Teoria i metody optymalizacji

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
UMK http://fizyka.umk.pl/~osokolov/TMO/

Optymalizacja z ograniczeniami

$$\max_{x \in R^N} f(x) \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in D \subset R^N} f(x)$$

Zbiór D jest zbiorem punktów dopuszczalnych. Zbiór ten będziemy przedstawiać za pomocą

- ograniczeń w postaci równości **φ(x) = c** oraz
- ograniczeń w postaci nierówności **g(x) $\leq$ c**.

W przypadku ograniczeń w postaci nierówności, mówimy, że dane **ograniczenie jest aktywne** w punkcie dopuszczalnym x jeśli zachodzi g(x) = c.

W przeciwnym przypadku, tj. gdy g{x) < c mówimy, że **ograniczenie jest nieaktywne** w punkcie dopuszczalnym x.

Optymalizacja z ograniczeniami w postaci równości

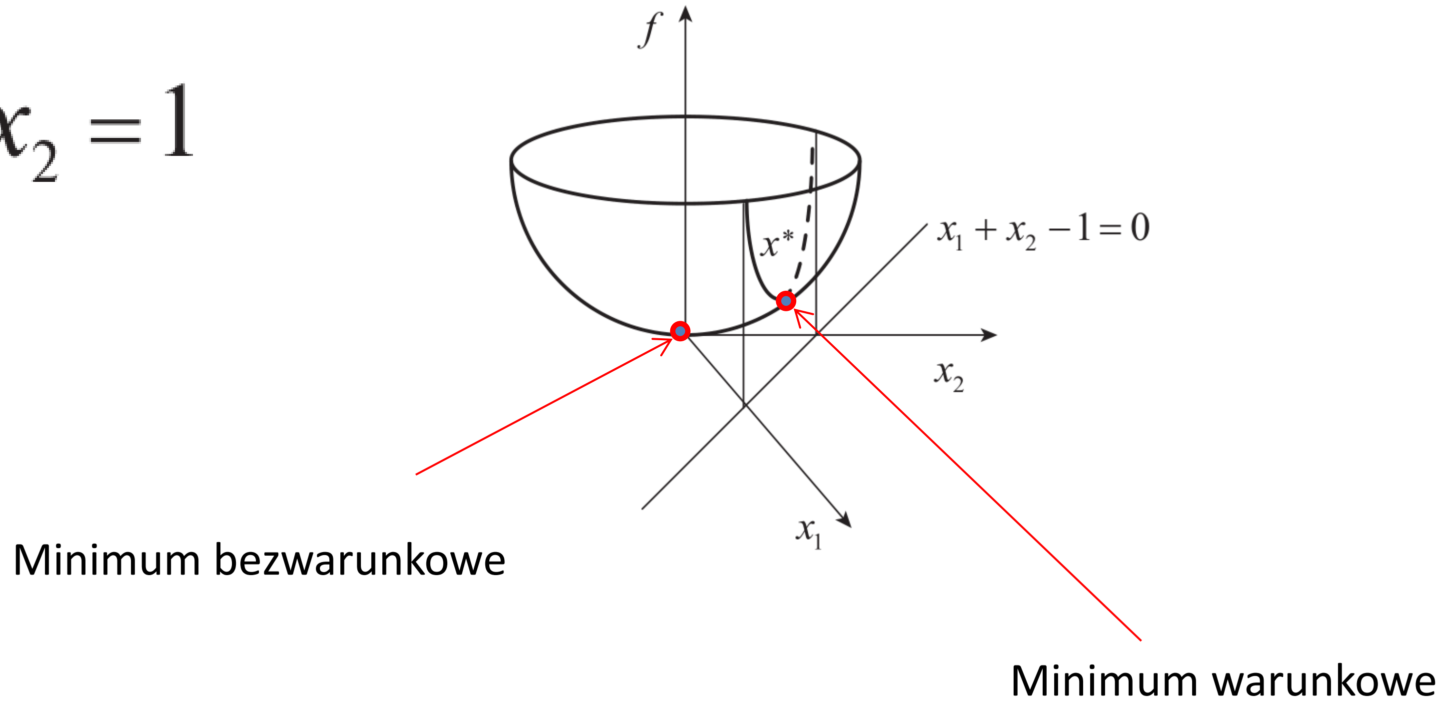
$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}}$$

$$\varphi_j(x) = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Przykład

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$



Ekstremum funkcji warunkowe. Metoda podstawiania

$$f\,(x_1, x_2)$$

$$c(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = h(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$f\,(x_1, x_2) = f\,[h(x_2), x_2]$$

Przykład

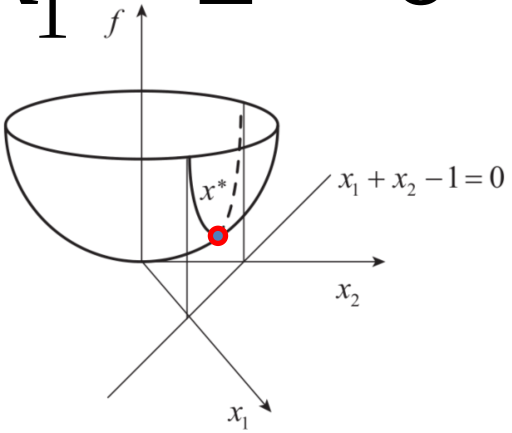
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad x_2 = 1 - x_1$$

$$\varphi(x_1) = x_1^2 + (1 - x_1)^2 = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 4x_1 - 2 = 0$$

$$x^*_1 = x^*_2 = 1/2$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx_1^2} = 4 > 0$$



$$f(x^*_1, x^*_2) = \frac{1}{2}$$

Przykład 2

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1}.$$

$$\|x\|^2 = 1$$

$$\|x\|^2 = x^T x = x_1^2 + x_2^2.$$

$x_1 = h(x_2)$

$$x_1 = \pm\sqrt{\|x\|^2 - x_2^2} = \pm\sqrt{1 - x_2^2}$$

$$f(x_2) = 1/[(\pm\sqrt{1 - x_2^2} - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1],$$

Przykład 2

$$f(x_2) = 1/[(\pm\sqrt{1-x_2^2}-1)^2 + (x_2-1)^2+1],$$

$$x^T = [0,707 \quad 0,707]$$

```
>> syms x2
fx2=1/ ((sqrt(1-x2^2)-1)^2 +(x2-1)^2+1);
fx2der=diff(fx2,x2)

fx2der =
 ((2*x2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) - 2*x2 + 2)/((x2 - 1)^2 + ((1 - x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^2
>>
digits(4)
>> x2=vpa(solve(((2*x2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) - 2*x2 + 2)/((x2 - 1)^2 + ((1 - x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^2==0))

x2 =

0.7071
```

```
>> x2=0.7071;
fx2der = ((2*x2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) - 2*x2 + 2)/((x2 - 1)^2 + ((1 - x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^2

fx2der =
  2.7947e-005
```

```
>> x1= sqrt(1-x2^2)

x1 =
   0.7071
```

Przykład 2 cd

```
>>
fx2derder=diff(fx2, 2)
fx2derder =
 ((2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) + (2*x2^2)/(x2^2 - 1) + (2*x2^2*((1 -
x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(3/2) - 2)/((x2 - 1)^2 + ((1 - x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^2 +
(2*((2*x2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) - 2*x2 + 2)^2)/((x2 - 1)^2 + ((1 -
x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^3

>>
x2=0.707;
fx2derder =sign(((2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) + (2*x2^2)/(x2^2 - 1) +
(2*x2^2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(3/2) - 2)/((x2 - 1)^2 + ((1 - x2^2)^(1/2) - 1)^2 +
1)^2 + (2*((2*x2*((1 - x2^2)^(1/2) - 1))/(1 - x2^2)^(1/2) - 2*x2 + 2)^2)/((x2 - 1)^2 + ((1 -
x2^2)^(1/2) - 1)^2 + 1)^3)

fx2derder =
   -1
```

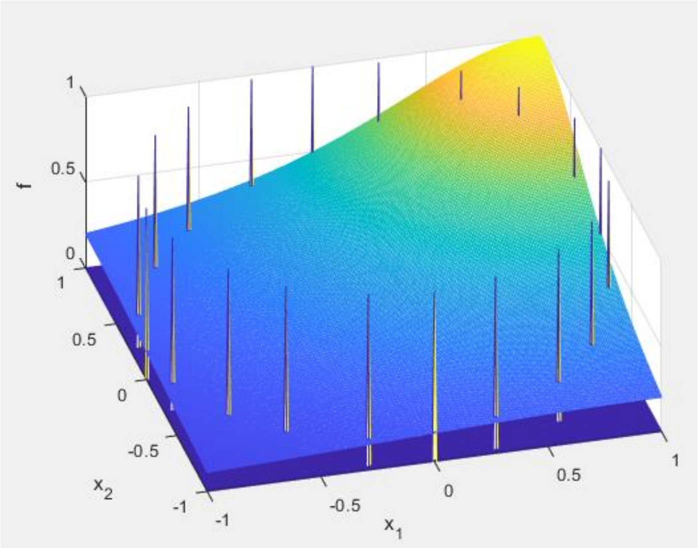
→ maksimum

```
>>
x1=0.707; x2=0.707;
fmax=1/((x1-1)^2+(x2-1)^2+1)
fmax =
    0.8535
```

Przykład 2 (cd)

$$x^T = [-0,707 \quad -0,707]$$

```
>>
x1=-0.707; x2=-0.707;
fmin=1/((x1-1)^2+(x2-1)^2+1)
fmin =
   0.1465
```

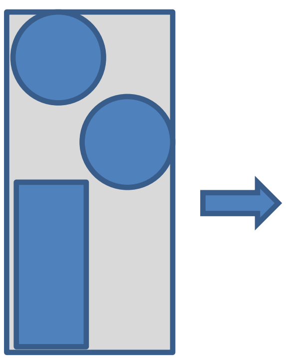



```
>>
[x1,x2]=meshgrid(-1:0.01:1);
f=1./((x1-1).^2+(x2-1).^2+1);
mesh(x1,x2, f)
hold on

f=1./((x1-1).^2+(x2-
1).^2+1).*(x1.^2+x2.^2==1);

f= (x1.^2+x2.^2==1);

mesh(x1,x2, f)
xlabel('x_1'), ylabel('x_2'), zlabel('f ');
```

Maksymalizacja objętości

Producent cylindrycznych pojemników chce **zmaksymalizować objętość** produkcji $\boldsymbol{V}$ dla danej powierzchni zastosowanego materiału $\boldsymbol{S_0}$.

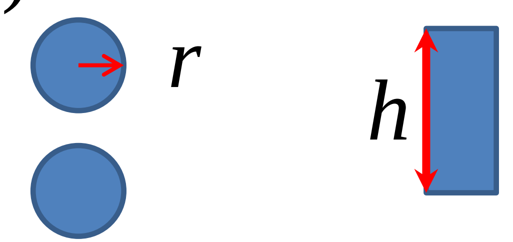
$\boldsymbol{S_0}$



$\boldsymbol{V}$

$$V(r,h)=\pi r^2 h \rightarrow \max$$

$$S(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh=S_0,$$



Metoda podstawiania

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = S_0,$$

$$V(r,h) = \pi r^2 h$$

$$h = (S_0 - 2\pi r^2)/2\pi r$$

$$V(r) = \pi r^2[(S_0 - 2\pi r^2)/2\pi r] = \frac{r}{2}S_0 - \pi r^3$$

Wyszukiwanie wyczerpujące

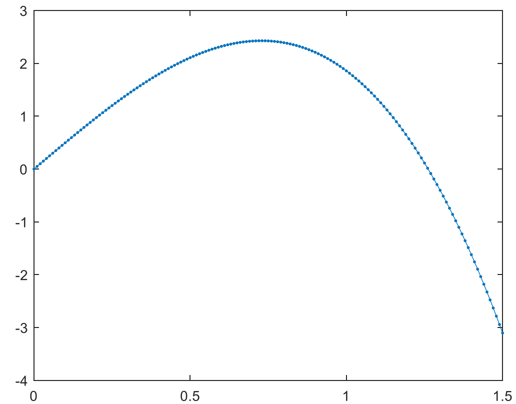
Wyszukiwanie wyczerpujące (ang. exhaustive search), metoda siłowa (ang. brute force) – metoda polegająca na analizie wszystkich potencjalnych rozwiązań zadania w celu wybrania tego, które spełnia warunki zadania

Redukcja zmiennych

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = S_0, \quad \Rightarrow \quad h = (S_0 - 2\pi r^2)/2\pi r$$

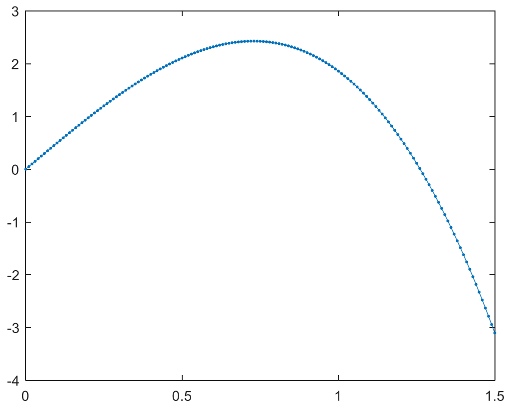
$$V(r,h) = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad V(r) = \pi r^2[(S_0 - 2\pi r^2)/2\pi r] = \frac{r}{2}S_0 - \pi r^3$$

```
S0=10;
V=[];
for r=0.:0.01:1.5
   puszka=r/2*S0-pi*r^3;
   V=[V;r puszka];
end;
plot(V(:,1),V(:,2),'.-')
```



Rozwiązanie analityczne

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{S_0}{2} - 3\pi r^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad r^* = \sqrt{S_0 / 6\pi}$$




```
>> r=sqrt(S0/(6*pi))
r=    0.7284
```

$$V(r^*) = \frac{r^*}{2} S_0 - \pi r^{*3}$$

```
>> V=S0/2-3*pi*r^3
V =    1.3582
```

$$h^* = (S_0 - 2\pi r^{*2}) / 2\pi r^* \quad \Rightarrow \quad h^* = \sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}}$$

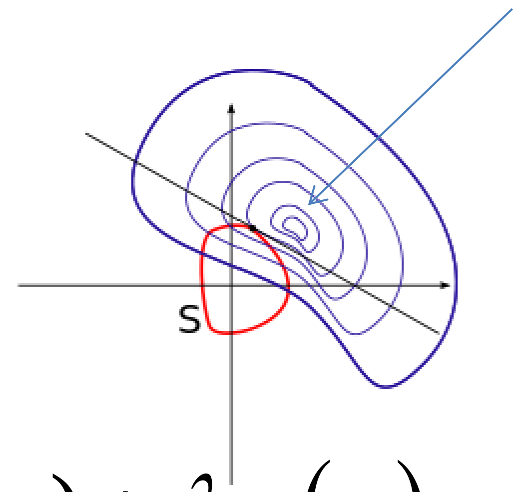
```
>> h=sqrt(2*S0/(3*pi))
h =    1.4567
```

$$q = \frac{h^*}{r^*} = \sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}} \Big/ \sqrt{S_0 / 6\pi} = \sqrt{4} = 2$$

Ciekawy praktyczny wynik

Metoda mnożników Lagrange'a

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}}$$



$$\varphi_j(x) = 0, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m$$

Utworzymy funkcję Lagrange'a $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x)$

$$L(x; \lambda) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

obliczamy

$$\frac{\partial L(x; \lambda)}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial L(x; \lambda)}{\partial \lambda_j}$$

$$\frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_1}=0,\qquad \frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_1}=0,$$

$$\frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_n}=0,\qquad \frac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_m}=0;$$

$$\downarrow$$

$$(x^*,\lambda^*)$$

Charakter ekstremum

znak $d^2 L(x^*; \lambda^*)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i, \; j = 1, 2, \ldots, m$$

$$dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + \ldots + dx_n{}^2 \neq 0$$

Przykład funkcji dwóch zmiennych i jednego aktywnego ograniczenia

$$f(x_1, x_2) \qquad c(x_1, x_2) = 0$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda c(x_1, x_2).$$

$$\partial L / \partial x = 0$$

$$\boldsymbol{\partial L / \partial \lambda = 0,}$$

$$x^T = [x_1 \quad x_2]$$

Metoda mnożników Lagrange'a

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = c(x_1, x_2) = 0.$$

⇒ $x_1(\lambda)$ $x_2(\lambda)$

$$c(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 0$$

⇓

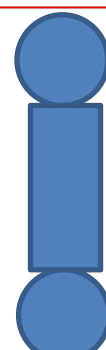
$$\lambda$$

Przykład maksymalizacji objętości

Producent cylindrycznych pojemników chce zmaksymalizować objętość produkcji V dla danej powierzchni zastosowanego materiału S_0.

$$V(r,h) = \pi r^2 h \rightarrow \max$$

$$S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = S_0,$$

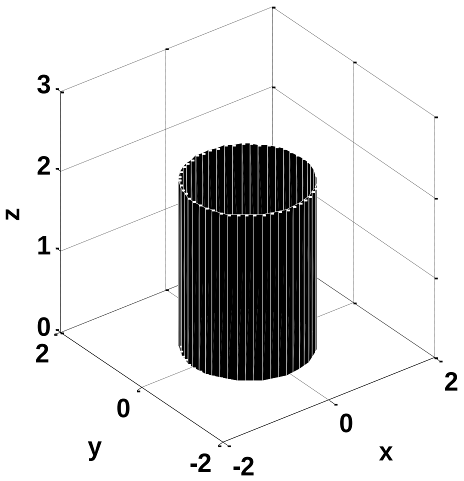


Przykład

Funkcja $V(r, h) = \pi r^2 h;$

Ograniczenie $\boldsymbol{c(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh - S_0,}$

Funkcja Lagrange'a $V^*(r, h) = \pi r^2 h + \lambda[2\pi r^2 + 2\pi rh - S_0].$



$$\frac{\partial V^*(r,h)}{\partial h} = \pi r^2 + 2\lambda\pi r = r^2 + 2\lambda r = 0;$$

$$\frac{\partial V^*(r,h)}{\partial r} = 2\pi rh + \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 2rh + \lambda(4r + 2h) = 0.$$

⇒ $r = -2\lambda; \quad h = -4\lambda$

$S_0 = 2\pi(-2\lambda)^2 + 2\pi(-2\lambda)(-4\lambda) = 8\pi\lambda^2 + 16\pi\lambda^2 = 24\pi\lambda^2.$ ⇒ $\lambda = \pm\sqrt{S_0 / 24\pi}.$

$$r = 2\sqrt{S_0 / 24\pi} = \sqrt{S_0 / 6\pi};\ h = 4\sqrt{S_0 / 24\pi} = \sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}},$$

Obliczenia symboliczne

```
syms r  h  lambda  S0
V=pi*r^2*h+lambda*(2*pi*r^2+2*pi*r*h-S0);
Vderh=diff(V,h);
 Vderr=diff(V,r);
eq1= r^2+2*lambda*r ;
eq2=2*r*h+lambda*(4*r+2*h);
[h,r]=solve(eq1,eq2,h,r)
```

```
h =
          0
 (-4)*lambda
 r =
          0
 (-2)*lambda
```

$$r = -2\lambda; \quad h = -4\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$r = -2\lambda; \quad h = -4\lambda = 2r = d.$$

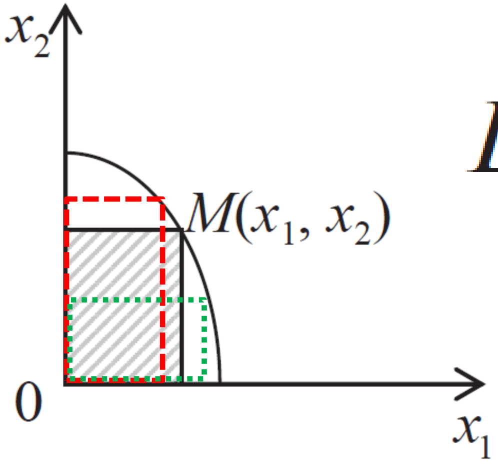
Przykład. Maksymalizacja pola prostokąta w zamkniętym obszarze

$$S(x) = S(x_1,\ x_2) = x_1 x_2 \longrightarrow \textbf{max}$$

ograniczenia

$$x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0$$



$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_2 + x_1{}^2 - 6)$$

Przykład (cd)

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_2 + x_1{}^2 - 6)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = x_1 + \lambda, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = x_2 + x_1{}^2 - 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2\lambda x_1 = 0, \\ x_1 + \lambda = 0, \\ x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1{}^* = \sqrt{2}, \\ x_2{}^* = 4, \\ \lambda^* = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Przykład (cd)

$$d^2L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial {x_1}^2}(dx_1)^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial {x_2}^2}(dx_2)^2 + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda^2}(d\lambda)^2 +$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda}dx_1 d\lambda + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial \lambda}dx_2 d\lambda\right)$$

Druga pochodna

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_2 + x_1{}^2 - 6)$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_1{}^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_2{}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda} = 2x_1,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial \lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1,\ x_2,\ \lambda)}{\partial x_2 \partial \lambda} = 1.$$

$$d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}(dx_1)^2 + 2(dx_1 dx_2 + 2\sqrt{2}dx_1 d\lambda + dx_2 d\lambda).$$

Z ograniczeń mamy $x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0,\ dx_2 + 2x_1 dx_1 = 0$

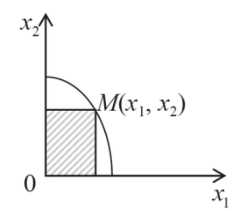
$$dx_2 = -2\sqrt{2}dx_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}(dx_1)^2 - 4\sqrt{2}(dx_1)^2 + $$
$$+ 4\sqrt{2}dx_1 d\lambda - 4\sqrt{2}dx_1 d\lambda = -6\sqrt{2}(dx_1)^2.$$

$$d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}(dx_1)^2 < 0 \Rightarrow x^* = (\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$$

Punkt maksimum

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = 4$$



Ekstrema warunkowe na przedziale domkniętym

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}} \qquad x_0 \in X \qquad X \subset R^n$$

Tw. Weierstrassa
Każda funkcja ciągła **na przedziale domkniętym** ma wartość najmniejszą i największą.

Aby znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f (x) w obszarze X:
- znajdź **punkty krytyczne** wewnątrz obszaru X, oblicz w nich wartości funkcji f (x);
- znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji f (x) na granicy obszaru X;
- porównaj znalezione wartości i wybierz spośród nich najwięcej największą i najmniejszą.

Przykład

$$f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$$

$$X : x_1^2 + x_2^2 \le a^2$$

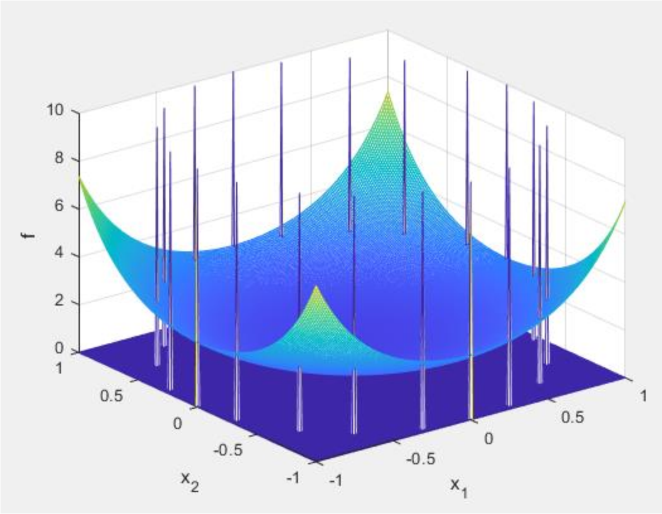
$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

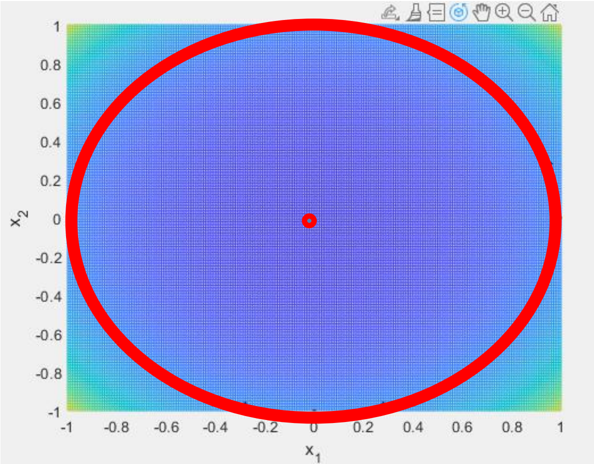
minimum

Przykład (cd)

```
[x1,x2]=meshgrid(-1:0.01:1.);
f=exp(x1.^2+x2.^2);

mesh(x1,x2, f)
hold on

f= (x1.^2+x2.^2==1).*10;

mesh(x1,x2, f)
xlabel('x_1'), ylabel('x_2'), zlabel('f ');
```



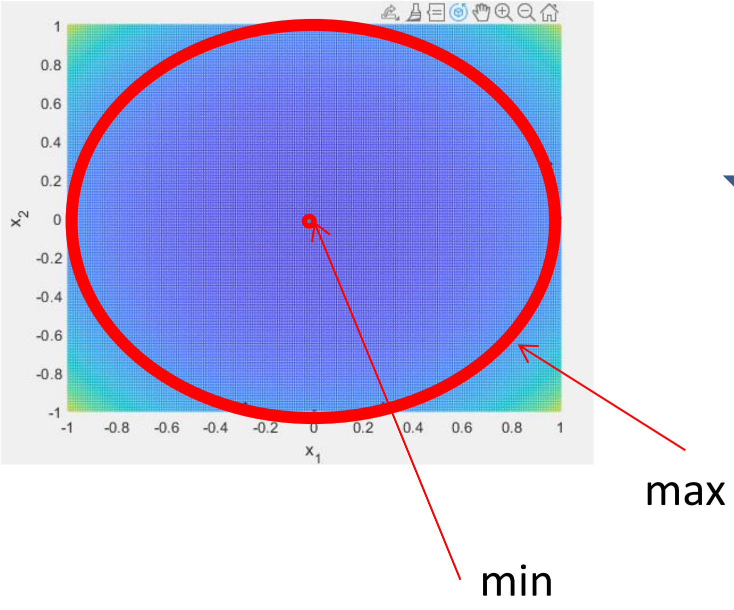
przykladOgraniczeniaOS2.m



Przykład (cd)

$$M_1(0,\ 0) \qquad f(M_1) = e^{0+0} = 1$$

$$\Gamma : x_1^2 + x_2^2 = a^2 \qquad f(x)\Big|_{x\in\Gamma} = e^{a^2}$$



$$f(x)\Big|_{x\in\Gamma} = e^{a^2}$$

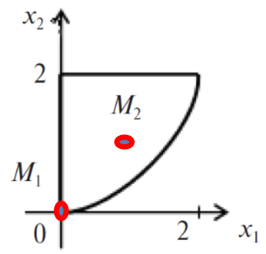
$$f(M_1) = e^{0+0} = 1$$

Przykład 2

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$$

W obszarze

$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \leq 2,$$
$$x_2 \geq \frac{x_1^2}{2}$$



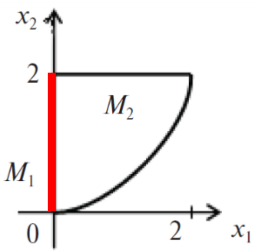
$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -6x_1 + 6x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow M_1(0,\ 0),\ M_2(1,\ 1)$$

W obszarze X mamy $f(M_2) = f_1(1,1) = -1$

Przykład2 (cd)

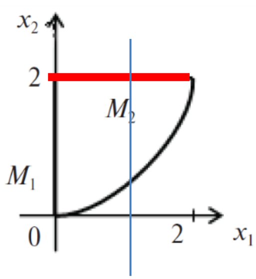
a)



$$\begin{cases} x_2 \in [0,\ 2], \\ x_1 = 0, \\ f(0,\ x_2) = 3x_2^2 \end{cases}$$ rosnąca

$$f_2(0,\ 0) = 0;\ f_3(0,\ 2) = 12;$$

b)



$$\begin{cases} x_1 \in [0,\ 2], \\ x_2 = 2, \\ f(x_1,\ 2) = 2x_1^3 - 12x_1 + 12, \end{cases}$$

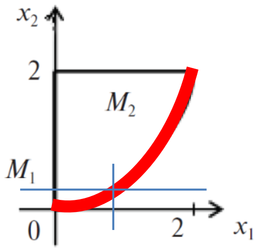
$$f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$\frac{df(x_1,\ 2)}{dx_1} = 6x_1^2 - 12 = 0;\ x_1 = \sqrt{2} \in [0,\ 2]$$

$$f_4(\sqrt{2},\ 2) = 12 - 8\sqrt{2};\ f_5(2,\ 2) = 4$$

Przykład 2(cd)

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1^2}{2}, \\ f\left(x_1, \dfrac{x_1^2}{2}\right) = \dfrac{3}{4}x_1^4 - x_1^3, \\ x \in [0,\ 2], \end{cases}$$



$$\frac{df}{dx} = 3x_1^3 - 3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^{(1)} = 0,\ x_1^{(2)} = 1.$$

$$f_6\left(1,\ \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

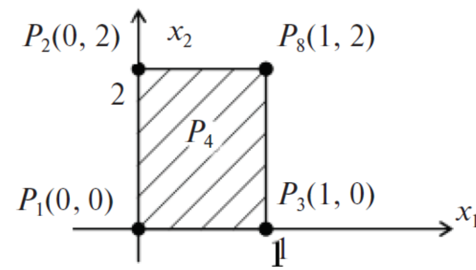
max $\quad f_3(0,\ 2) = 12$

min $\quad f_1(1,\ 1) = -1$

Przykład3

$$f(x)=f(x_1,\ x_2)=x_1x_2-x_1^2x_2-\frac{x_1x_2^2}{2}-3$$

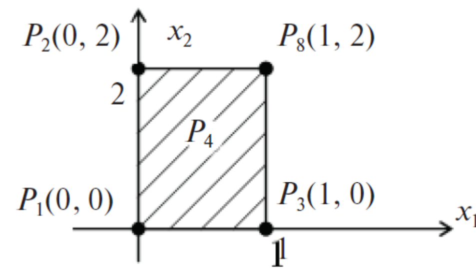
$$X:\quad 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 2$$



$$\nabla f(x_1,\ x_2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}=x_2-2x_1x_2-\dfrac{x_2^2}{2}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}=x_1-x_1^2-x_1x_2=0.\end{cases}$$

Przykład3 (cd)



$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{2} - 3$$

$$x_2 - 2x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_2 = 0, \\ x_2 \neq 0 \Rightarrow 1 - 2x_1 - \dfrac{x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - 4x_1 \end{array}\right.$$

$$x_1 - x_1^2 - x_1 x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_1 \neq 0 \Rightarrow 1 - x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right.$$

Możliwe jest 4 rozwiązania $P_1(0,\ 0),\ P_2(0,\ 2),\ P_3(1,\ 0),\ P_4\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

Punkt $P_4\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ jest w środku obszaru X

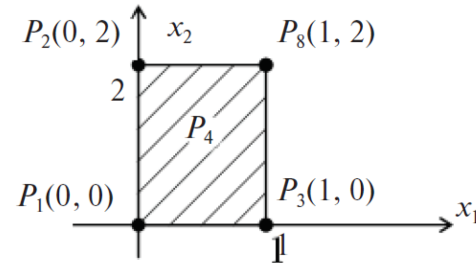
$$f(P_4) = f_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{4}{9} - 3 = -\frac{79}{27}$$

Przykład3 (cd)

granica

a)

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \in [0,\ 2], \\ f(0,\ x_2) = -3, \end{cases}$$



$$\frac{df(0,\ x_2)}{dx_2} = 0 \Rightarrow P_5 = (0,\ 0),\ P_6(0,\ 2)$$

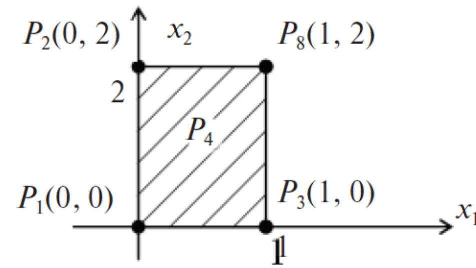
$$f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{2} - 3$$

Przykład 3 (cd)

granica

b)

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 \in [0,\ 2], \\ f(1,\ x_2) = -x_2^2 / 2 - 3, \end{cases}$$



$$\frac{df(1,\ x_2)}{dx_2} = -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow P_7(1,\ 0)$$

oraz $P_8(1,\ 2)$

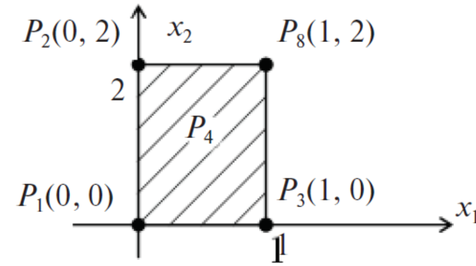
$$f_2(1,\ 0) = -3;\ f_3(1,\ 2) = -5$$

$$f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{2} - 3$$

Przykład3 (cd)

granica

c)
$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 \in [0,\ 1], \\ f(x_1,\ 0) = -3, \end{cases}$$



$$\frac{df(x_1,\ 0)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \quad P_9 = (0,\ 0),\ P_{10}(1,\ 0)$$

d)
$$\begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 \in [0,\ 1], \\ f(x_1,\ 2) = -2x_1^2 - 3, \end{cases}$$

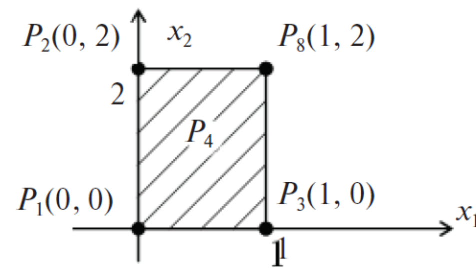
$$\frac{df(x_1,\ 2)}{dx_1} = -4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \quad P_{11} = (0,\ 2)$$

$$f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1x_2 - x_1^2x_2 - \frac{x_1x_2^2}{2} - 3 \quad f_4(0,2) = -3$$

Przykład3 (cd)

$$f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{x_1 x_2^2}{2} - 3$$

max $$f_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) = -\frac{79}{27}$$



min $$f_3(1, 2) = -5$$

Warunki Kuhna-Tuckera

Warunki konieczne istnienia ekstremum.

$$\min_{x \in R^n} F(x)$$
$$c_i(x) \leqslant 0, i = 1 \dots m$$
$$F(x), c_i(x) \in C^1$$

funkcja jest różniczkowalna, funkcja pochodna jest ciągła

Każdy punkt spełniający ograniczenia nazywany jest **punktem dopuszczalnym**. Celem **optymalizacji z ograniczeniami** jest znalezienie punktu dopuszczalnego, w którym minimalizowana funkcja osiąga przynajmniej lokalnie najmniejszą możliwą wartość.

Tw. Kuhna-Truckera

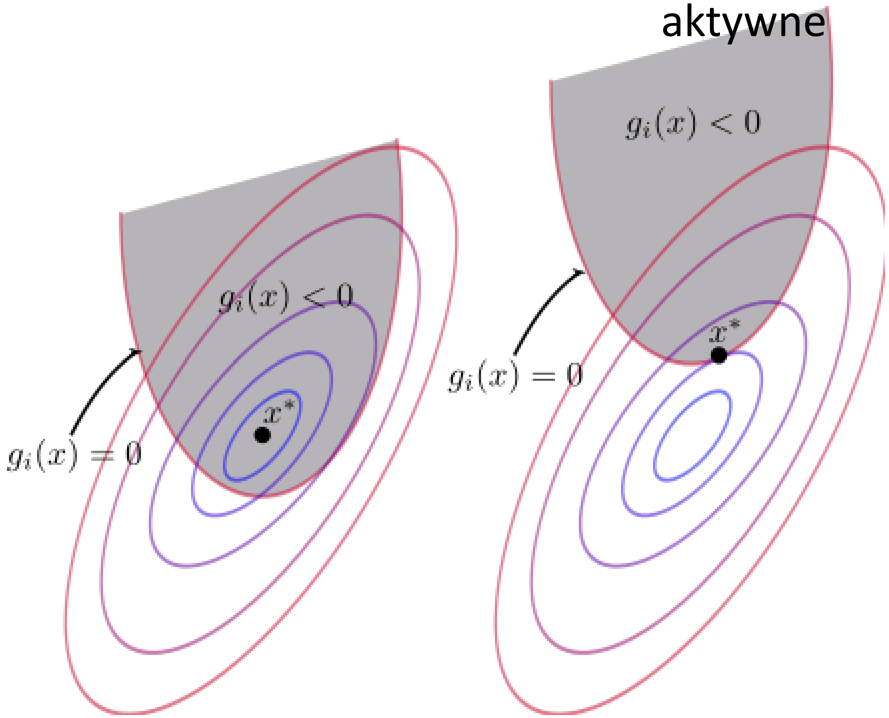
Jeśli w punkcie $\boldsymbol{x^o}$ funkcja $\boldsymbol{F(x^o)}$ osiąga minimum lokalne, to w punkcie tym istnieją mnożniki lambda spełniające warunki

$$L = F(x) + \sum_{j=1} \lambda_j c_j(x)$$

$\Rightarrow$

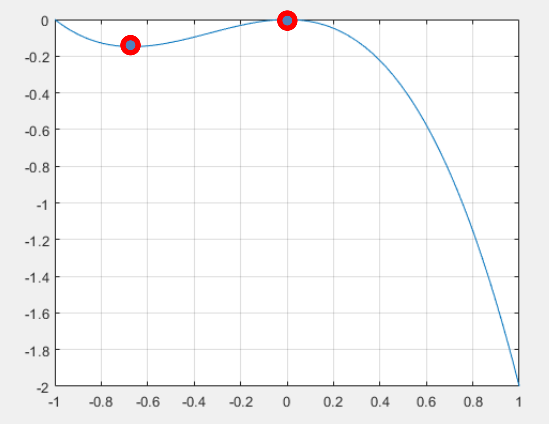
$$\nabla_x F(x^o) + \sum_i \lambda_i^o \nabla c_i(x^o) = 0$$
$$c_i(x^o) \leqslant 0$$
$$\lambda_i^o c_i(x^o) = 0$$
$$\lambda_i^o > 0$$

Ograniczenia aktywne i nieaktywne



W przypadku ograniczeń w postaci nierówności, mówimy, że dane ograniczenie jest **aktywne** w punkcie dopuszczalnym x jeśli zachodzi g(x) = c.
W przeciwnym przypadku, tj. gdy g{x) < c mówimy, że ograniczenie jest **nieaktywne** w punkcie dopuszczalnym x.

Przykład



Znaleźć minimum funkcji

$$-x^2-x^3$$

Przy ograniczeniu $\quad x^2 \leqslant 1$

Funkcja Lagrange'a ma postać

$$L(x,\lambda)=-x^2-x^3+\lambda(x^2-1)$$

Warunki KT

$$-2x-3x^2+2\lambda x=0$$
$$x^2 \leqslant 1$$
$$\lambda \geqslant 0$$
$$\lambda(x^2-1)=0$$

Przypadek 1: Ograniczenie nieaktywne $\quad \lambda=0, x^2-1\neq 0$

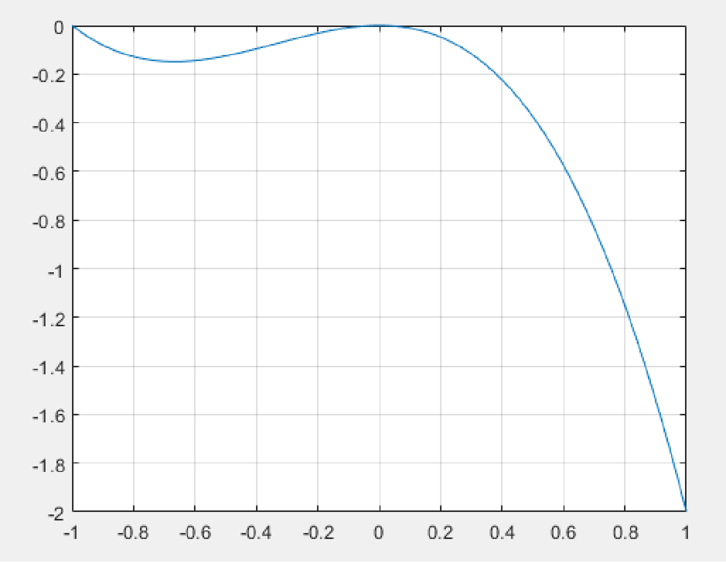
$$-2x-3x^2=0 \rightarrow x=-\frac{2}{3} \, lub \, x=0$$

Przypadek 2: Ograniczenie aktywne $\lambda \neq 0, x^2 - 1 = 0$

$$x^o = 1, \lambda = \frac{5}{2}$$

$$x^o = -1, \lambda = -\frac{1}{2} \left(warunek\ \lambda \geqslant 0\ nie\ spełniony \right)$$

Czyli rozwiązaniem są pary (0,0), (1,5/2), (-2/3,0).



Przypadek ograniczeń równościowych i nierównościowych

$$\min_{x \in R^n} F(\boldsymbol{x})$$
$$c_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i=1 \ldots m$$
$$g_j(\boldsymbol{x})=0, j=1 \ldots k$$
$$F(\boldsymbol{x}), c_i(\boldsymbol{x}), g_j(\boldsymbol{x}) \in C^1$$

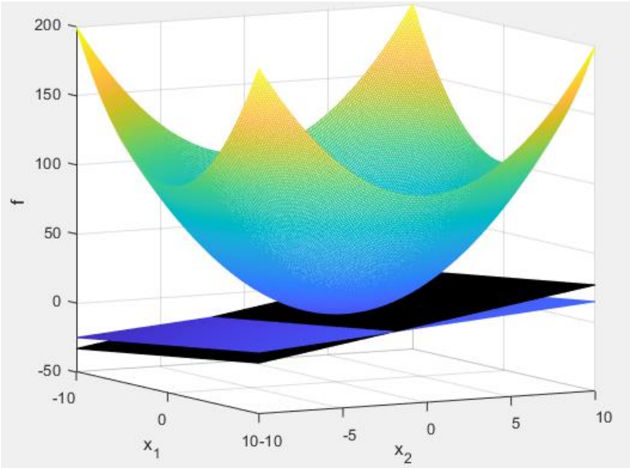
Warunki KT przyjmują postać

$$\nabla_x F(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{o}}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^o \nabla_{x_i} c_i(\boldsymbol{x}^o) + \sum_{i=1}^{k} \nu^o \nabla_{x_i} g_i(\boldsymbol{x}^o) = \boldsymbol{0}$$
$$c_i(\boldsymbol{x}^o) \leqslant 0$$
$$g_i(\boldsymbol{x}^o) = 0$$
$$\lambda_i^o c_i(x^o) = 0$$
$$\lambda_i^o > 0$$

Ograniczenia równościowe dopuszczają ujemną wartość mnożnika Lagrange'a.

Przykład

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{MIN}$$
$$x + y \geq 5,$$
$$x + 2y = 3.$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{MIN!},$$
$$g(x, y) = 5 - x - y \leq 0,$$
$$h(x, y) = x + 2y - 3 = 0.$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)^T,$$
$$\nabla g(x, y) = (-1, -1)^T,$$
$$\nabla h(x, y) = (1, 2)^T$$

Przykład (cd)

Łatwo sprawdzic, że wszystkie punkty, należące do zbioru dopuszczalnego są regularne. Niech (x^*, y^*) będzie rozwiązaniem naszego zadania. Rozważmy dwa przypadki:

I. $g(x)$ jest aktywne w (x^*, y^*).

Wtedy muszą zachodzić warunki Kuhna Tuckera:

$$u\,(-1,\,-1) + v\,(1,\,2) = -(2x,\,2y)$$
$$5 - x - y = 0,$$
$$x + 2y - 3 = 0,$$
$$u \geq 0.$$

$$x^* = 7,\; y^* = -2,\; u = 32,\; v = 18,$$
$$f(x^*,\, y^*) = 53.$$

Przykład (cd)

II. $g(x)$ nie jest aktywne w (x^*, y^*).

Warunki Kuhna Tuckera w tym przypadku przybiorą postać:

$$v\,(1,\,2) = -(2x,\,2y),$$
$$5 - x - y < 0,$$
$$x + 2y - 3 = 0.$$

Układ ten nie ma rozwiązania, gdyż pierwiastki układu, składającego się z pierwszego i trzeciego równania $x = \frac{3}{5}$ i $y = \frac{6}{5}$ nie spełniaj nierówności.

Tak więc rozwiązanie $x^* = 7$ i $y^* = -2$, jako jedyne, jest odpowiedzią w naszym zadaniu. ■

Funkcje optymalizacji w Matlabie

fminbnd

$$\min_x f(x), \; x_1 < x < x_2$$

fminbnd

Find minimum of **single-variable function** on fixed interval

The algorithm is based on golden section search and parabolic interpolation.

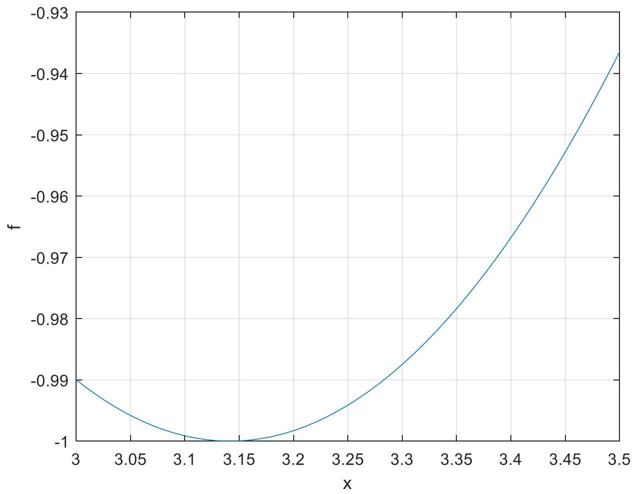
```
x = fminbnd(fun,x1,x2)
x = fminbnd(fun,x1,x2,options)
[x,fval] = fminbnd(...)
[x,fval,exitflag] = fminbnd(...)
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(...)
```

Przykład

$f(x) = \cos(x)$ $\quad 3 < x < 3{,}5$

```
%function fun = cosx(x)
fun = @(x)cos(x);
options=optimset('TolX',1e-12, 'Display','iter');

[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(fun,3,3.5, options)



% wykres
x=3:0.01:3.5;
f=cos(x);
plot(x,f)
xlabel('x'), ylabel('f')
grid on
```

Func-count	x	f(x)	Procedure
1	3.19098	-0.998781	initial
2	3.30902	-0.986017	golden
3	3.11803	-0.999723	golden
4	3.14156	-1	parabolic
5	3.14159	-1	parabolic
6	3.14159	-1	parabolic
7	3.14159	-1	parabolic
8	3.14159	-1	parabolic



output =
struct with fields:
iterations: 7
funcCount: 8
algorithm: 'golden section search, parabolic interpolation'
message: 'Optimization terminated:↵ the current x satisfies the termination criteria using OPTIONS.TolX of 1.000000e-12 ↵'

Iterations and Function Counts

R2020b

In general, Optimization Toolbox™ solvers iterate to find an optimum. A solver begins at an initial value x_0, performs some intermediate calculations that eventually lead to a new point x_1, and then repeats the process to find successive approximations x_2, x_3, ... of the local minimum. Processing stops after some number of iterations k.

You can limit the number of iterations or function counts by setting the `MaxIterations` or `MaxFunctionEvaluations` options for a solver using `optimoptions`. Or, if you want a solver to continue after reaching one of these limits, raise the values of these options. See Set and Change Options.

At any step, intermediate calculations can involve evaluating the objective function and any constraints at points near the current iterate x_i. For example, the solver might estimate a gradient by finite differences. At each nearby point, the function count (`F-count`) increases by one. The figure Typical Iteration in 3-D Space shows that, in 3-D space with forward finite differences of size delta, one iteration typically corresponds to an increase in function count of four. In the figure, e_i represents the unit vector in the ith coordinate direction.

Typical Iteration in 3-D Space

- If the problem has no constraints, the `F-count` reports the total number of objective function evaluations.
- If the problem has constraints, the `F-count` reports only the number of points where function evaluations took place, not the total number of evaluations of constraint functions. So, if the problem has many constraints, the `F-count` can be significantly less than the total number of function evaluations.

Sometimes a solver attempts a step and rejects the attempt. The `trust-region`, `trust-region-reflective`, and `trust-region-dogleg` algorithms count these failed attempts as iterations, and report the (unchanged) result in the iterative display. The `interior-point`, `active-set`, and `levenberg-marquardt` algorithms do not count failed attempts as iterations, and do not report the attempts in the iterative display. All attempted steps increase the `F-count`, regardless of the algorithm.

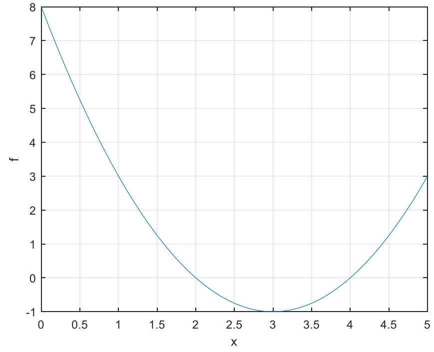
`F-count` is a header in the iterative display for many solvers. For an example, see Interpret Result.

The `F-count` appears in the output structure as `output.funcCount`, enabling you to access the evaluation count programmatically. For more information, see Output Structures.

Przykład 2

$$f = (x-3)^2 - 1 \qquad 0 < x < 5$$

```
%function f = myfun(x)
f =@(x) (x-3)^2 - 1;
[x,fval,exitflag] = ...
fminbnd(f,0,5,optimset('TolX',1e-12,'Display','off'))
% wykres
x=0:0.1:5;
f = (x-3).^2 - 1;
plot(x,f)
grid on
xlabel('x'), ylabel('f')
```



Funkcje optymalizacji w Matlabie

fmincon

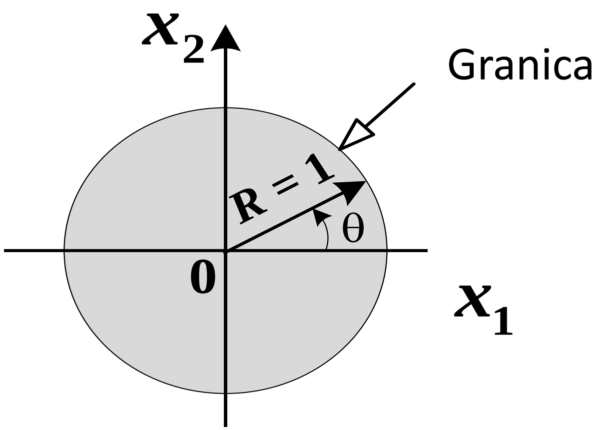
$$\min_{x} f(x), \begin{cases} c(x) \le 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub, \end{cases}$$

fmincon implements four different algorithms: interior point, SQP, active set, and trust region reflective.
Choose one via the option
Algorithm: for instance, to choose SQP, set OPTIONS = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp'), and then pass OPTIONS to fmincon.

Przykład

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

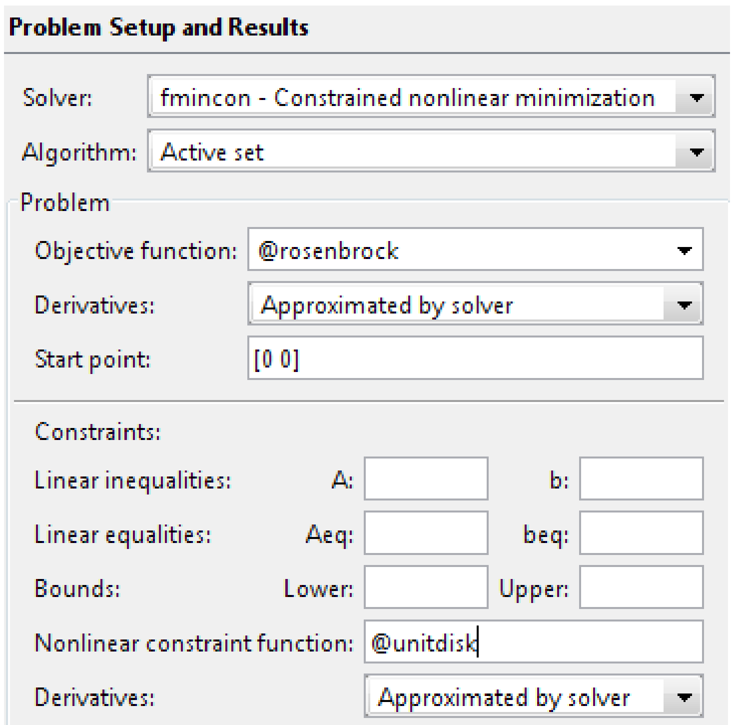
$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

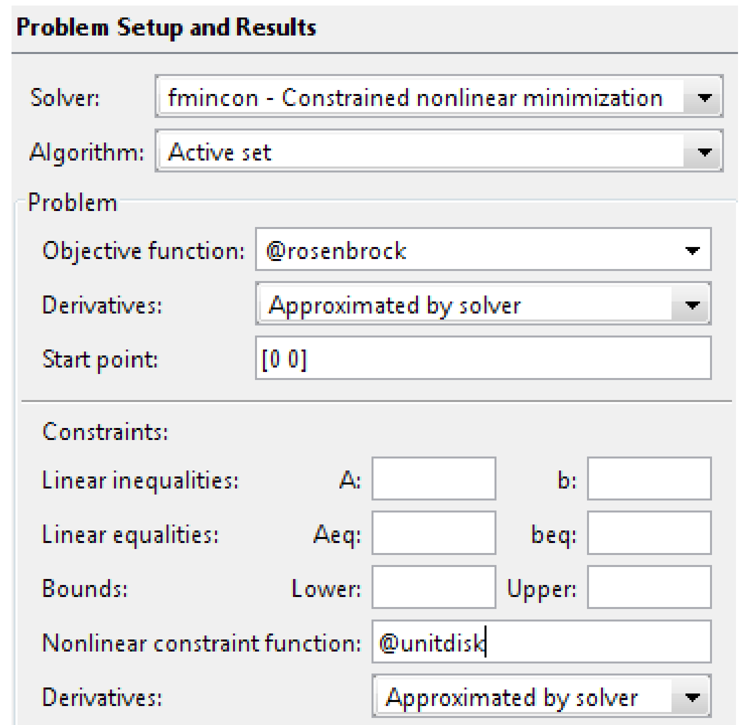


rosenbrock.m

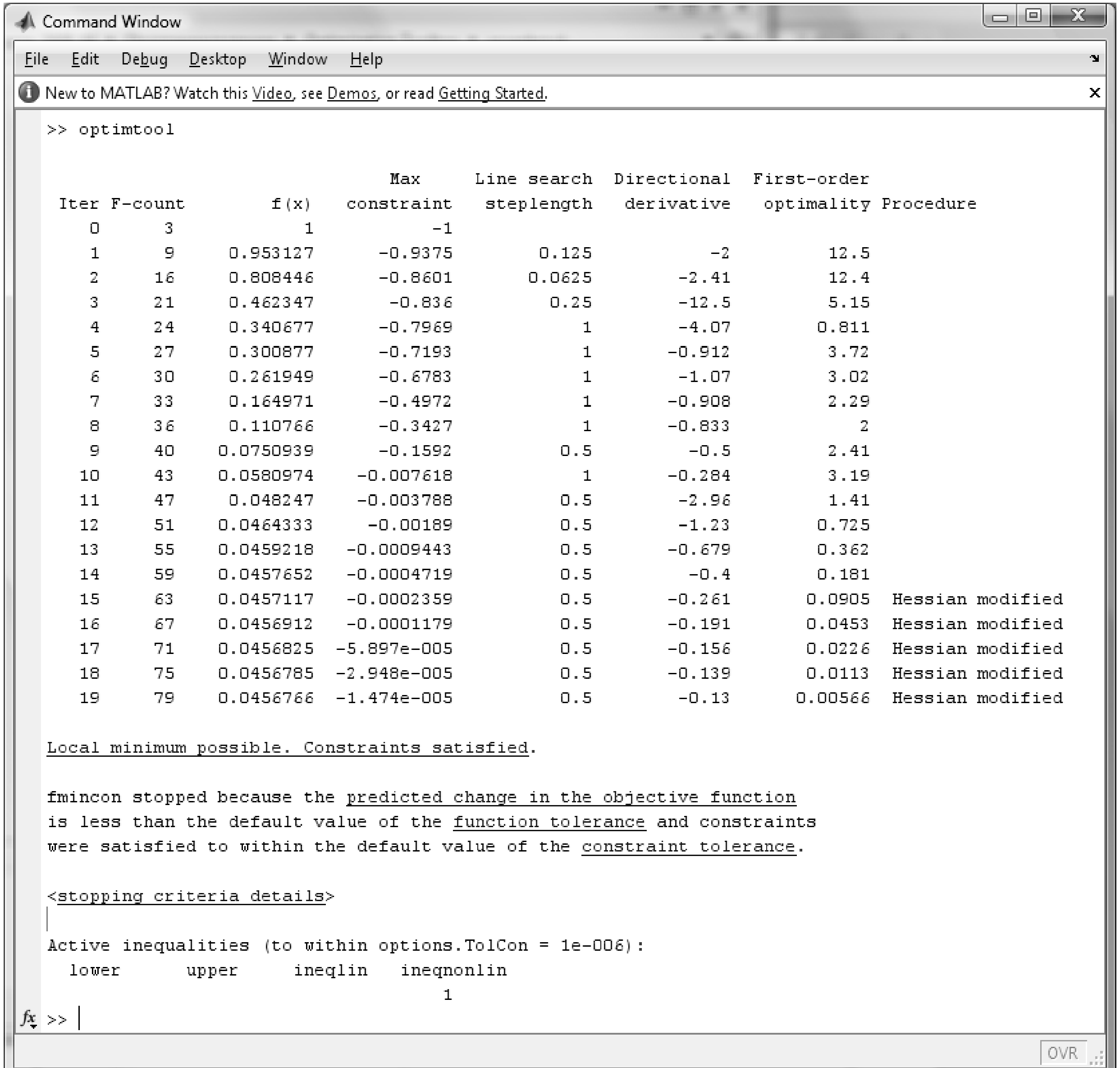
```
function f = rosenbrock(x)
f = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1 - x(1))^2;

function [c, ceq] = unitdisk(x)
c = x(1)^2 + x(2)^2 - 1;
ceq = [ ];
```

optimtool





$x = (0,786; \quad 0,618)$ $\qquad f_{\min} = 0,0457$


Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> optimtool
Max Line search Directional First-order
Iter F-count f(x) constraint steplength derivative optimality Procedure
0 3 1 -1
1 9 0.953127 -0.9375 0.125 -2 12.5
2 16 0.808446 -0.8601 0.0625 -2.41 12.4
3 21 0.462347 -0.836 0.25 -12.5 5.15
4 24 0.340677 -0.7969 1 -4.07 0.811
5 27 0.300877 -0.7193 1 -0.912 3.72
6 30 0.261949 -0.6783 1 -1.07 3.02
7 33 0.164971 -0.4972 1 -0.908 2.29
8 36 0.110766 -0.3427 1 -0.833 2
9 40 0.0750939 -0.1592 0.5 -0.5 2.41
10 43 0.0580974 -0.007618 1 -0.284 3.19
11 47 0.048247 -0.003788 0.5 -2.96 1.41
12 51 0.0464333 -0.00189 0.5 -1.23 0.725
13 55 0.0459218 -0.0009443 0.5 -0.679 0.362
14 59 0.0457652 -0.0004719 0.5 -0.4 0.181
15 63 0.0457117 -0.0002359 0.5 -0.261 0.0905 Hessian modified
16 67 0.0456912 -0.0001179 0.5 -0.191 0.0453 Hessian modified
17 71 0.0456825 -5.897e-005 0.5 -0.156 0.0226 Hessian modified
18 75 0.0456785 -2.948e-005 0.5 -0.139 0.0113 Hessian modified
19 79 0.0456766 -1.474e-005 0.5 -0.13 0.00566 Hessian modified
Local minimum possible. Constraints satisfied.
fmincon stopped because the predicted change in the objective function
is less than the default value of the function tolerance and constraints
were satisfied to within the default value of the constraint tolerance.
<stopping criteria details>
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):
lower upper ineqlin ineqnonlin
1
>>
OVR

Przykład 3

$$f(x) = -x_1 x_2 x_3 \qquad x_0 = (10;\,10;\,10)$$

$$0 \le x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72 \Rightarrow \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72. \end{array}$$

$$A \cdot x \le b \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

```
function f = myfun1(x)
f =-x(1) * x(2) * x(3);
```

```
function [c, ceq] = myfun1con(x)
c=A*x-b;
```

$$x = (24,\ \ 12,\ \ 12) \qquad f_{\min} = -3456$$

Przykład 4

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$0{,}5 \le x_1$$

$$-x_1 - x_2 + 1 \le 0$$

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^2 - x_2^2 + 1 \le 0 \\ -9x_1^2 - x_2^2 + 9 \le 0 \\ -x_1^2 + x_2 \le 0 \\ -x_2^2 + x_1 \le 0 \end{array}\right\}$$

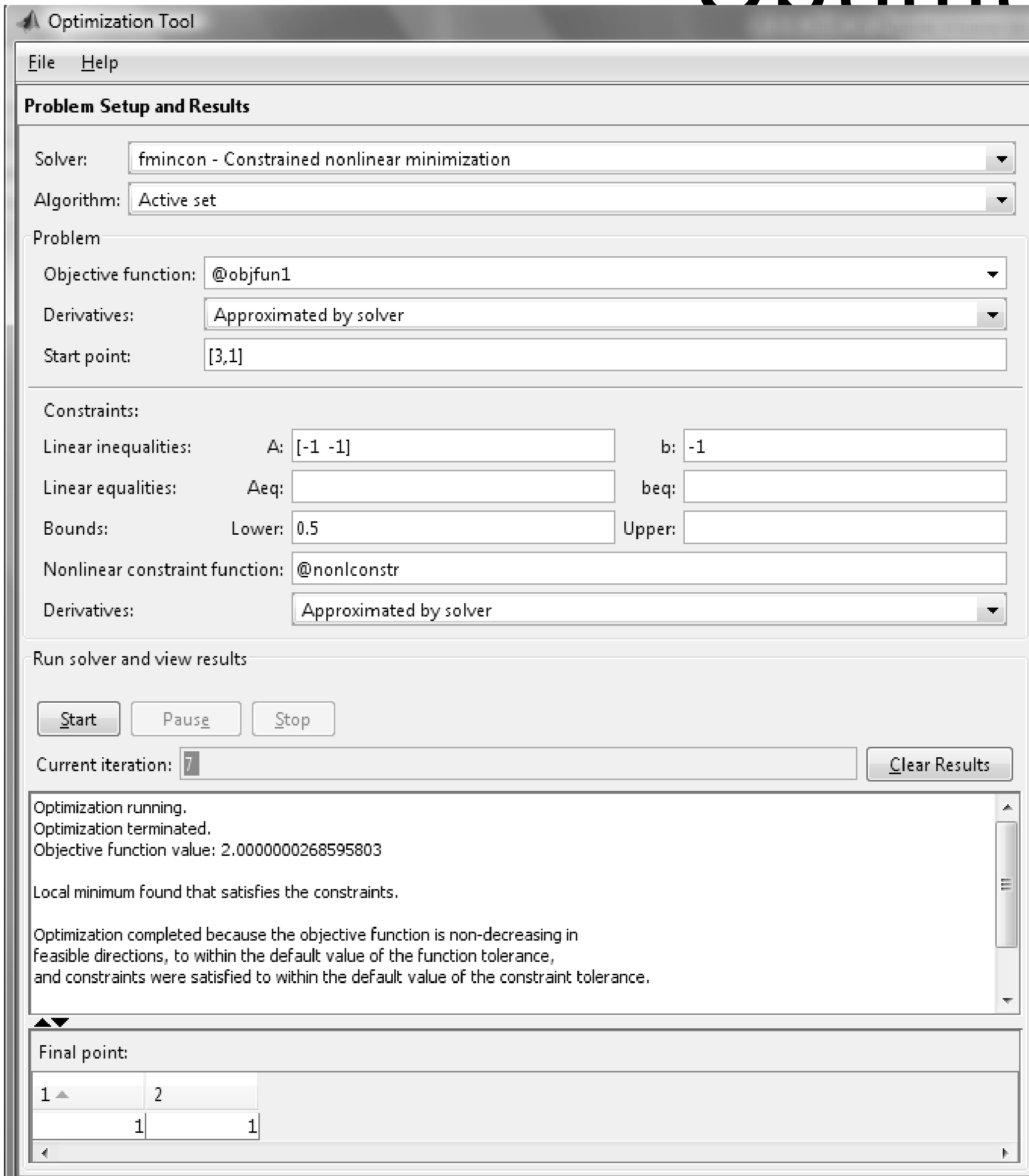
```
function f = objfun1(x)
f = x(1)^2 + x(2)^2;
```

```
function [c,ceq] = nonlconstr(x)
c = [-x(1)^2 - x(2)^2 + 1;
     -9*x(1)^2 - x(2)^2 + 9;
     -x(1)^2 + x(2);
     -x(2)^2 + x(1)];
ceq = [ ];
```

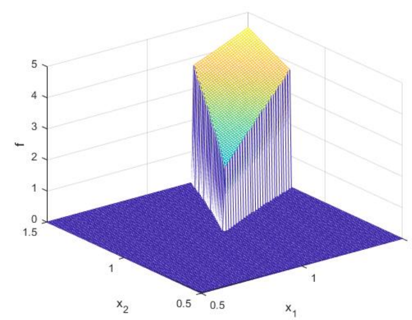
$$-x_1 - x_2 + 1 \le 0, \qquad -x_1 - x_2 \le -1. \qquad A \cdot x \le b. \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\ A = [-1 \ \ -1];\ b = -1.$$

$$0{,}5 \le x_1$$

Optimtool

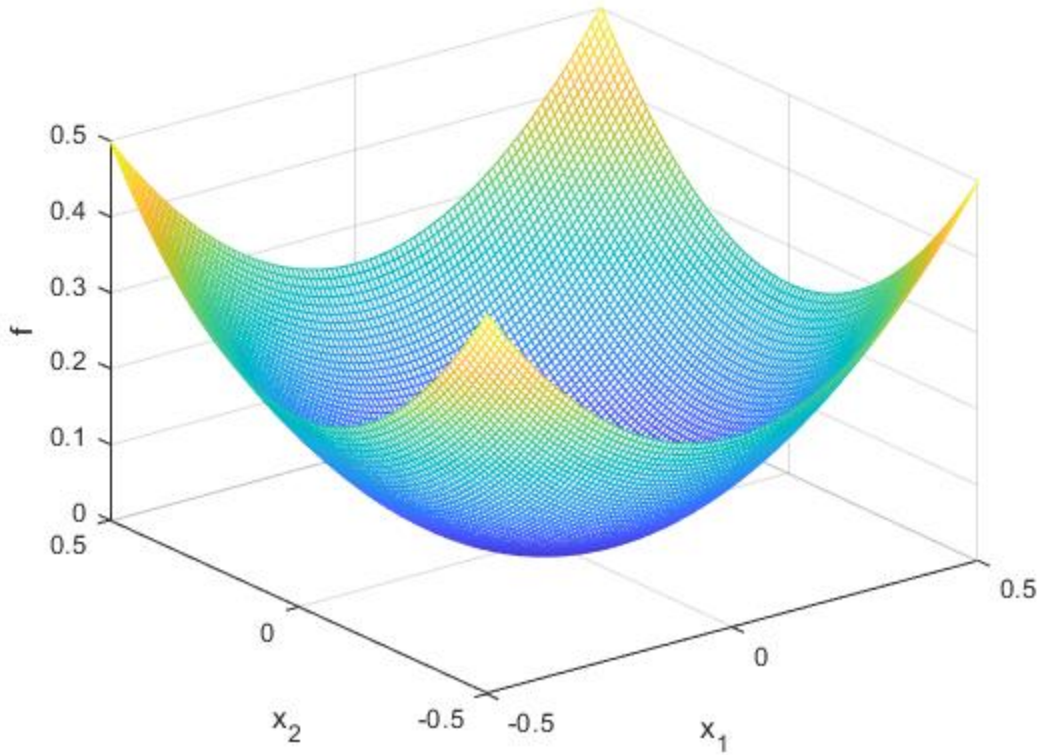



```
[x1,x2] = meshgrid(0.5:0.01:1.5);
f=(x1.^2+x2.^2).*(-x1.^2-x2.^2+1<=0).*(-9*x1.^2-x2.^2+9<=0).*(-x1.^2+x2<=0).*( -x2.^2+x1<=0).*( -x1+0.5<=0).*( -x1-x2+1<=0);
mesh(x1,x2,f);
xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('f')
```



Funkcja bez ograniczeń

```
[x1,x2] = meshgrid(-0.5:0.01:0.5);
f=x1.^2+x2.^2;
mesh(x1,x2,f);
xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlak
```

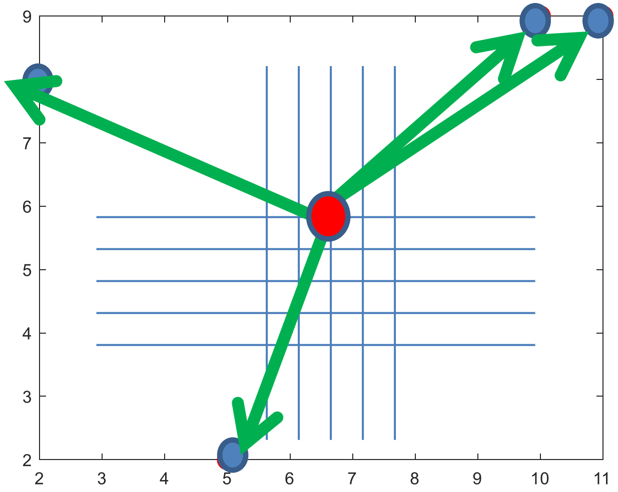


Lokalizacja centrum handlowego

Aby zapewnić wygodę wszystkim mieszkańcom dzielnicy, konieczne jest takie ustawienie centrum handlowego, aby **całkowita odległość między nim a obszarami mieszkalnymi była minimalna**.

Osiedle	Współrzędne	
	Oś x_1: a_k	Oś x_2: b_k
Osiedle1	2	8
Osiedle2	10	9
Osiedle3	5	2
Osiedle4	11	9

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_1 - a_k)^2 + (x_2 - b_k)^2} \rightarrow \min$$

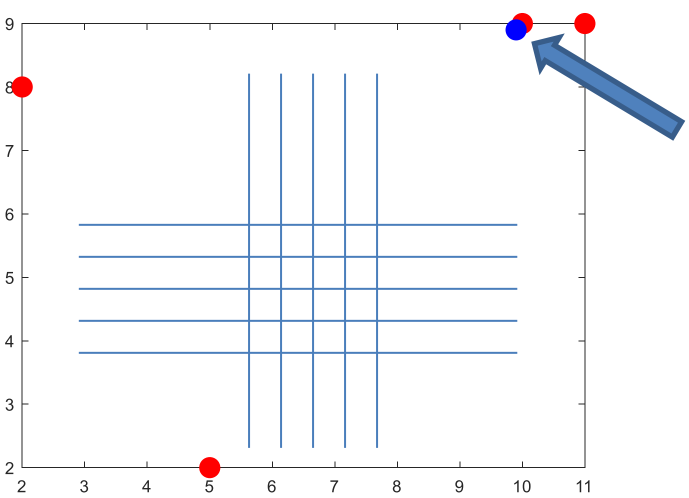


Osiedle1.m

Lokalizacja centrum handlowego

Aby zapewnić wygodę wszystkim mieszkańcom dzielnicy, konieczne jest takie ustawienie centrum handlowego, aby **całkowita odległość między nim a obszarami mieszkalnymi była minimalna**.

Osiedle	Współrzędne	
	Oś x_1: a_k	Oś x_2: b_k
Osiedle1	2	8
Osiedle2	10	9
Osiedle3	5	2
Osiedle4	11	9



$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_1 - a_k)^2 + (x_2 - b_k)^2} \rightarrow \min$$

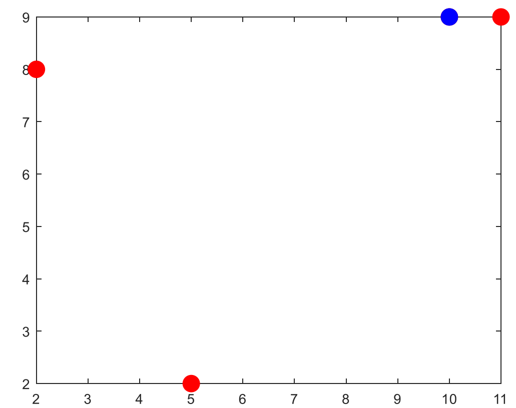
Objective function value: 17.657710405180147

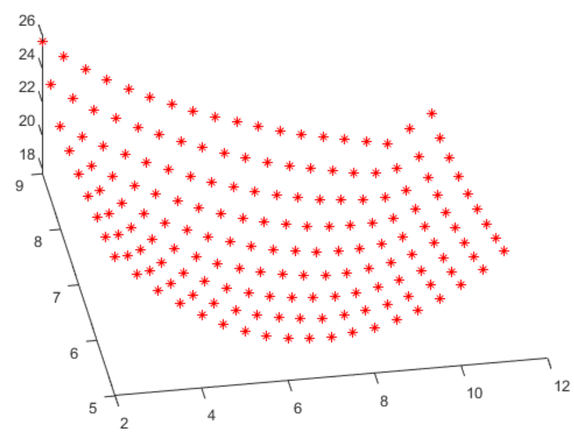
x1=9.913792681988808 x2=8.879309915823926

Osiedle1.m

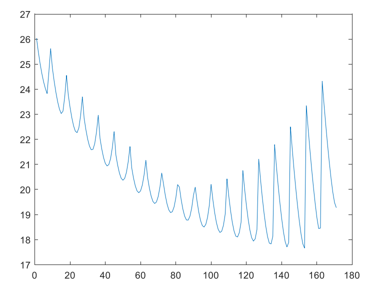
Wyszukiwanie wyczerpujące

```
a=[2 10 5 11];
b=[8 9 2 9];

Out=[];
for x1=2:0.5:11
   for x2=5:0.5:9
      %sum(sqrt((x1-a).^2+(x2-b).^2))
      f=0;
      for i=1:4
         f=f+sqrt((x1-a(i))^2+(x2-b(i))^2);
      end;

      Out=[Out;x1 x2 f];
   end;
end;
[v i]=min(Out(:,3));
Out(i,:)
plot(a,b,'.r','MarkerSize',40);
hold on;
plot(Out(i,1),Out(i,2),'.b','MarkerSize',40);
```





plot3(Out(:,1),Out(:,2),Out(:,3),'r*')

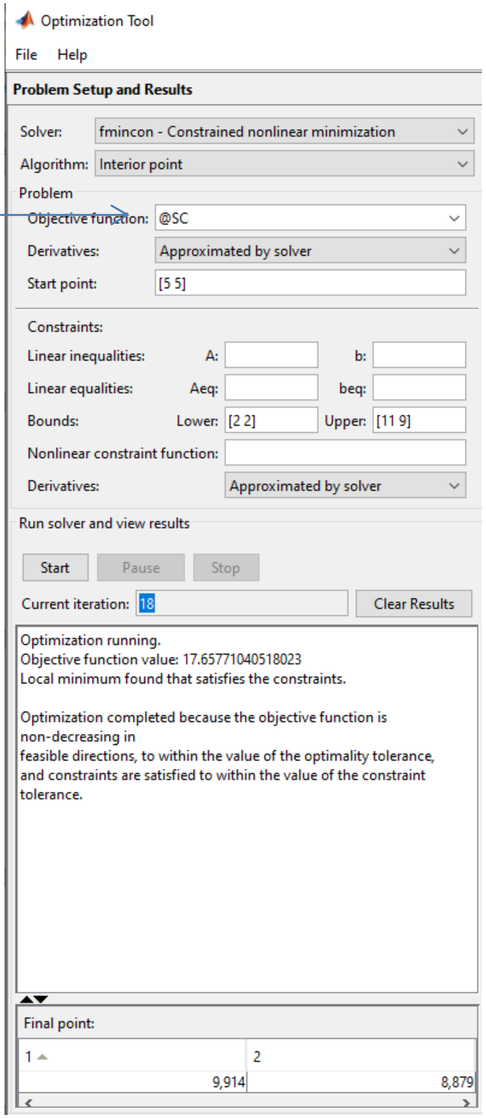


plot(Out(:,3))

Osiedle1.m

Optimization tool

```
function f = SC(x)  %SC means a Shopping Center
f = sqrt((x(1)-2)^2+(x(2)-8)^2)+ sqrt((x(1)-10)^2+(x(2)-
9)^2)+sqrt((x(1)-5)^2+(x(2)-2)^2)+ sqrt((x(1)-11)^2+(x(2)-
9)^2);
%{
x0=[1 1];
[x f]=fmincon(@SC,x0,[],[],[],[],[],[],@SCconstr)
%}
```



Lokalizacja centrum handlowego 2

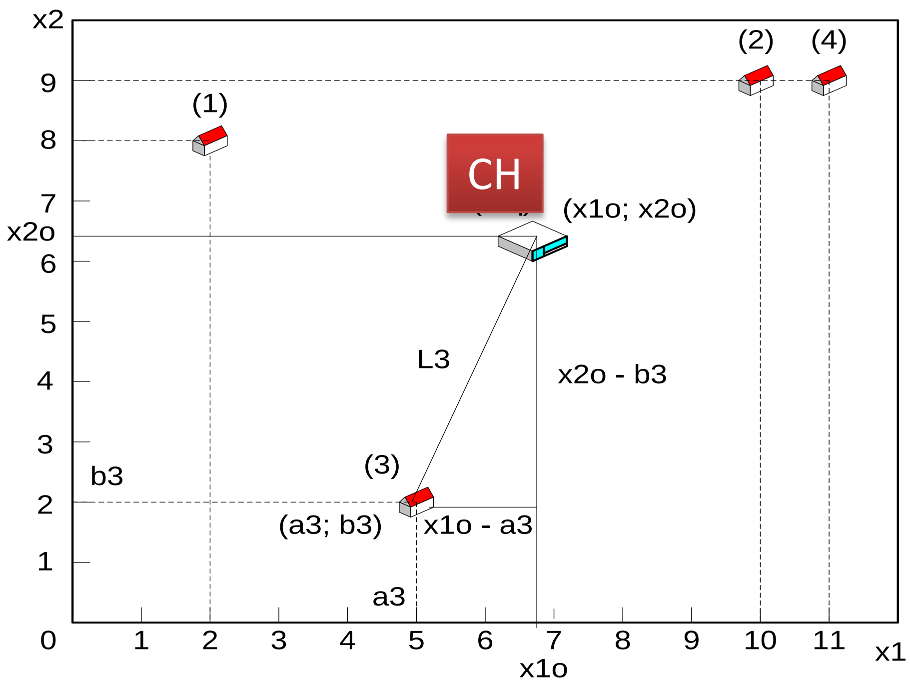
Aby zapewnić wygodę wszystkim mieszkańcom dzielnicy, konieczne jest takie ustawienie centrum handlowego, aby całkowita odległość między nim a obszarami mieszkalnymi była minimalna. **Ponadto odległość od każdego osiedla do centrum handlowego nie może przekroczyć wartości 5km.**

Osiedla	Współrzędne	
	Oś x_1: a_k	Oś x_2: b_k
Osiedle 1	2	8
Osiedle 2	10	9
Osiedle 3	5	2
Osiedle 4	11	9

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_1 - a_k)^2 + (x_2 - b_k)^2} \rightarrow \min$$

ograniczenia

$$\sqrt{(x_1 - a_k)^2 + (x_2 - b_k)^2} \le 5, \; k = 1, \ldots, 4$$

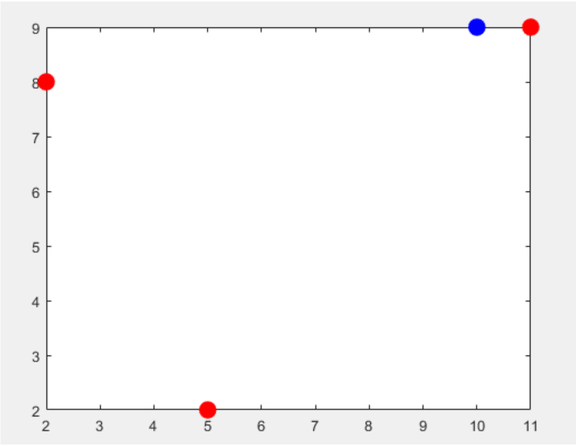


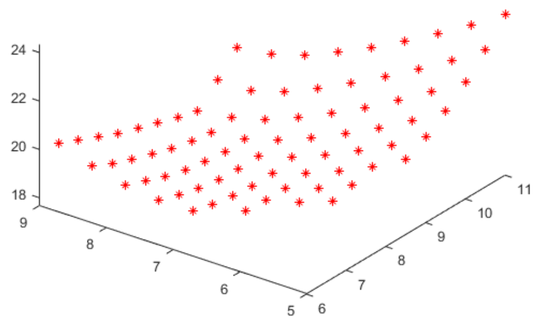
Objective function value: 18.746060350064884

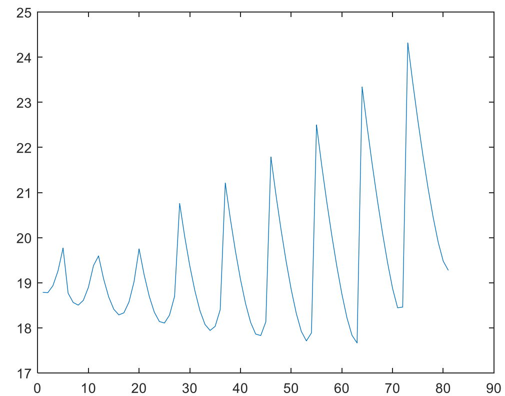
x1=6.816622136975171 x2=6.658312553619631

Wyszukiwanie wyczerpujące

```
%osiedle
a=[2 10 5 11];
b=[8 9 2 9];
Out=[];
for x1=2:0.5:11
   for x2=5:0.5:9
      %sum(sqrt((x1-a).^2+(x2-b).^2))
      f=0;
      ogr=1;
      for i=1:4
         if sqrt((x1-a(i))^2+(x2-b(i))^2)<5
            ogr=1;
         else
            ogr=0;
         end;
      end;
      if ogr==1
      for i=1:4
         f=f+(sqrt((x1-a(i))^2+(x2-b(i))^2));

      end;

      Out=[Out;x1 x2 f];
      end;
   end;
end;
[v i]=min(Out(:,3));
Out(i,:)
plot(a,b,'.r','MarkerSize',40);
hold on;
plot(Out(i,1),Out(i,2),'.b','MarkerSize',40);
%plot(6.68,6.65,'.g','MarkerSize',40);
```







plot(Out(:,3))

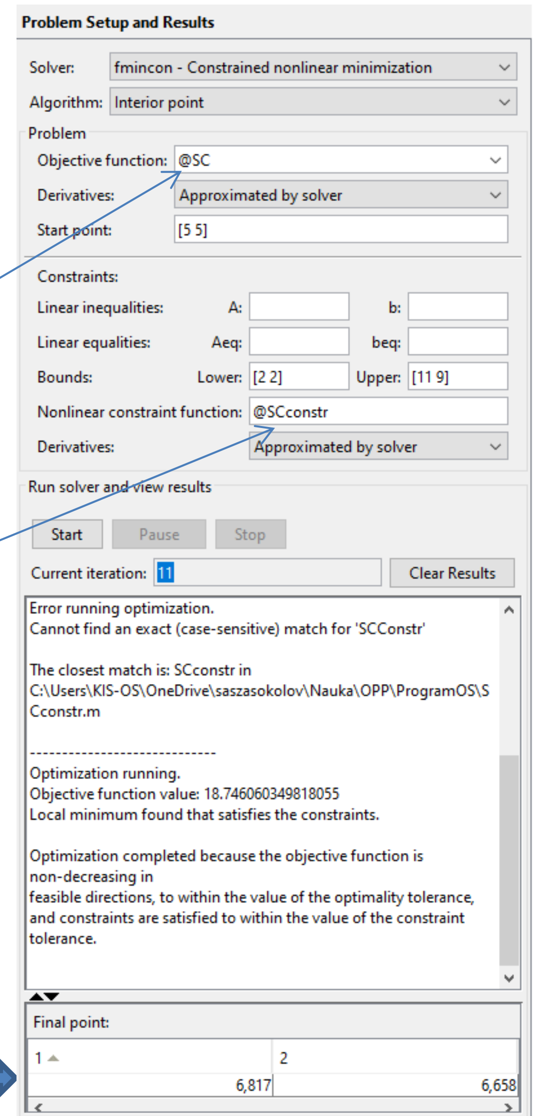
Osiedle2.m

plot3(Out(:,1),Out(:,2),Out(:,3),'r*')

Optimization tool

```
function f = SC(x)  %SC means a Shopping Center
f = sqrt((x(1)-2)^2+(x(2)-8)^2)+ sqrt((x(1)-10)^2+(x(2)-
9)^2)+sqrt((x(1)-5)^2+(x(2)-2)^2)+ sqrt((x(1)-11)^2+(x(2)-
9)^2);
%{
x0=[1 1];
[x f]=fmincon(@SC,x0,[],[],[],[],[],[],@SCconstr)
%}
```

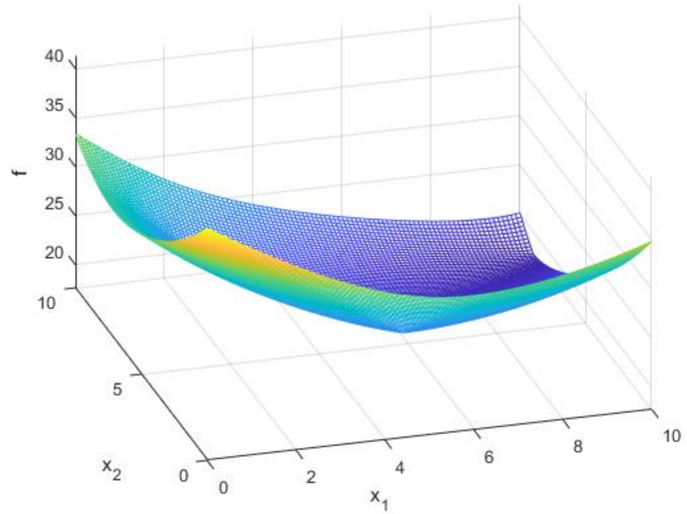
```
function [c,ceq] = SCconstr(x)
c = [sqrt((x(1)-2)^2+(x(2)-8)^2)-5
    sqrt((x(1)-10)^2+(x(2)-9)^2)-5
    sqrt((x(1)-5)^2+(x(2)-2)^2)-5
    sqrt((x(1)-11)^2+(x(2)-9)^2)-5];
ceq = [ ];
```



```
>>x0=[1, 1];
[x,fun,flag] =
fmincon(@SC,x0,[],[],[],[],[],[],@SCconstr)

x =
   6.8166    6.6583
fun =
  18.7461
flag =
     1
```

Funkcja celu

```
 [x1,x2] = meshgrid(0:0.1:10);
f= abs(sqrt((x1-2).^2+(x2-8).^2)+ sqrt((x1-
10).^2+(x2-9).^2)+ ...
   sqrt((x1-5).^2+(x2-2).^2)+ sqrt((x1-
11).^2+(x2-9).^2));
mesh(x1,x2,f);
xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('f')
```



Bez ograniczeń

x1=9.9;x2=8.9;

min(min(f))

ans =

17.659918047364

Z ograniczeniami

x = 6.8166 6.6583

fun =

18.7461