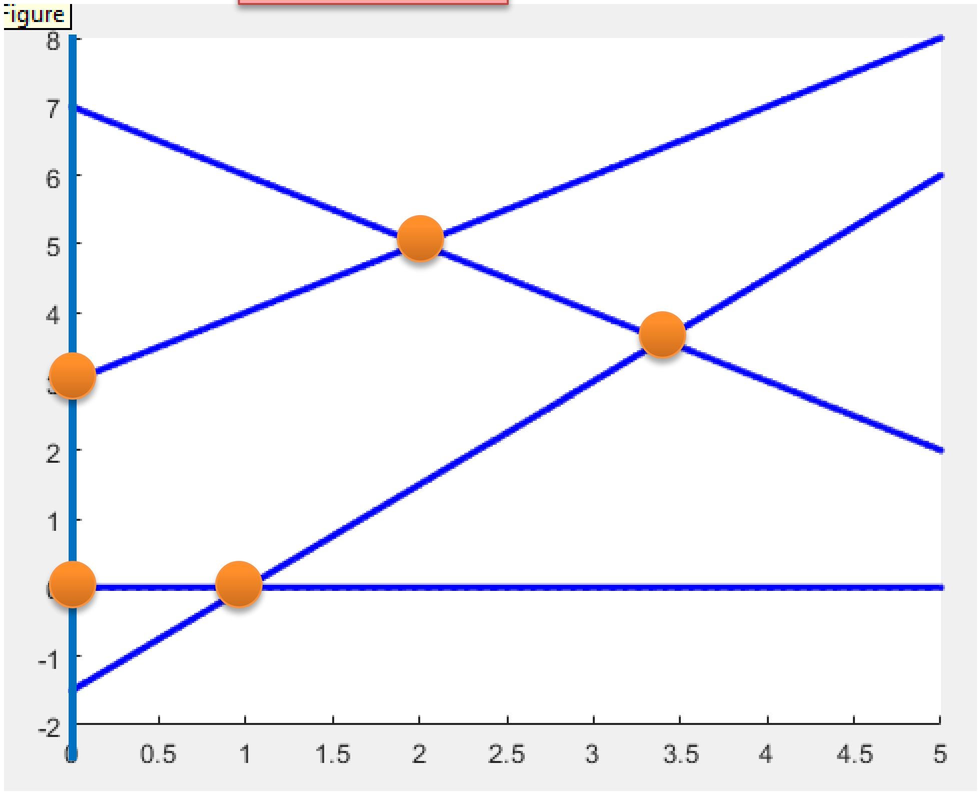
Punkt bieżący {④, ⑤} f=0

Zmienne lokalne {④, ③}

$y_1 = x_1, \quad y_2 = 3 + x_1 - x_2$

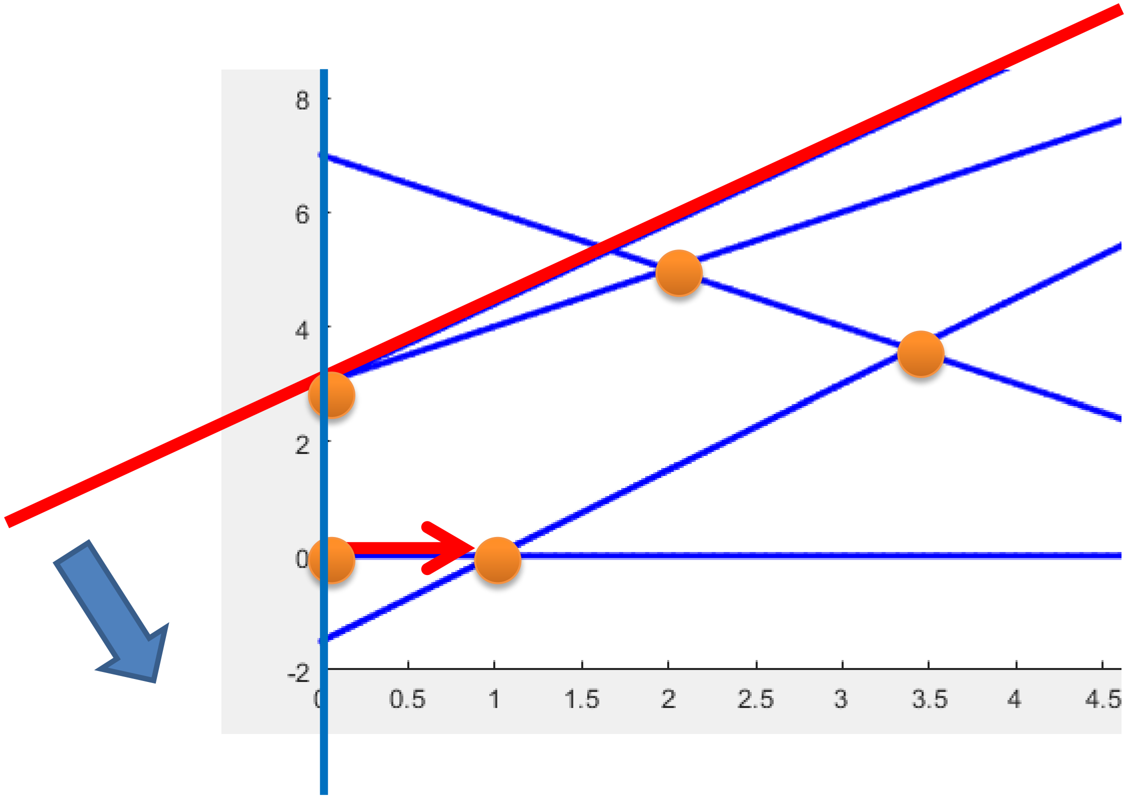
Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Układ y1,y2



$$y_1 + y_2 \leqslant 7$$
$$3y_1 - 2y_2 \leqslant 3$$
$$y_2 \geqslant 0$$
$$y_1 \geqslant 0$$
$$-y_1 + y_2 \leqslant 3$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)



$$15 + 7y_1 - 5y_2 \to \max$$

$y_1 + y_2 \leqslant 7$ ①

$3y_1 - 2y_2 \leqslant 3$ ② $\Longrightarrow y_1 = 1$

$y_2 \geqslant 0$ ③

$y_1 \geqslant 0$ ④

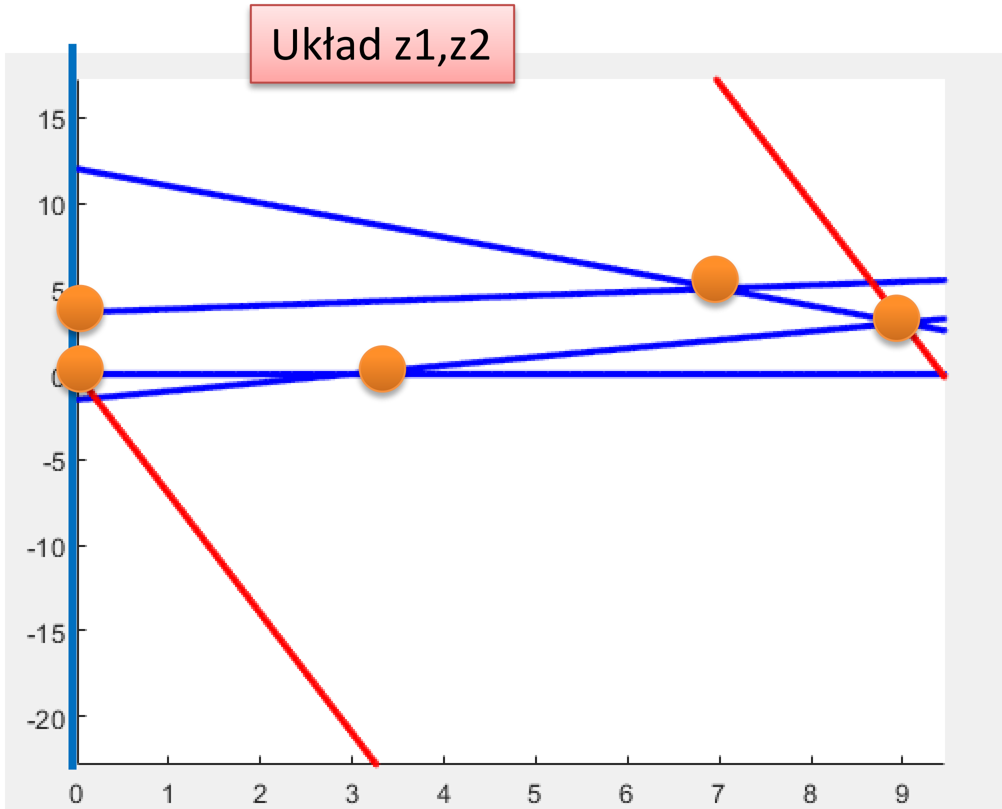
$-y_1 + y_2 \leqslant 3$ ⑤

Punkt bieżący {④, ③} f=15

Zmienne lokalne

$$z_1 = 3 - 3y_1 + 2y_2, \quad z_2 = y_2$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)



$$22 - \frac{7}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \to \max$$

$$-\frac{1}{3}z_1 + \frac{5}{3}z_2 \leqslant 6 \qquad (1)$$

$$z_1 \geqslant 0 \qquad (2)$$

$$z_2 \geqslant 0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 \leqslant 1 \qquad (4)$$

$$\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \leqslant 4 \qquad (5)$$

Fz(9,3)=0

Fz(0,0)=22

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Dodawanie nowych zmiennych

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &\to \max \\
2x_1 - x_2 &\leqslant 4 \\
x_1 + 2x_2 &\le 9 \\
-x_1 + x_2 &\leqslant 3 \\
x_1 &\geqslant 0 \\
x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
-2x_1 - 5x_2 &\to \min \\
2x_1 - x_2 + u_1 &= 4 \\
x_1 + 2x_2 + u_2 &= 9 \\
-x_1 + x_2 + u_3 &= 3 \\
x_1 &\geqslant 0 \\
x_2 &\geqslant 0 \\
u_1 &\geqslant 0 \\
u_2 &\geqslant 0 \\
u_3 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Jeden krok algorytmu

$$1)\, x_m \leftrightarrow u_n \;\; dla \;\; wybranego \;\; elementu \, a_{rs}$$

$$2)\, wybrany \;\; wiersz \div a_{rs}$$

$$3)\, wybrana \;\; kolumna - \left(\div a_{rs} \right)$$

$$4)\, a'_{ij} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}$$

$$5)\, a_{rs} \rightarrow \frac{1}{a_{rs}}$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Zastosowanie sympleks tablicy A

	X1	X2		
U1	2	-1	4	
U2	1	2	9	9/2
U3	-1	**1**	3	3/1
F	-2	**-5**	0	

min

Max |.|

$$-2x_1 - 5x_2 \to \min$$
$$2x_1 - x_2 + u_1 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + u_2 = 9$$
$$-x_1 + x_2 + u_3 = 3$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$
$$u_1 \geqslant 0$$
$$u_2 \geqslant 0$$
$$u_3 \geqslant 0$$

$X^0=(0,0,4,9,3)$

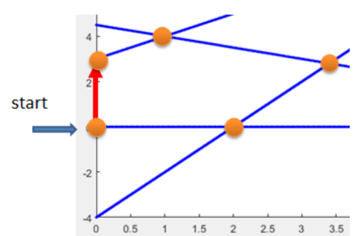
$1)\ x_m \leftrightarrow u_n\ \ dla\ \ wybranego\ \ elementu\ a_{rs}$

$2)\ wybrany\ \ wiersz \div a_{rs}$

$3)\ wybrana\ \ kolumna - (\div a_{rs})$

$4)\ a'_{ij} = \dfrac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}$

$5)\ a_{rs} \to \dfrac{1}{a_{rs}}$



$$2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$2x_1 - x_2 \leqslant 4$	①
$x_1 + 2x_2 \leqslant 9$	②
$-x_1 + x_2 \leqslant 3$	③
$x_1 \geqslant 0$	④
$x_2 \geqslant 0$	⑤

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

$$-2x_1 - 5x_2 \to \min$$
$$2x_1 - x_2 + u_1 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + u_2 = 9$$
$$-x_1 + x_2 + u_3 = 3$$

Zastosowanie sympleks tablicy

	X1	X2		
U1	2	-1	4	
U2	1	2	9	9/2
U3	-1	1	3	3/1
F	-2	**-5**	0	

min

Max |.|

$$1)\ x_m \leftrightarrow u_n \ \ dla\ \ wybranego\ \ elementu\ a_{rs}$$
$$2)\ wybrany\ \ wiersz \div a_{rs}$$
$$3)\ wybrana\ \ kolumna - (\div a_{rs})$$
$$4)\ a'_{ij} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}$$
$$5)\ a_{rs} \to \frac{1}{a_{rs}}$$

$$x_2 = 3 - u_3 + x_1$$
$$-2x_1 - 5(3 - u_3 + x_1) = -7x_1 + 5u_3 - 15 \to \min$$
$$2x_1 - (3 - u_3 + x_1) + u_1 = 4$$
$$x_1 + 2(3 - u_3 + x_1) + u_2 = 9$$

$$-7x_1 + 5u_3 - 15 \to \min$$
$$x_1 + u_3 + u_1 = 7$$
$$3x_1 - 2u_3 + u_2 = 3$$
$$-x_1 + u_3 + x_2 = 3$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Zastosowanie sympleks tablicy

	X1	U3		
U1	1*2-(-1)*(-1)=1	1	1*4-3*(-1)=7	
U2	1*1-(-1)*2=3	-2	1*9-2*3=3	3/3
X2	-1	1	3	
F	1*(-2)-(-1)*(-5)=-7	5	1*0-(-5)*3=15	

min

$$-7x_1 + 5u_3 - 15 \to \min$$
$$x_1 + u_3 + u_1 = 7$$
$$3x_1 - 2u_3 + u_2 = 3$$
$$-x_1 + u_3 + x_2 = 3$$

X^0=(0,0,4,9,3)

Max |.|

1) $x_1 \leftrightarrow u_1$
2) $x_{rs} \to \frac{1}{x_{rs}}$
3) wiersz $\div x_{rs}$
4) kolumna $-(\div x_{rs})$
5) $x'_{ij} = \frac{x_{rs} \cdot x_{ij} - x_{rj} x_{is}}{x_{rs}}$

$$15 + 7y_1 - 5y_2 \to \max$$
$$y_1 + y_2 \leqslant 7 \quad ①$$
$$3y_1 - 2y_2 \leqslant 3 \quad ②$$
$$y_2 \geqslant 0 \quad ③$$
$$y_1 \geqslant 0 \quad ④$$
$$-y_1 + y_2 \leqslant 3 \quad ⑤$$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Zastosowanie sympleks tablicy

	y1	y2		
	X1	U3		
U1	1	1	7	7/1
U2	3	-2	3	3/3
X2	-1	1	3	
F	-7	5	15	

min

Max |.|

$$1)\, x_m \leftrightarrow u_n \;\; dla \;\; wybranego \;\; elementu \; a_{rs}$$

$$2)\, wybrany \;\; wiersz \div a_{rs}$$

$$3)\, wybrana \;\; kolumna - (\div a_{rs})$$

$$4)\, a'_{ij} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}$$

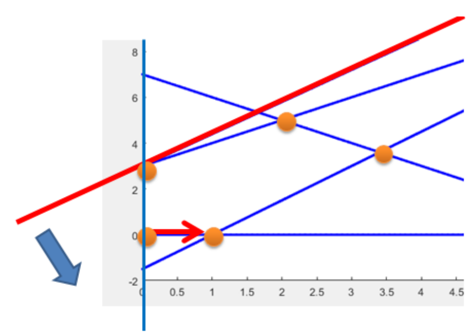
$$5)\, a_{rs} \to \frac{1}{a_{rs}}$$

$$-7x_1 + 5u_3 - 15 \to \min$$
$$x_1 + u_3 + u_1 = 7$$
$$3x_1 - 2u_3 + u_2 = 3$$
$$-x_1 + u_3 + x_2 = 3$$

$$x_1 = (3 - u_2 + 2u_3)/3$$
$$-7((3 - u_2 + 2u_3)/3) + 5u_3 - 15 \to \min$$
$$(3 - u_2 + 2u_3)/3 + u_3 + u_1 = 7$$
$$-(3 - u_2 + 2u_3)/3 + u_3 + x_2 = 3$$

$$\frac{7}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 - 22 \to \min$$
$$-\frac{1}{3}u_2 + \frac{5}{3}u_3 + u_1 = 6$$
$$\frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + x_2 = 4$$
$$\frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 + x_1 = 1$$

$X^1=(0,3,7,3,0)$



Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Zastosowanie sympleks tablicy

	z1	**z2**		
	U2	U3		
U1	-1/3	(1*3-(-2)*1)/3=5/3	(3*7-1*3)/3=6	
X1	**1/3**	-2/3	3/3=1	
X2	1/3	(3*1-(-1)*(-2))/3=1/3	(3*3-(-1)*3)/3=4	
F	**7/3**	(5*3-(-7)*(-2))/3=1/3	(3*15-(-7)*3)/3=22	

$$\frac{7}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 - 22 \to \min$$

$$-\frac{1}{3}u_2 + \frac{5}{3}u_3 + u_1 = 6$$

$$\frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 + x_1 = 1$$

$$\frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + x_2 = 4$$

$$22 - \frac{7}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \to \max$$

$$-\frac{1}{3}z_1 + \frac{5}{3}z_2 \leqslant 6 \qquad ①$$

$$z_1 \geqslant 0 \qquad ②$$

$$z_2 \geqslant 0 \qquad ③$$

$$\frac{1}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 \leqslant 1 \qquad ④$$

$$\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \leqslant 4 \qquad ⑤$$

$X^2=(1,4,6,0,0)$

Rozwiązanie. Metoda sympleks (cd)

Zastosowanie sympleks tablicy

	U2	U3		
U1	-1/3	5/3	6	
X1	**1/3**	-2/3	1	
X2	1/3	1/3	4	
F	**7/3**	1/3	22	

>0 - stop

$$\frac{7}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 - 22 \to \min$$

$$-\frac{1}{3}u_2 + \frac{5}{3}u_3 + u_1 = 6$$

$$\frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 + x_1 = 1$$

$$\frac{1}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + x_2 = 4$$

$X^2=(1,4,6,0,0)$

$$22 - \frac{7}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \to \max$$

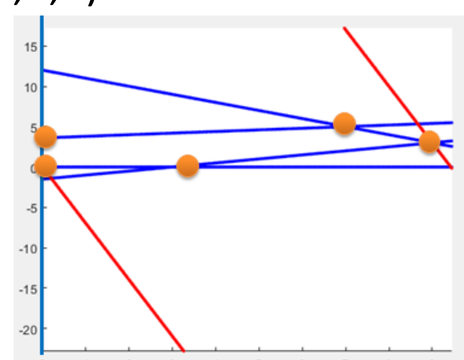
$$-\frac{1}{3}z_1 + \frac{5}{3}z_2 \leqslant 6 \quad (1)$$

$$z_1 \geqslant 0 \quad (2)$$

$$z_2 \geqslant 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 \leqslant 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \leqslant 4 \quad (5)$$



Przykład 1

Rozwiązać zagadnienie optymalizacji metodą graficzną (zrób graficzny symulator) i metodą sympleks (ręcznie i debugowanie w skrypcie nma_simplex.m)

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 - 2x_2 \le 1$$

$$-2x_1 + x_2 \le 2$$

$$2x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Przykład 2

Zbuduj model i rozwiąż metodą sympleks z zastosowaniem skryptu nma_simplex.m

W pewnym zakładzie (elektrownia, gazownia lub pogotowie ratunkowe) z powodów technologicznych konieczna jest stała obecność pracowników. Ze względu na zmienne natężenie realizowanego procesu liczba niezbędnych pracowników ulega zmianie. Można ją określić dla czterogodzinnych przedziałów czasu w czasie całej doby: godziny 0-4 – co najmniej 4 osoby, godziny 4-8 – co najmniej 18 osób, 8-12 – co najmniej 7, 12-16 – co najmniej 15, 16-20 – co najmniej 18, w przedziale 20-24 – co najmniej 6 osób.

Pracownicy przychodzą do pracy tylko o określonych godzinach (0, 4, 8, 12, 16 lub 20), a po przyjściu pozostają w pracy przez całą zmianę, która trwa równe 8 godzin.

Należy zbudować zadanie PL w celu uzyskania odpowiedzi na pytanie: jaka jest minimalna liczba pracowników niezbędnych do obsługi procesu produkcyjnego w ciągu doby?

Wskazówki

Zdefiniowanie zmiennej decyzyjnej:

x1 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 0,

x2 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 4,

x3 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 8,

x4 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 12,

x5 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 16,

x6 – liczba pracowników rozpoczynających pracę o godzinie 20.

https://linprog.com/

$$F(x) = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 \to \min$$

Enter the values of the system of constraints:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 \geq 4 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \geq 18 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \geq 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 \geq 15 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 \geq 18 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 1x_6 \geq 6 \end{cases}$$

Calculation of table elements:

Answer:

$F^* = 39$

$X^* = (14; 4; 3; 12; 6; 0)$

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& x_1 - 3x_2 = 6 \\
& x_1 + x_2 \ge 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{array}}
$$

(a) Standard form

$$
\begin{array}{ll}
\max & 6x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
& x_1 - 3x_2 = 6 \\
& x_1 + x_2 - e_3 = 1 \\
& x_1, x_2, s_1, e_3 \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & 6x_1 + x_2 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 & V \\
 & x_1 - 3x_2 = 6 & a_2 \\
 & x_1 + x_2 - e_3 = 1 & a_3 \\
 & x_1, x_2, s_1, e_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

(b) <u>Auxiliary problem</u>

$$
\begin{array}{ll}
\min & a_2 + a_3 \\
\text{s.t.} & -x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\
 & x_1 - 3x_2 + a_2 = 6 \\
 & x_1 + x_2 - e_3 + a_3 = 1 \\
 & x_1, x_2, s_1, e_3, a_2, a_3 \geq 0
\end{array}
$$