

Metody numeryczne II.

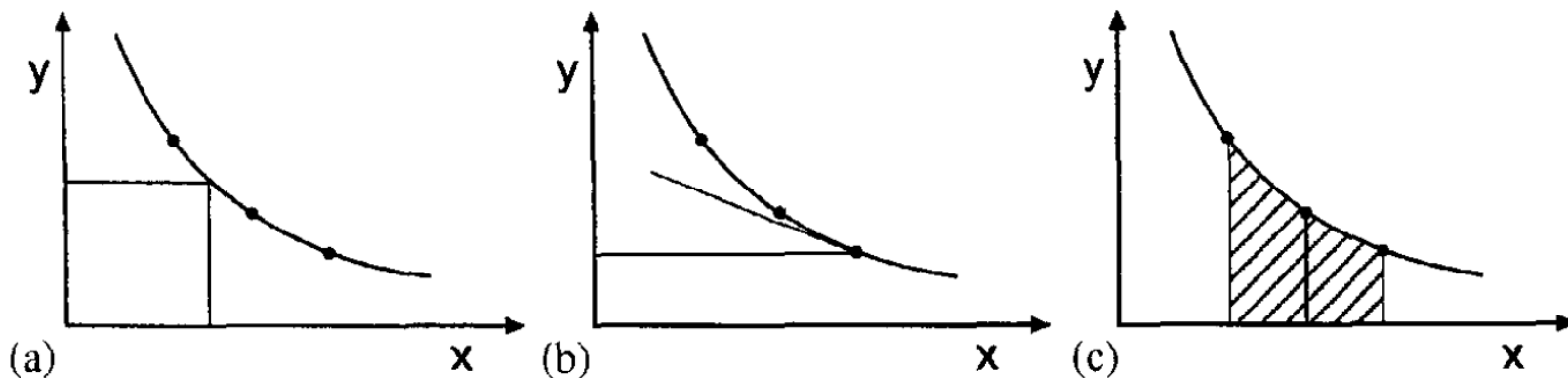
Aproksymacja

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
UMK <http://fizyka.umk.pl/~osokolov/MNII/>

Aproksymacja

Aproksymacja (łac. approximare – przybliżać) – proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.

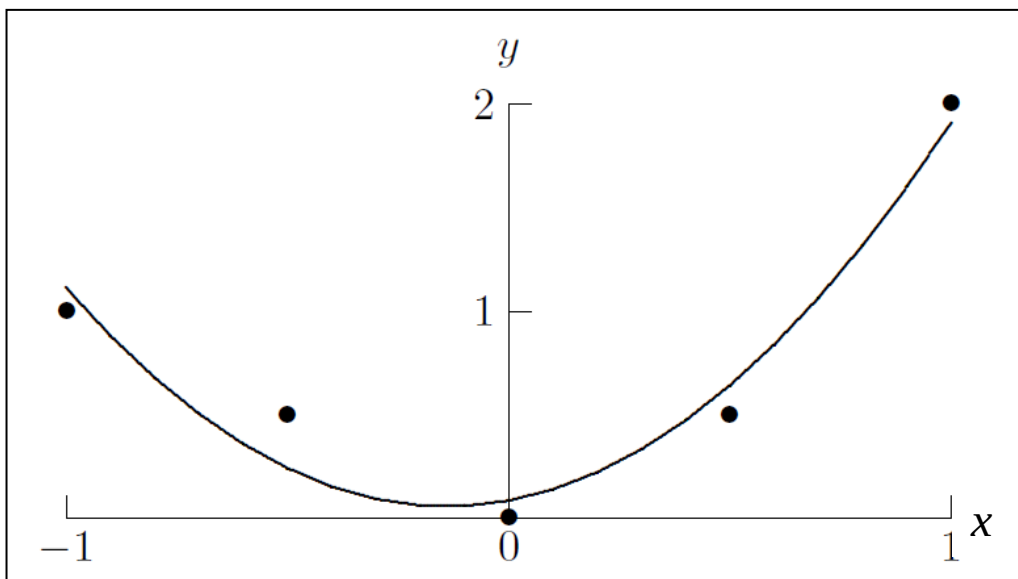


- a) Interpolacja
- b) Obliczenie pochodnej
- c) Całkowanie

x	f(x)
3.20	0.312500
3.30	0.303030
3.35	0.298507
3.40	0.294118
3.50	0.285714
3.60	0.277778
3.65	0.273973
3.70	0.270270

Aproksymacja punktowa

Aproksymacja punktowa – rodzaj aproksymacji pozwalający przybliżyć zbiór punktów funkcją ciągłą



$$\min_a \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i, a))^2$$

Aproksymacja wielofunkcyjna

$$f(x, a) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

$$f(x, a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$$

$$f(x, a) = a_1e^{a_2x} + \dots + a_{n-1}e^{a_nx}$$

Aproksymacja wielomianowa

$$(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

m – ilość pomiarów

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n (n < m)$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_nx_i^n)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_n x_i^n)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^m x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_n x_i^n)$$

$\vdots$

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = -2 \sum_{i=1}^m x_i^n (y_i - a_0 - a_1 x_i - \cdots - a_n x_i^n)$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$a_0 \sum_{i=1}^m 1 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^n = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

$\vdots$

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} = \sum_{i=1}^m x_i^n y_i$$

$$s_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n = b_0$$

$$s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{n+1} a_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$s_n a_0 + s_{n+1} a_1 + \cdots + s_{2n} a_n = b_n$$

$$\sum_{i=1}^m 1 = \sum_{i=1}^m x_i^0 = s_0$$

$$s_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Sa = b$$

$$s_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

m – ilość pomiarów

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

macierz Vandermonde'a

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (n < m)$$

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \boxed{1} & \boxed{x_2} & \boxed{x_2^2} & \dots & \boxed{x_2^n} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \longrightarrow s_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

m – ilość pomiarów

$$V^T V a = b$$

$$S = V^T V$$

Jeśli x_i są różne, rozwiązanie $Sa = b$ jest jednoznaczne

Aproksymacja wielomianowa

$$f(t, \mathbf{x}) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \cdots + x_n\phi_n(t)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = x_1 + x_2t + x_3t^2 + \cdots + x_nt^{n-1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$$

$$a_{ij} = \phi_j(t_i)$$

$$b_i = y_i$$

$$(t_1, y_1), \dots, (t_5, y_5)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \\ 1 & t_5 & t_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

The diagram shows three blue rectangular blocks representing matrices and vectors. The first block is labeled 'A' and has dimensions 'm' (rows) and 'n' (columns) indicated in red. The second block is labeled 'x' and has dimensions '1' (rows) and 'n' (columns) indicated in red. An arrow points from the 'A' and 'x' blocks to the third block, which is labeled 'b' and has dimensions 'm' (rows) and '1' (columns) indicated in red.

A - macierz Vandermonde'a

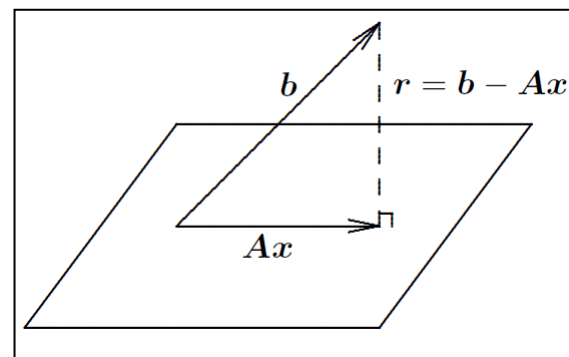
Metoda najmniejszych kwadratów

Błąd aproksymacji

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Norma wektorowa

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$$



Zagadnienie minimalizacji

$$\|\mathbf{r}\|_2^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{b} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Obliczenie pochodnej po zmiennej $\mathbf{x}$

$$2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Warunek konieczny $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$

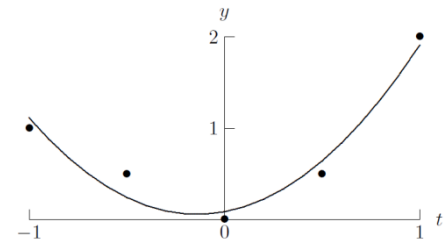
Przykład

$$\begin{array}{c|ccccc} t & -1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \\ y & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 & 2.0 \end{array}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{array}{c} t^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1.0 & 1.0 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.0 & 0.0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 2.0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

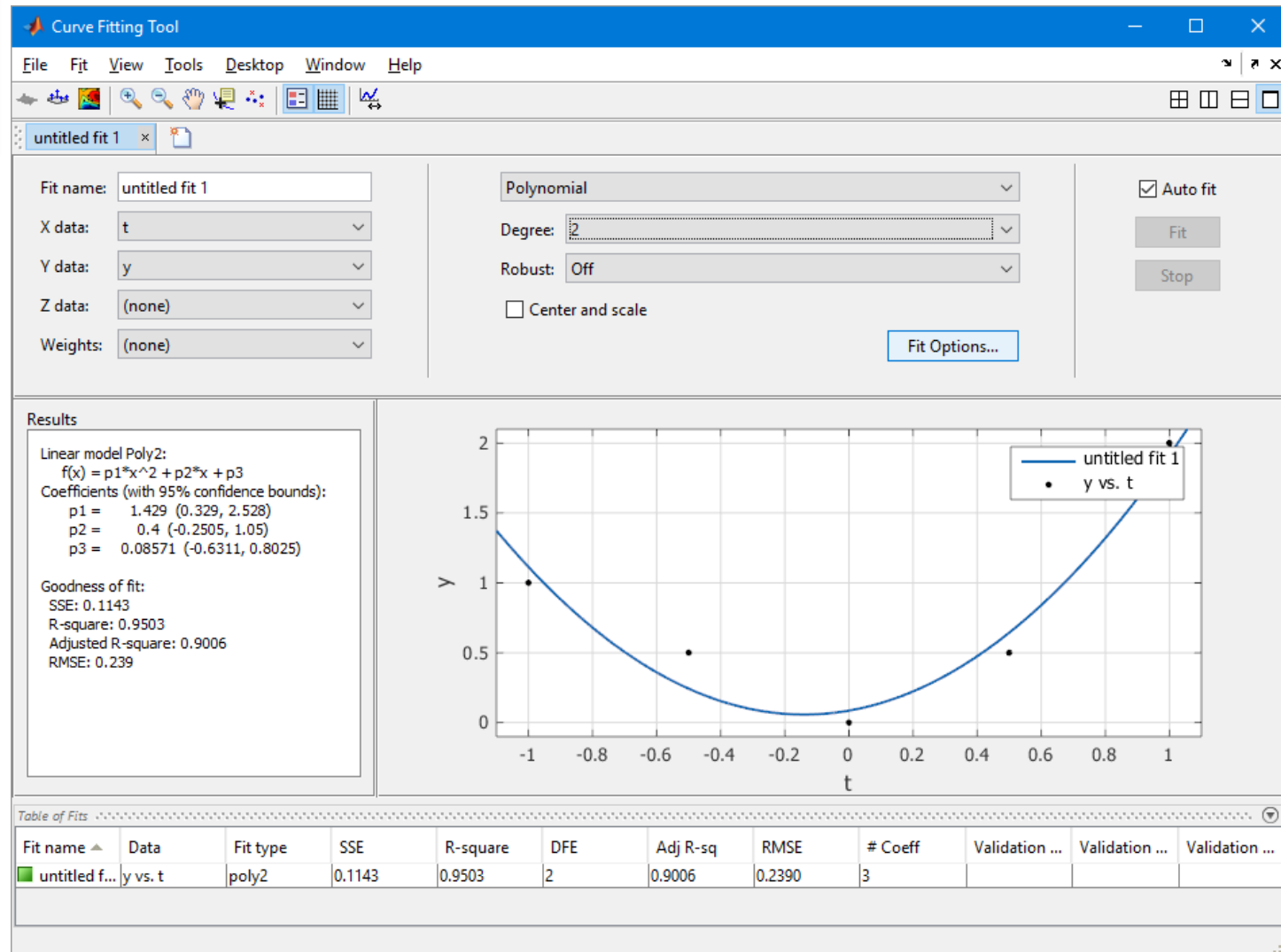
$$\mathbf{x} = [0.086 \quad 0.40 \quad 1.4]^T$$

$$p(t) = 0.086 + 0.4t + 1.4t^2$$



CFTool w Matlabie

```
t=[-1 -0.5 0 0.5 1]'  
y=[1 0.5 0 0.5 2]'  
cftool
```



Metoda równań normalnych

układ nadokreślony

$$Ax \approx b$$

$A[m,n], m>n$
 $x[n,1]$

układ równań normalnych

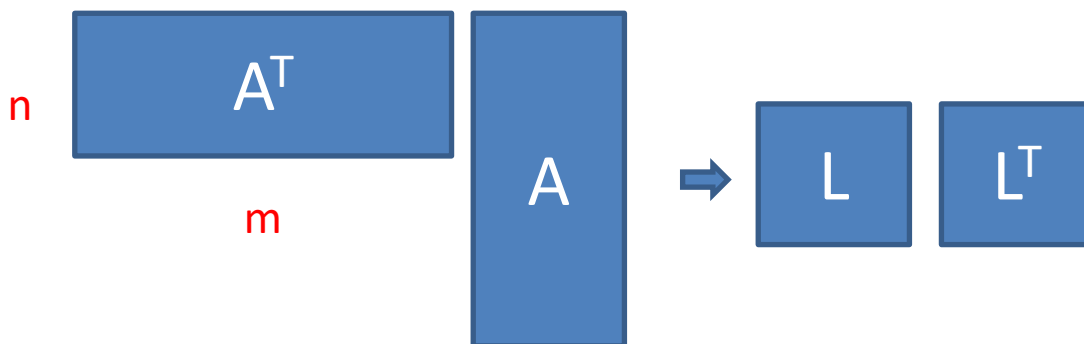
$$A^T A x = A^T b$$

$$A^T A = L L^T$$

jako symetryczna dodatnio określona macierz
umożliwia zastosowanie rozkładu Choleskiego

$$Ly = A^T b$$

$$L^T x = y$$



Przykład

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \\ 1.0 & 0.25 & 0.0 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1.0 & 1.0 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.0 & 0.0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 0.0 & 2.5 \\ 0.0 & 2.5 & 0.0 \\ 2.5 & 0.0 & 2.125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \\ 1.0 & 0.25 & 0.0 & 0.25 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 1.0 \\ 3.25 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 0.0 & 2.5 \\ 0.0 & 2.5 & 0.0 \\ 2.5 & 0.0 & 2.125 \end{bmatrix} =$$

```
>> chol([5 0 2.5; 0 2.5 0; 2.5 0 2.125] )
```

```
ans =
```

```
2.2361      0  1.1180
```

```
0  1.5811      0
```

```
0      0  0.9354
```

$$\begin{bmatrix} 2.236 & 0 & 0 \\ 0 & 1.581 & 0 \\ 1.118 & 0 & 0.935 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.236 & 0 & 1.118 \\ 0 & 1.581 & 0 \\ 0 & 0 & 0.935 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.789 \\ 0.632 \\ 1.336 \end{bmatrix} \downarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.086 \\ 0.400 \\ 1.429 \end{bmatrix} \uparrow$$

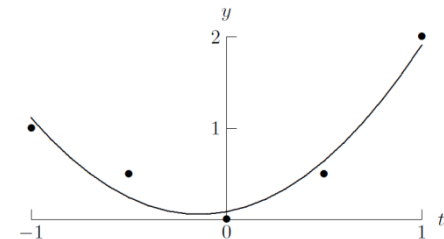
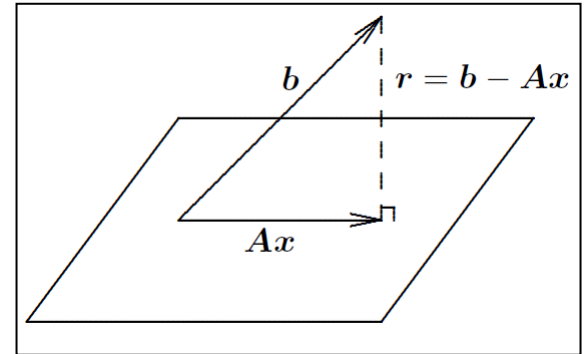
Przykład (cd.)

```
>> [A*x b b-A*x]
```

```
ans =
```

1.1150	1.0000	-0.1150
0.2432	0.5000	0.2568
0.0860	0	-0.0860
0.6433	0.5000	-0.1433
1.9150	2.0000	0.0850

$$p(t) = 0.086 + 0.4t + 1.4t^2$$



Przykład 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
>> chol([25 -50;-50 101])
```

```
ans =
```

```
5 -10  
0 1
```

1. $A^T A = \begin{bmatrix} 25 & -50 \\ -50 & 101 \end{bmatrix}$ and $A^T b = \begin{bmatrix} 25 \\ -48 \end{bmatrix}$

L L'

2. Cholesky factorization: $A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. solve $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -48 \end{bmatrix}$: solution is $z_1 = 5, z_2 = 2$

4. solve $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$: solution is $x_1 = 5, x_2 = 2$

QR faktoryzacja

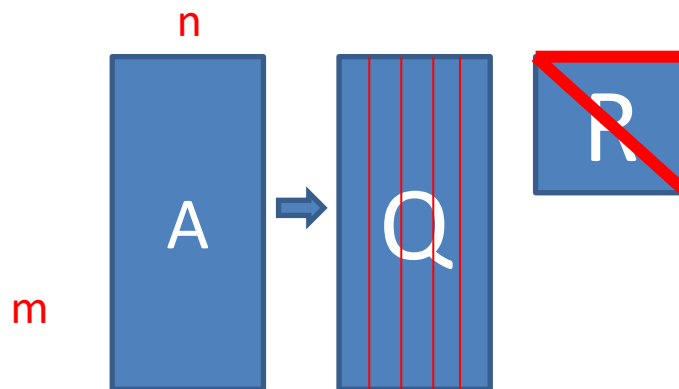
$$Ax \approx b$$

If A is m -by- n and the rank of A is equal to n , then A has a left inverse $\rightarrow m \geq n$

if A is $m \times n$ and left-invertible then it can be factored as

$$A = QR$$

- R is $n \times n$ and upper triangular with $r_{ii} > 0$
- Q is $m \times n$ and orthogonal ($Q^T Q = I$)



QR faktoryzacja (cd.)

rewrite normal equations $A^T A x = A^T b$ using QR factorization $A = QR$

$$\begin{aligned} A^T A x &= A^T b \\ R^T Q^T Q R x &= R^T Q^T b \\ R^T R x &= R^T Q^T b \quad (Q^T Q = I) \\ R x &= Q^T b \quad (R \text{ nonsingular}) \end{aligned}$$

algorithm

1. QR factorization of A : $A = QR$ ($2mn^2$ flops)
2. form $d = Q^T b$ ($2mn$ flops)
3. solve $Rx = d$ by back substitution (n^2 flops)

cost for large m, n : $2mn^2$ flops

Przykład

$$Ax \approx b$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. QR factorization: $A = QR$ with

$$Q = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. calculate $d = Q^T b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. solve $\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$: solution is $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

```
A=[3 -6;4 -8;0 1]
[q r]=qr(A)
```

q =

-0.6000	0	0.8000
-0.8000	0	-0.6000
0	-1.0000	0

r =

-5	10
0	-1
0	0

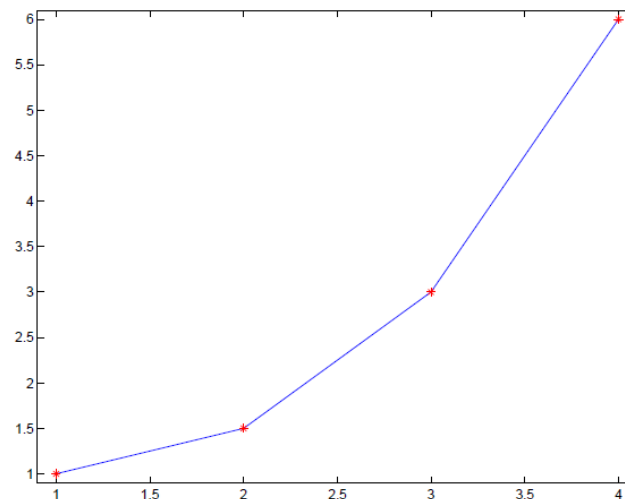
```
>> q*r
```

ans =

3.0000	-6.0000
4.0000	-8.0000
0	1.0000

Przykład2

$$p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{bmatrix}$$

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T$$

$$[v] = [a_i] + \|a_i\| [e]$$

Przykład2 (cd.)

$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v][v]^T$$

$$[H][x] = [x]'$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 3.0 \\ 6.0 \end{bmatrix}$$

$$H^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma^{(1)} e_1$$

$$H^{(1)} A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1.33 \\ 0 & 1 & 3.67 \\ 0 & 2 & 10.67 \end{bmatrix}, \quad H^{(1)} y = \begin{bmatrix} -5.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \\ 3.75 \end{bmatrix}$$

$$v = [1 \ 1 \ 1 \ 1]' + 2 * [1 \ 0 \ 0 \ 0]' = [3 \ 1 \ 1 \ 1]'$$

```
>> v=[3 1 1 1],
>> v'*v
    12
>> h1=eye(4)-2/12*v*v'
    -0.5000  -0.5000  -0.5000  -0.5000
    -0.5000   0.8333  -0.1667  -0.1667
    -0.5000  -0.1667   0.8333  -0.1667
    -0.5000  -0.1667  -0.1667   0.8333
```

$$H^{(1)} - 4 \times 4$$

Przykład2 (cd.)

$$H^{(2)} = I - \rho^{(2)} \mathbf{u}^{(2)} (\mathbf{u}^{(2)})^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$H^{(1)}A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1.33 \\ 0 & 1 & 3.67 \\ 0 & 2 & 10.67 \end{bmatrix} \xrightarrow{H^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \sigma^{(2)} \mathbf{e}_1$$

$$|\sigma^{(2)}| = \|[0, 1, 2]^T\| = \sqrt{5} \approx 2.24$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = [-\sqrt{5}, 1, 2]^T$$

$$\rho^{(2)} = 2/\|\mathbf{u}^{(2)}\|^2 = 1/5$$

$$H^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0.45 & 0.89 \\ 0.45 & 0.80 & -0.40 \\ 0.89 & -0.40 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$H^{(2)} - 3 \times 3$$

Przykład2 (cd.)

$$\hat{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & H^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0.89 \\ 0 & 0.45 & 0.80 & -0.40 \\ 0 & 0.89 & -0.40 & 0.20 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}^{(2)} H^{(1)} A = \begin{bmatrix} -2 & -5.00 & -15.00 \\ 0 & 2.24 & 11.18 \\ 0 & 0 & \boxed{-1.93} \\ 0 & 0 & -0.53 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}^{(2)} H^{(1)} \mathbf{y} = \hat{H}^{(2)} \begin{bmatrix} -5.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \\ 3.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.75 \\ 3.69 \\ -1.24 \\ -0.22 \end{bmatrix}$$

$$H^{(3)} = I - \rho^{(3)} \mathbf{u}^{(3)} (\mathbf{u}^{(3)})^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$H^{(3)} \begin{bmatrix} -1.93 \\ -0.53 \end{bmatrix} = \sigma^{(3)} \mathbf{e}_1$$

$$H^{(3)} - 2 \times 2$$

Przykład2 (cd.)

$$|\sigma^{(3)}| = \|[-1.93, -0.53]^T\| = 2$$

$$\sigma^{(3)} = 2$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.93 - \sigma^{(3)} \\ -0.53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.93 \\ -0.53 \end{bmatrix}$$

$$\rho^{(3)} = 0.13$$

$$H^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.96 & -0.26 \\ -0.26 & 0.96 \end{bmatrix}$$

$H^{(3)} - 2 \times 2$

$$\hat{H}^{(3)} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.96 & -0.26 \\ 0 & 0 & -0.26 & 0.96 \end{bmatrix}$$

Przykład2 (cd.)

$$\hat{R} = \hat{H}^{(3)} \hat{H}^{(2)} H^{(1)} A = \begin{bmatrix} -2 & -5.00 & -15.00 \\ 0 & 2.24 & 11.18 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}^{(3)} \hat{H}^{(2)} H^{(1)} \mathbf{y} = \hat{H}^{(3)} \begin{bmatrix} -5.75 \\ 3.69 \\ -1.24 \\ -0.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.75 \\ 3.69 \\ 1.25 \\ 0.11 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -5.00 & -15.00 \\ 0 & 2.24 & 11.18 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -5.75 \\ 3.69 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

1. QR factorization of A : $A = QR$ ($2mn^2$ flops)
2. form $d = Q^T b$ ($2mn$ flops)
3. solve $Rx = d$ by back substitution (n^2 flops)

Przykład2 (cd.)

```
>> v=[3 1 1 1]'
```

v =

```
3  
1  
1  
1
```

```
>> H1=eye(4)-2/12*v*v'
```

H1 =

```
-0.5000 -0.5000 -0.5000 -0.5000  
-0.5000 0.8333 -0.1667 -0.1667  
-0.5000 -0.1667 0.8333 -0.1667  
-0.5000 -0.1667 -0.1667 0.8333
```

```
>> H2=[1 0 0 0;0 0 0.45 0.89;0 0.45 0.8 -0.4;0  
0.89 -0.4 0.2 ]
```

H2 =

```
1.0000 0 0 0  
0 0 0.4500 0.8900  
0 0.4500 0.8000 -0.4000  
0 0.8900 -0.4000 0.2000
```

```
>> H3=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 -0.96 -0.26;0 0 -0.26  
0.96]
```

H3 =

```
1.0000 0 0 0  
0 1.0000 0 0  
0 0 -0.9600 -0.2600  
0 0 -0.2600 0.9600
```

Przykład2 (cd.)

```
>> Qt=H3*H2*H1
```

Qt =

-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
-0.6700	-0.2233	0.2267	0.6667
0.4977	-0.4975	-0.4981	0.4979
-0.2207	0.6638	-0.6656	0.2224

```
> R=[-2 -5 -15;0 2.24 11.18;0 0 2;0 0 0]
```

R =

-2.0000	-5.0000	-15.0000
0	2.2400	11.1800
0	0	2.0000
0	0	0

```
>> Qt'*R
```

ans =

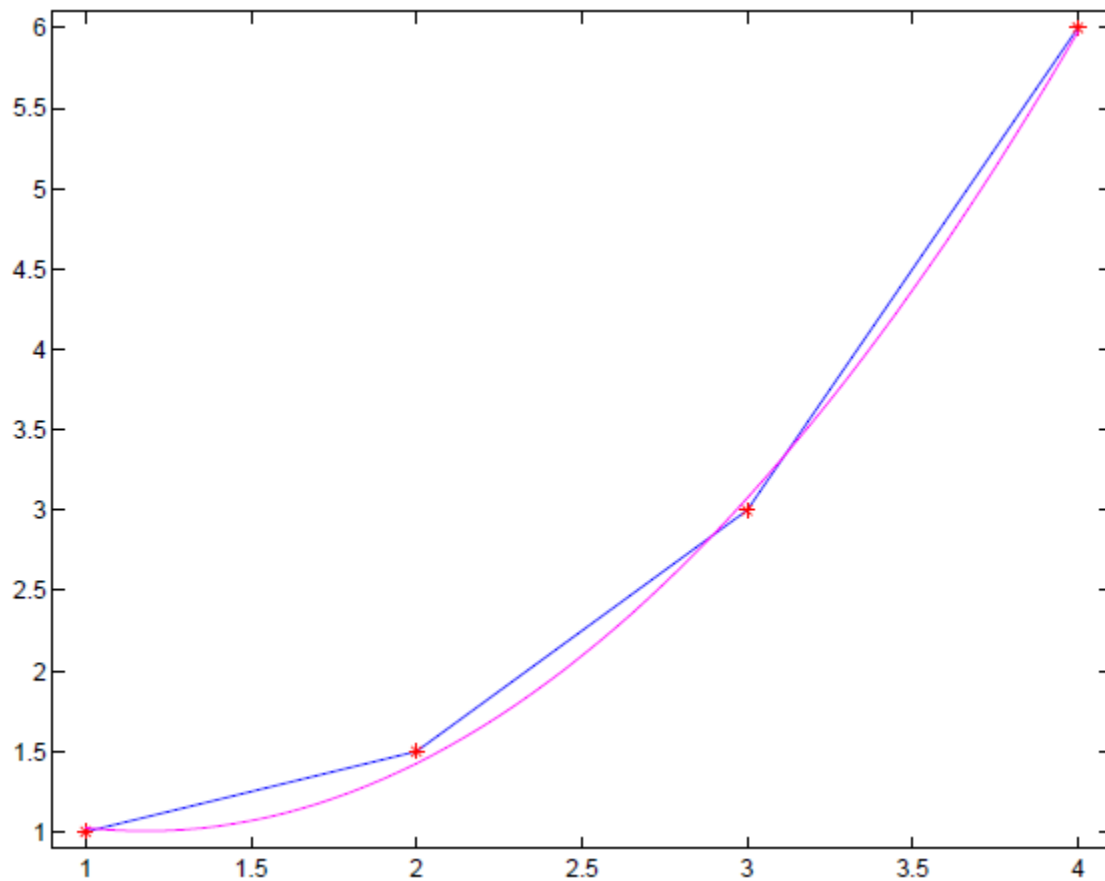
1.0000	0.9992	1.0048
1.0000	1.9997	4.0081
1.0000	3.0077	9.0379
1.0000	3.9933	15.9491

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Przykład2 (cd.)

$$R\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T = [1.875, -1.475, 0.625]^T$$



Rozkład według wartości osobliwych (szczególnych)

The Singular Value Decomposition

Każdą macierz rzeczywistą A można przedstawić w postaci rozkładu SVD:

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T$$

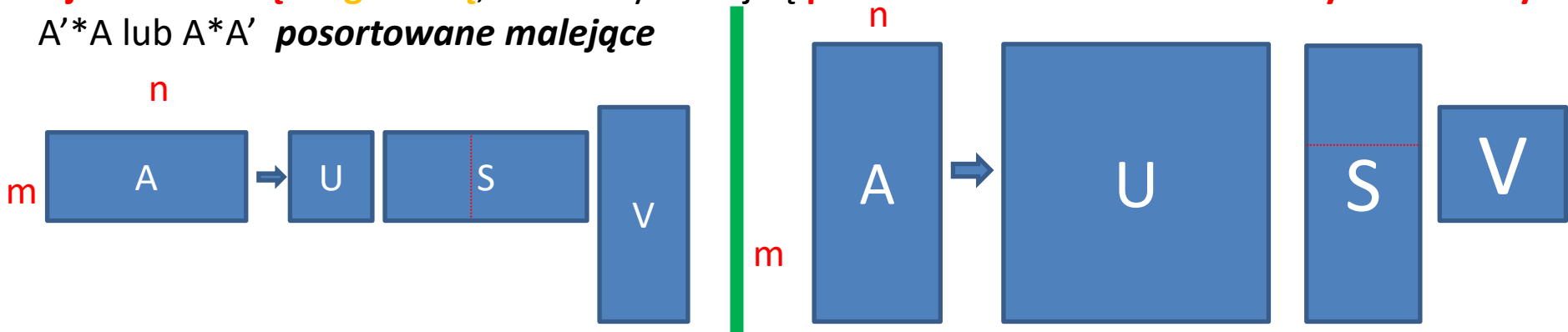
U i V - macierze ortonormalne (są one ortogonalne czyli $U^{-1}=U'$, $V^{-1}=V'$ oraz długość każdego wektora w macierzy jest równa 1

$$U^T U = I, V^T V = I$$

U - ortogonalna macierz wektorów własnych macierzy A^*A' ,

V - ortogonalna macierz wektorów własnych macierzy $A'A^*$

S jest macierzą diagonalną, elementy której są pierwiastkami z wartości własnych macierzy $A'A^*$ lub A^*A' posortowane malejąco



Algorytm

Algorytm znajdowania SVD macierzy $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ (lub macierzy zespolonej).

- 1) Znajdujemy wartości własne λ_i macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ albo $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ (w zależności od tego, która macierz ma niższy stopień).
- 2) Określamy liczbę r niezerowych wartości własnych macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (lub $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$).
- 3) Znajdujemy ortonormalne wektory własne macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (lub $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$) odpowiadające znalezionym wartościom własnym. Tworzymy macierz ortogonalną (unitarną) $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, której kolejne kolumny tworzą wektory własne macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ uporządkowane w malejącym porządku odpowiadających im wartości własnych.
- 4) Tworzymy pseudodiagonalną macierz $\mathbf{\Sigma} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ umieszczając na diagonalnej pierwiastki kwadratowe $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ z wartości własnych macierzy $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (lub $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$) w porządku malejącym.
- 5) Znajdujemy pierwszych r wektorów kolumnowych macierzy $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ z równań
$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} \mathbf{A} \mathbf{v}_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \dots, r.$$
- 6) Dodajemy do macierzy $\mathbf{U}$ pozostałe $m - r$ wektorów wykorzystując proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Modyfikacja algorytmu:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \sigma_{v_j}^2 \mathbf{v}_j \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j = \sigma_{u_j}^2 \mathbf{u}_j$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad m=2, n=3$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$11x_1 + x_2 = \lambda x_1$$

$$x_1 + 11x_2 = \lambda x_2$$

$$\begin{vmatrix} (11 - \lambda) & 1 \\ 1 & (11 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\lambda = 10, \lambda = 12}$$

Przykład (cd.)

$$\lambda = 12$$

$$(11 - 12)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$



$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$11x_1 + x_2 = \lambda x_1$$

$$x_1 + 11x_2 = \lambda x_2$$

$$\lambda = 10$$

$$(11 - 10)x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$



$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Przykład (cd.)

Ortogonalizacja Grama-Schmidta wektorów własnych

$$\begin{matrix} \boxed{\lambda = 12} & \boxed{\lambda = 10} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{[1, 1]}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{[1, 1]}{\sqrt{2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\boxed{\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 * \vec{u}_1 =}$$

$$[1, -1] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cdot [1, -1] * \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$[1, -1] - 0 * \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = [1, -1] - [0, 0] = [1, -1]$$

Przykład (cd.)

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$U'A=SV'$$

$$U'*A=$$

1.41421356237309
2.82842712474619

2.82842712474619
-1.41421356237309

```
>> [U S V]=svd([3 1 1;-1 3 1])
```

U =

-0.7071 -0.7071
-0.7071 0.7071

S =

3.4641 0 0
0 3.1623 0

V =

-0.4082 -0.8944 -0.1826
-0.8165 0.4472 -0.3651
-0.4082 0.0000 0.9129

1.41421356237309
0

Przykład (cd.)

$$\boxed{A^T A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$10x_1 + 2x_3 = \lambda x_1$$

$$10x_2 + 4x_3 = \lambda x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \lambda x_2$$

Przykład (cd.)

$$\begin{vmatrix} (10 - \lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (10 - \lambda) & 4 \\ 2 & 4 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(10 - \lambda) \begin{vmatrix} (10 - \lambda) & 4 \\ 4 & (2 - \lambda) \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & (10 - \lambda) \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(10 - \lambda)[(10 - \lambda)(2 - \lambda) - 16] + 2[0 - (20 - 2\lambda)] =$$
$$\lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12) = 0,$$

$$\boxed{\lambda = 0, \lambda = 10, \lambda = 12}$$

Przykład (cd.)

$$\lambda = 12$$

$$(10 - 12)x_1 + 2x_3 = -2x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 1, x_3 = 1$$

$$(10 - 12)x_2 + 4x_3 = -2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_2 = 2x_3$$

$$x_2 = 2$$

$$\lambda = 12, \vec{v}_1 = [1, 2, 1]$$

$$\lambda = 10, \vec{v}_2 = [2, -1, 0]$$

$$\lambda = 0, \vec{v}_3 = [1, 2, -5]$$

Przykład (cd.)

Ortogonalizacja Grama-Schmidta wektorów własnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 * \vec{u}_1 = [2, -1, 0]$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0 \right]$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_3 * \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_3 * \vec{u}_2 = \left[\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{10}{3} \right]$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{|\vec{w}_3|} = \left[\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right]$$

Przykład (cd.)

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

```
>> [U S V]=svd([3 1 1;-1 3 1])
```

U =

```
-0.7071 -0.7071  
-0.7071  0.7071
```

S =

```
3.4641    0    0  
    0 3.1623    0
```

V =

```
-0.4082 -0.8944 -0.1826  
-0.8165  0.4472 -0.3651  
-0.4082  0.0000  0.9129
```

Przykład (cd.)

```
>> eig(A*A')
```

```
ans =
```

```
10.0000
```

```
12.0000
```

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{10}}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

A =

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

>> [U,S,V]=svd(A)

U =

$$\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

S =

$$\begin{bmatrix} 3.4641 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1623 & 0 \end{bmatrix}$$

V =

$$\begin{bmatrix} -0.4082 & -0.8944 & -0.1826 \\ -0.8165 & 0.4472 & -0.3651 \\ -0.4082 & 0.0000 & 0.9129 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
>> eig(A*A')
```

```
ans =
```

```
-0.0000
```

```
17.4786
```

```
52.5214
```

$$A = \begin{pmatrix} -.4256 & .6968 & -.5774 \\ -.3906 & -.7170 & -.5774 \\ -.8162 & -.0202 & .5774 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.247 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1807 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -.8520 & .4710 & -.2287 \\ -.4948 & -.8671 & .0572 \\ -.1714 & .1618 & .9718 \end{pmatrix}^T$$

Przykład 3

$$[U,S,V] = \text{svd}(A)$$

$$A_{mn} = U_{mm} S_{mn} V_{nn}^T$$

A =

2	1	1
10	3	4
8	1	4
6	0	8
4	6	8

U =

-0.1224	0.0453	0.1408	0.2682	-0.9440
-0.5523	0.4683	0.4153	0.4686	0.2892
-0.4480	0.4001	-0.0570	-0.7825	-0.1536
-0.4860	-0.1245	-0.8211	0.2720	0.0119
-0.4931	-0.7766	0.3609	-0.1486	0.0383

```
>> U(1,1)^2+U(2,1)^2+U(3,1)^2+U(4,1)^2+U(5,1)^2  
ans =  
1.0000
```

V =

-0.7377	0.6643	0.1207
-0.2686	-0.4528	0.8502
-0.6194	-0.5947	-0.5125

S =

19.3031	0	0
0	6.2039	0
0	0	4.1114
0	0	0
0	0	0

Właściwości SVD

$$U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

with U and V orthogonal matrices

singular values → $\left(\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{array} \right)$

$$A v_i = \sigma_i u_i ,$$
$$A^T u_i = \sigma_i v_i ,$$
$$A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$$

σ_i are eigenvalues of $A^T A$

SVD za pomocą QR

```
>> A
```

```
A =
```

```
3
4
```

```
>> A'*A
```

```
ans =
```

```
25
```

```
>> A*A'
```

```
ans =
```

```
9 12
12 16
```

QR dla wartości własnych

```
>> [U,S,V] = svd(A)
```

```
U =
```

```
0.6
0.8
```

```
-0.8
0.6
```

```
S =
```

```
5
0
```

```
V =
```

```
1
```

```
>> U=[0.6 0;0.8 0]
```

```
U =
```

```
0.6 0
0.8 0
```

```
>> S=[5 0]'
```

```
>> V=1
```

```
>> U*S*V
```

```
ans =
```

```
3
4
```

```
A =
9      12
12      16

Q =
0.6    -0.8
0.8     0.6

R =
15      20
0      9.93014e-016

Ak
9      12
12      16

Ak+1
25      -2.66454e-015
7.94411e-016    5.95808e-016

Q =
1      1.06581e-016
-1.06581e-016    1

R =
25      7.94411e-016
0      5.95808e-016

Ak
25      7.94411e-016
-2.66454e-015    5.95808e-016

Ak+1
25      3.45895e-015
-6.35021e-032    5.95808e-016
```

m=2, n=1

Sigma1=5, Sigma2=0

$$A^T A v_j = \sigma_j^2 v_j$$

v=1 (warunek normalizacji) dla Sigma1=5

$$A A^T u_j = \sigma_j^2 u_j$$

$$9 \cdot u_{11} + 12 \cdot u_{21} = 25 \cdot u_{11}$$

$$12 \cdot u_{11} + 16 \cdot u_{21} = 25 \cdot u_{21}$$

Musimy dodać warunek normalizacji

$$u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1$$

Więc mamy **u11=0.6, u21=0.8**

Dla Sigma2=0 u12 i u22 są dowolne bo mnożymy na zerową komponenty Sigma (choć pamiętamy o normalizacji – dlaczego?)

SVD za pomocą QR (cd)

```
>> A
```

```
A =
```

```
1
2
3
```

```
>> A'*A
```

```
ans =
```

```
14
```

$$A^T A v_j = \sigma_j^2 v_j \Rightarrow v=1$$

```
>> A*A'
```

```
ans =
```

```
1  2  3
2  4  6
3  6  9
```

$$1*u_{11}+2*u_{21}+3*u_{31}=14*u_{11}$$

$$2*u_{11}+4*u_{21}+6*u_{31}=14*u_{21}$$

$$3*u_{11}+6*u_{21}+9*u_{31}=14*u_{31}$$

$$u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{31}^2 = 1$$

$$S1 = \sqrt{14}$$

$$S2 = 0$$

$$S3 = 0$$

$$u_{31} = 0.8018$$

$$u_{21} = 0.5345$$

$$u_{11} = 0.2673$$

```
>> [U,S,V] = svd(A)
```

```
U =
```

```
0.2673 -0.5345 -0.8018
0.5345 0.7745 -0.3382
0.8018 -0.3382 0.4927
```

```
S =
```

```
3.7417
0
0
```

```
V =
```

```
1
```

```
>> sqrt(14)
```

```
ans =
```

```
3.7417
```

```
A =
1  2  3
2  4  6
3  6  9

Q =
0.267261 -0.169031 -0.948683
0.534522 0.845154 -2.30056e-016
0.801784 -0.507093 0.316228

R =
3.74166 7.48331 11.225
0 2.197e-016 -2.19916e-019
0 0 7.73673e-016

Ak
1  2  3
2  4  6
3  6  9

Ak+1
14 -9.99634e-016 -4.23294e-015
1.17258e-016 1.85792e-016 -6.95437e-020
6.20319e-016 -3.92324e-016 2.44657e-016

Q =
1  7.14025e-017 3.02353e-016
-7.14025e-017 1 0
-3.02353e-016 -2.15887e-032 1

R =
14 1.17258e-016 6.20319e-016
0 1.85792e-016 -3.92324e-016
0 0 2.44657e-016

Ak
14 1.17258e-016 6.20319e-016
-9.99634e-016 1.85792e-016 -3.92324e-016
-4.23294e-015 -3.54534e-032 2.44657e-016

Ak+1
14 1.11689e-015 4.85326e-015
1.05354e-031 1.85792e-016 -3.92324e-016
-7.39728e-032 -5.28184e-048 2.44657e-016
```

Pozostałe kolumny w U mogą być dowolne bo mnożymy na $s_2=0$ i $s_3=0$ (ale znormalizowane – dla czego?)

Uogólniona macierz odwrotna

$$A\overset{\text{r}}{x} = \overset{\text{r}}{b}$$

$$A^+ = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

$$A = U\Sigma V^*$$

$$A^+ = V\Sigma^+ U^*$$

Dla obliczenia Σ^+ obracamy elementy z Σ i transponujemy

Przykład

```
> A=[1 2;3 4]
1 2
3 4
>> [U,S,V] = svd(A)
U =
-0.404553584833757 -0.914514295677305
-0.914514295677305 0.404553584833757
S =
5.46498570421904 0
0 0.365966190626258
V =
-0.576048436766321 0.817415560470363
-0.817415560470363 -0.576048436766321
```

```
>> A^-1
```

```
-2 1
1.5 -0.5
```

```
>> V*S^-1*U'
```

```
-2 1
1.5 -0.5000000000000001
```

```
>> U*S*V'
```

```
1 2
3 4
```

SVD dla układów równań **$Ax=b$**

SVD Solver

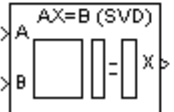
Solve $AX=B$ using singular value decomposition

Library

Math Functions / Matrices and Linear Algebra / Linear System Solvers

dsp solvers

Description



The diagram shows a box labeled 'AX=B (SVD)' with input 'A' on the left, input 'B' on the right, and output 'X' on the right side of the box.

Dla **$n \times n$** macierzy

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

$$[U, S, V] = \text{svd}(A)$$

Dla **$m \times n$** macierzy

$$Ax = y$$

$$U \Sigma V^T x = y$$

$$\Sigma V^T x = U^T y$$

$$\tilde{x} = \Sigma^{-1} \tilde{y}$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{y}_i / \sigma_i$$

$$x_{\text{svd}} = A^+ b = V \Sigma^+ U^T b$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

Przykład

```
> A=[1 1;2 2]
     1  1
     2  2
```

```
>> A^-1
     Inf  Inf
     Inf  Inf
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

SVD

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ -2y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}$$

$$x_i = y_i / \sigma_i$$

```
> U'*y
     5
     0
```

$$x_1 = 5/1 = 5$$

```
>> U=[1 -2;2 1]
```

```
     1  -2
```

```
     2   1
```

```
>> S=[1 0;0 0]
```

```
     1   0
```

```
     0   0
```

```
>> V=[1 1;1 -1]'
```

```
     1   1
```

```
     1  -1
```

```
>> U*S*V'
```

```
     1   1
```

```
     2   2
```

Krok 1: Obliczamy $\det(A)$. Jeżeli $\det(A) = 0$, to A^{-1} nie istnieje. Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to przechodzimy do następnego kroku.

Krok 2: Dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ obliczamy $\det(A_{ij})$, czyli wyznaczniki macierzy powstających z macierzy A przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny. Obliczamy też **dopełnienia algebraiczne** d_{ij} elementu a_{ij} macierzy A : $d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.

Krok 3: Tworzymy **macierz dopełnień** $D(A)$

Krok 4: Wypisujemy macierz odwrotną do macierzy A

$$D(A) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T.$$

Przykład (cd)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

SVD

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2$$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^*$$

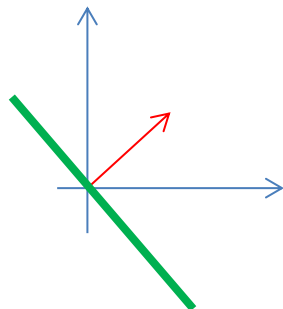
$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$U \Sigma V^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\Sigma V^T \mathbf{x} = U^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \Sigma^{-1} \mathbf{y}$$

$$x_i = y_i / \sigma_i$$



```
>> [U,S,V] = svd(A)
```

U =

```
-0.447213595499958    -0.894427190999916
-0.894427190999916     0.447213595499958
```

S =

```
3.16227766016838      0
0      8.22677308023619e-17
```

V =

```
-0.707106781186547    -0.707106781186547
-0.707106781186547     0.707106781186547
```

```
>> U*S*V'
```

```
1      1
2      2
```

```
>> Ag=V*S^-1*U'
```

```
7.68777169207538e+15    -3.84388584603769e+15
-7.68777169207538e+15     3.84388584603769e+15
```

```
>> Ag*y
```

```
-5
```

```
5
```

```
>> yd=U'*y
```

```
-2.23606797749979
5.55111512312578e-16
```

```
>> S1=S^-1
```

S1 =

```
0.316227766016838      0
0      1.21554343391624e+16
```

```
>> xd=S1*yd
```

```
-0.707106781186547
```

```
6.7476215388287
```

Przykład 2

$$Ax=b$$

```
>> A
```

```
A =
```

```
-1  3  4  1
 2 -4  3  2
 1 -1  7  3
```

```
>> b
```

```
b =
```

```
1
2
3
```

```
>>
```

```
>> [u s v]=svd(A)
```

```
u =
```

```
0.3462 -0.7395  0.5774
0.4673  0.6695  0.5774
0.8135 -0.0699 -0.5774
```

```
s =
```

```
9.5103      0      0      0
 0  5.4363      0      0
 0      0  0.0000      0
```

```
v =
```

```
0.1474  0.3695 -0.9169  0.0317
-0.1729 -0.8879 -0.3788  0.1958
0.8918 -0.2647  0.0241 -0.3662
0.3913  0.0717  0.1232  0.9092
```

Przykład 2 (cd)

```
>> s(1,1)=1/s(1,1)  
s(2,2)=1/s(2,2)
```

s =

0.1051	0	0	0
0	5.4363	0	0
0	0	0.0000	0

s =

0.1051	0	0	0
0	0.1839	0	0
0	0	0.0000	0

```
>> s1=s'
```

s1 =

0.1051	0	0
0	0.1839	0
0	0	0.0000
0	0	0

Przykład 2 (cd)

```
>> A
```

```
A =
```

```
-1  3  4  1  
 2 -4  3  2  
 1 -1  7  3
```

```
>> x=v*s1*u'*b
```

```
x =
```

```
0.0842  
-0.1313  
0.3300  
0.1582
```

```
>> A*x
```

```
ans =
```

```
1.0000  
2.0000  
3.0000
```

```
>> b
```

```
b =
```

```
1  
2  
3
```

```
>>
```

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A w równaniu $Ax = b$

jest charakterystyczną własnością macierzy informującą o tym *jakie wzmocnienie będzie miała zmiana normy macierzy A na normę rozwiązania x .*

Wskaźnik uwarunkowania macierzy definiuje się bardziej precyzyjnie jako maksymalny **stosunek błędu względnego wektora rozwiązania x do błędu względnego b**

Założmy, że **e jest błędem b** . Stąd błąd w rozwiązaniu **$A^{-1}b$** wynosi **$A^{-1}e$** . Stąd stosunek relatywnego błędu rozwiązania do relatywnego błędu w **b** wynosi:

$$\begin{array}{l} x, f(x) \\ \tilde{x}, f(\tilde{x}) \end{array}$$

Notacja:
 $x \rightarrow b, f(x) \rightarrow A^{-1}x$



$$\frac{\|A^{-1}e\| / \|A^{-1}b\|}{\|e\| / \|b\|}$$

$$w = \frac{|\delta_f|}{|\delta_x|} = \frac{|(f(x) - f(\tilde{x})) / f(x)|}{|(x - \tilde{x}) / x|}$$



Maksymalna wartość

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Dowód

$$\begin{aligned} \max_{e, b \neq 0} \left\{ \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \right\} &= \max_{e \neq 0} \left\{ \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \right\} \max_{b \neq 0} \left\{ \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \right\} \\ &= \max_{e \neq 0} \left\{ \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \right\} \max_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} \\ &= \|A^{-1}\| \|A\| \end{aligned}$$

SVD a źle uwarunkowany problem

Problem matematyczny jest **źle uwarunkowany**, jeśli niewielka zmiana na wejściu prowadzi do dużej zmiany na wyjściu.

$$\text{cond}(A) \gg 1$$

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$A = U\Sigma V^T,$$

$$U^T U = U U^T = I,$$

$$V^T V = V V^T = I,$$

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T,$$

$$AV = U\Sigma,$$

$$A^T U = V\Sigma^T,$$

$$\Sigma^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_k}\right)$$

$$\text{cond}(A) := \frac{d_1}{d_k}$$

Przykład

```
>> A
```

```
A =
```

1	0.99
0.99	1

```
>> norm(A,2)= 1.99
```

```
>> norm(A^-1,2)=99.99999999999999
```

```
>> norm(A,2)*norm(A^-1,2)=199
```

```
>> [U,S,V] = svd(A)
```

```
U =
```

-0.707106781186548	-0.707106781186547
-0.707106781186547	0.707106781186548

```
S =
```

1.99	0
0	0.009999999999999989

```
V =
```

-0.707106781186547	-0.707106781186548
-0.707106781186548	0.707106781186547

```
>> 1.99/0.009999999999999989 =199.0000000000002
```

```
>> eig(A)
```

0.009999999999999995
1.99

Przykład (cd)

$$Aw = d$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

```
>> inv(A)*d
25.3769
-24.6231
```

$$\sigma_1 = 1.99 \quad \sigma_2 = 0.01 \quad 1/\sigma_1 \approx 0.5, 1/\sigma_2 = 100$$

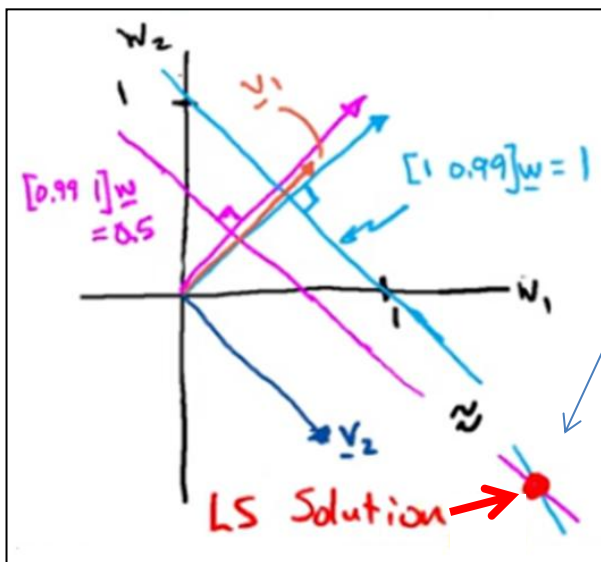
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$$

$$u_1^\top d = \frac{1.5}{\sqrt{2}}, u_2^\top d = \frac{0.5}{\sqrt{2}}$$

$$w = v_1 \frac{u_1^\top d}{\sigma_1} + v_2 \frac{u_2^\top d}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3/8 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 25$$

```
>> [1 1]'*3/8+[1 -1]'*25
25.3750
-24.6250
```

$\|w\|_2 \uparrow \text{ gdy } \sigma_2 \downarrow$



Przykład (cd)

```
>> A=[1 0.99;0.99 1]
      1.0000  0.990
      0.990  1.0000
>> [u s v]=svd(A)
```

```
u =

      -0.7071  -0.7071
      -0.7071   0.7071
```

```
s =

      1.9900   0
           0  0.0100
```

```
v =

      -0.7071  -0.7071
      -0.7071   0.7071
```

$$A = U\Sigma V^T,$$
$$U^T U = U U^T = I,$$
$$V^T V = V V^T = I,$$
$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

```
>> inv(A)*d
```

```
ans =
```

```
25.3769
-24.6231
```

```
>> v*s^-1*u'
      50.2513  -49.7487
     -49.7487   50.2513
>> A^-1
      50.2513  -49.7487
     -49.7487   50.2513
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd)

```
>> A=[1 0.999;0.999 1]
      1.0000  0.9990
      0.9990  1.0000
>> [u s v]=svd(A)
```

u =

```
-0.7071 -0.7071
-0.7071  0.7071
```

s =

```
1.9990    0
    0  0.0010
```

v =

```
-0.7071 -0.7071
-0.7071  0.7071
```

$$A = U\Sigma V^T,$$
$$U^T U = U U^T = I,$$
$$V^T V = V V^T = I,$$
$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

```
>> inv(A)*d
```

ans =

```
250.3752
-249.6248
```

```
>> v*s^-1*u'
      500.2501 -499.7499
     -499.7499  500.2501
>> A^-1
      500.2501 -499.7499
     -499.7499  500.2501
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd)

$$Aw = d$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.999 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

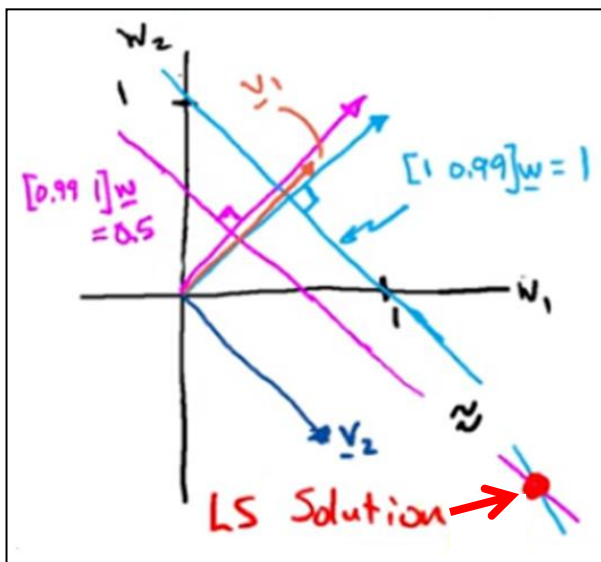
$$\sigma_1 = 1.999 \quad \sigma_2 = 0.001$$

$$1/\sigma_1 \approx 0.5, 1/\sigma_2 = 1000$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$$

$$u_1^\top d = \frac{1.5}{\sqrt{2}}, u_2^\top d = \frac{0.5}{\sqrt{2}}$$

$$w = v_1 \frac{u_1^\top d}{\sigma_1} + v_2 \frac{u_2^\top d}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3/8 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 250$$



Przykład (cd)

$$Aw = d$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$>> \text{inv}(A)*d$$

$$\begin{bmatrix} 25.3769 \\ -24.6231 \end{bmatrix}$$

$$d =$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.6000 \end{bmatrix}$$

$$>> \text{inv}(A)*d$$

$$\begin{bmatrix} 20.4020 \\ -19.5980 \end{bmatrix}$$

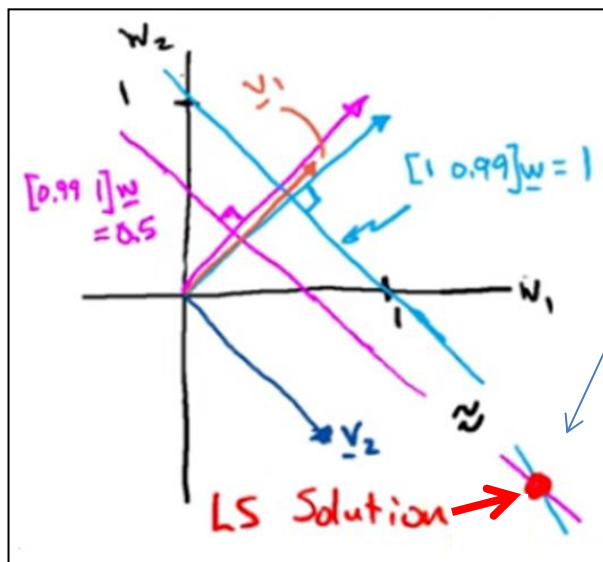
$$\sigma_1 = 1.99 \quad \sigma_2 = 0.01$$

$$1/\sigma_1 \approx 0.5, 1/\sigma_2 = 100$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$u_1^T d = \frac{1.6}{\sqrt{2}}, u_2^T d = \frac{0.4}{\sqrt{2}}$$

$$w = v_1 \frac{u_1^T d}{\sigma_1} + v_2 \frac{u_2^T d}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3.2/8 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 20$$



Minimalizacja błędu

$$\min \|Aw - d\|_2^2 \Rightarrow w = (A^\top A)^{-1} A^\top d$$

SVD

$$A = U\Sigma V^\top \Rightarrow w = V\Sigma^{-1}U^\top d = \sum_{i=1}^P \frac{1}{\sigma_i} v_i (u_i^\top d)$$

$N \times P$, rank P

$$\Rightarrow \| \underline{w} \|_2^2 = \sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)^2 (u_i^\top d)^2$$

small $\sigma_i \Rightarrow$ large $\|w\|_2$

Prognozowanie z błędem

$$y = (x + \varepsilon)^\top w = x^\top w + \varepsilon^\top w$$

$$|\varepsilon^\top w|^2 = \|w\|_2^2 \|\varepsilon\|_2^2 \cos^2 \theta$$

large $\| \underline{w} \|_2^2 \Rightarrow$ sensitive to errors

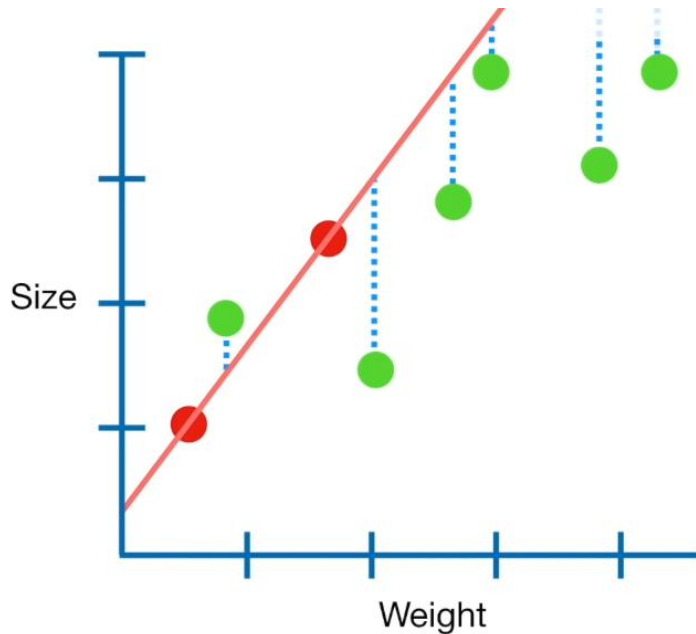
What if $\text{rank}(A) < P$?

$\sigma_p = 0$ – no unique solution

Regularyzacja

Regularyzacja – wprowadzenie dodatkowej informacji do rozwiązywanego zagadnienia źle postawionego w celu polepszenia jakości rozwiązania.

Uczymy na dwóch punktach, testujemy na pozostałych



Size = y-axis intercept + slope × **Weight**

...it minimizes...

the sum of the squared residuals



Size = y-axis intercept + slope × **Weight**

...it minimizes...

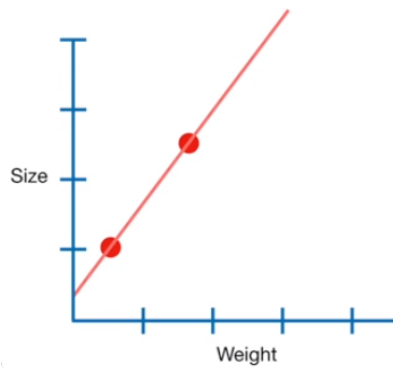
the sum of the squared residuals

+

$\lambda \times \text{the slope}^2$

Przykład

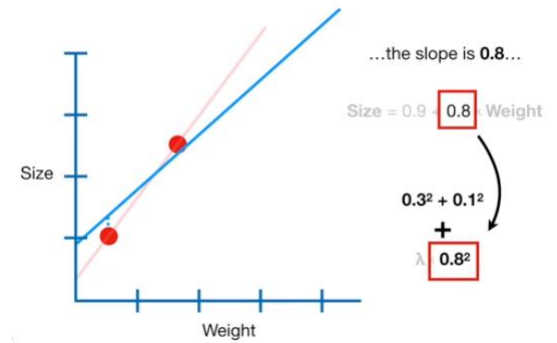
$$Y=a+bx$$



$$\text{Size} = 0.4 + 1.3 \times \text{Weight}$$

...and when we do
the math we get...

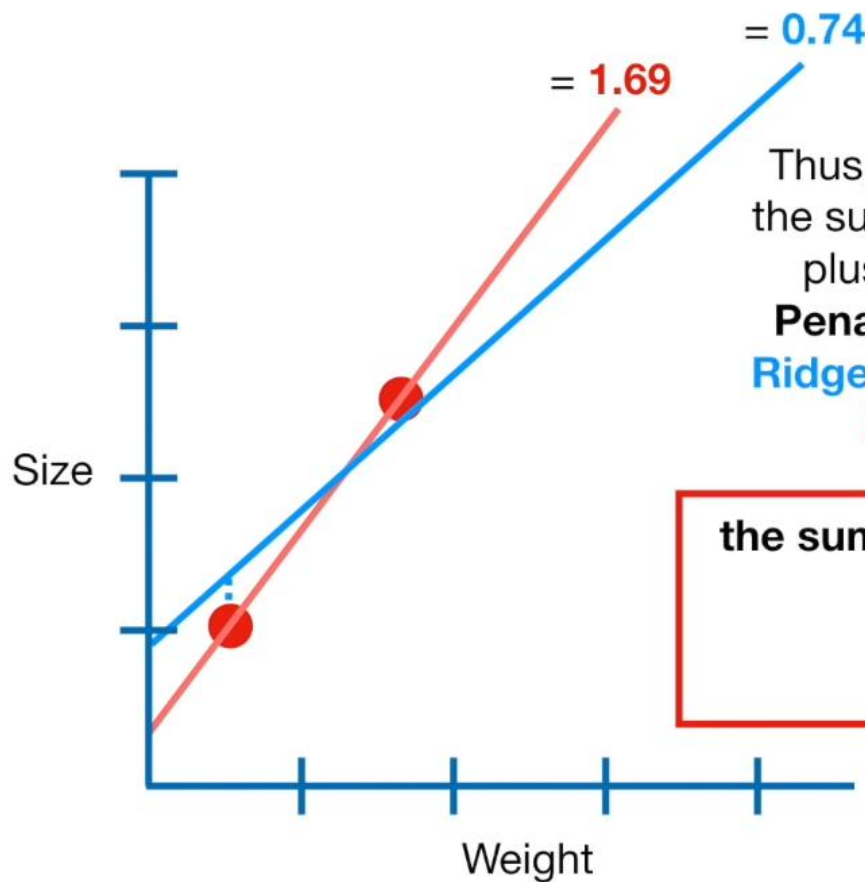
$$\begin{array}{rcl} 0 & & \\ + & & \\ 1 \times 1.3^2 & = & 0 + 1.69 = 1.69 \end{array}$$



...the slope is 0.8...

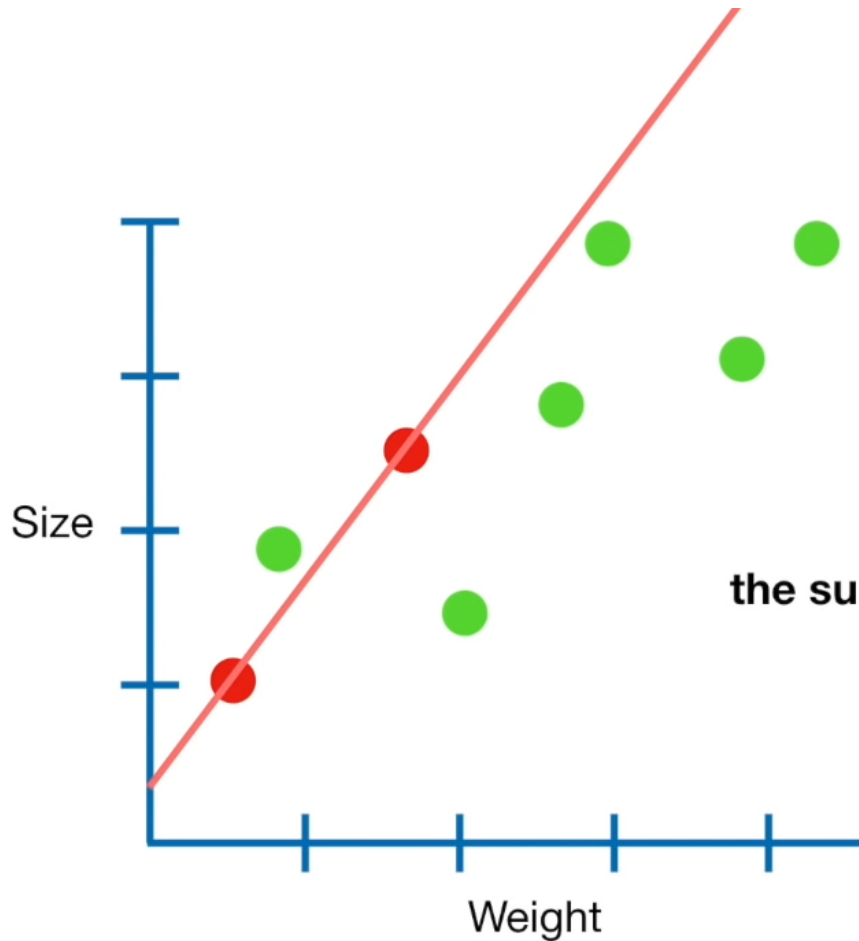
$$\text{Size} = 0.9 + 0.8 \times \text{Weight}$$

$$\begin{array}{rcl} 0.3^2 + 0.1^2 & & \\ + & & \\ \lambda \times 0.8^2 & & \end{array}$$



Thus, if we wanted to minimize the sum of the squared residuals plus the **Ridge Regression Penalty**, we would choose the **Ridge Regression Line** over the **Least Squares Line**.

$$\begin{aligned} &\text{the sum of the squared residuals} \\ &+ \\ &\lambda \times \text{the slope}^2 \end{aligned}$$



We just try a bunch of values for λ and use **Cross Validation**, typically **10-fold Cross Validation**, to determine which one results in the lowest **Variance**.

the sum of the squared residuals

+

$\lambda \times \text{the slope}^2$

Walidacja krzyżowa to metoda ponownego próbkowania, która wykorzystuje różne części danych do testowania i uczenia modelu w różnych iteracjach.

Regularyzacja za pomocą obciętego svd (truncated SVD)

Regularyzacja – wprowadzenie dodatkowej informacji do rozwiązywanego zagadnienia źle postawionego w celu polepszenia jakości rozwiązania.

Zastąp $\sum_{i=1}^P \frac{1}{\sigma_i} v_i (u_i^\top d)$ na $\sum_{i=1}^R \frac{1}{\sigma_i} v_i (u_i^\top d)$, $R < P$

unikając **zbyt małych wartości osobliwych**.

Zastąp $A = \sum_{i=1}^P \sigma_i u_i v_i^\top$ na $A_R = \sum_{i=1}^R \sigma_i u_i v_i^\top$ za pomocą rankingowej aproksymacji

Zwiększ $\min_w \|Aw - d\|_2^2$

Spróbuj wybrać R za pomocą intuicji lub cross-walidacji

Przykład

$$w = v_1 \frac{u_1^T d}{\sigma_1} + v_2 \frac{u_2^T d}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3/8 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 25$$

```
>> V(:,1)*U(:,1)'*d/S(1,1)
```

```
ans =
```

```
0.376884422110553  
0.376884422110553
```

```
>> V(:,2)*U(:,2)'*d/S(2,2)
```

```
ans =
```

```
25.00000000000003  
-25.00000000000003
```

```
>> x=A^-1*(d+[0.1 0.3]')
```

```
x =
```

```
15.4773869346734  
-14.5226130653266
```

```
>> V(:,1)*U(:,1)'*(d+[0.1 0.3]')/S(1,1)
```

```
ans =
```

```
0.477386934673367  
0.477386934673367
```

```
>> V(:,2)*U(:,2)'*(d+[0.1 0.3]')/S(2,2)
```

```
ans =
```

```
15.00000000000002  
-15.00000000000002
```

Model analizy eksperymentu

$$y_i = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + \dots + x_{Ki}\beta_K + \varepsilon_i, \text{ dla } i = 1, \dots, N.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1N} & \cdots & x_{KN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

$\mathbf{y}_{(N \times 1)}$ jest wektorem obserwacji dla zmiennej zależnej

$\mathbf{X}_{(N \times K)}$ - macierzą obserwacji dla zmiennych niezależnych

$\boldsymbol{\beta}_{(K \times 1)}$ - wektorem nieznanych parametrów

$\boldsymbol{\varepsilon}_{(N \times 1)}$ - wektorem zaburzeń losowych

Przy takim zapisie, wektor kolumnowy $\mathbf{y}$ zawiera wszystkie obserwacje dla zmiennej zależnej, zaś kolejne kolumny macierzy obserwacji $\mathbf{X}$ zawierają obserwacje dla kolejnych zmiennych objaśniających w modelu. Z reguły macierz $\mathbf{X}$ jest macierzą prostokątną o liczbie wierszy dużo większej niż liczba kolumn, ponieważ, zazwyczaj liczba obserwacji jest dużo większa niż jest zmiennych objaśniających w modelu.

Przykłady

$$\text{wydatki}_i = \beta_1 + \beta_2 \times \text{dochód}_i + \varepsilon_i$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 639.09 \\ 664.47 \\ 467.55 \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 890.6 \\ 1 & 2300 \\ 1 & 1814.5 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 639.09 \\ 664.47 \\ 467.55 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 890.6 \\ 1 & 2300 \\ 1 & 1814.5 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

$$\text{bezrobocie}_t = \beta_1 + \beta_2 \text{pkb}_t + \beta_3 \text{inflacja}_t + \varepsilon_t$$

$$\text{bezrobocie}_t = 19.663 - 0.411 \times \text{pkb}_t - 0.232 \times \text{inflacja}_t$$

Przykład2

$$Ax = b + \varepsilon$$

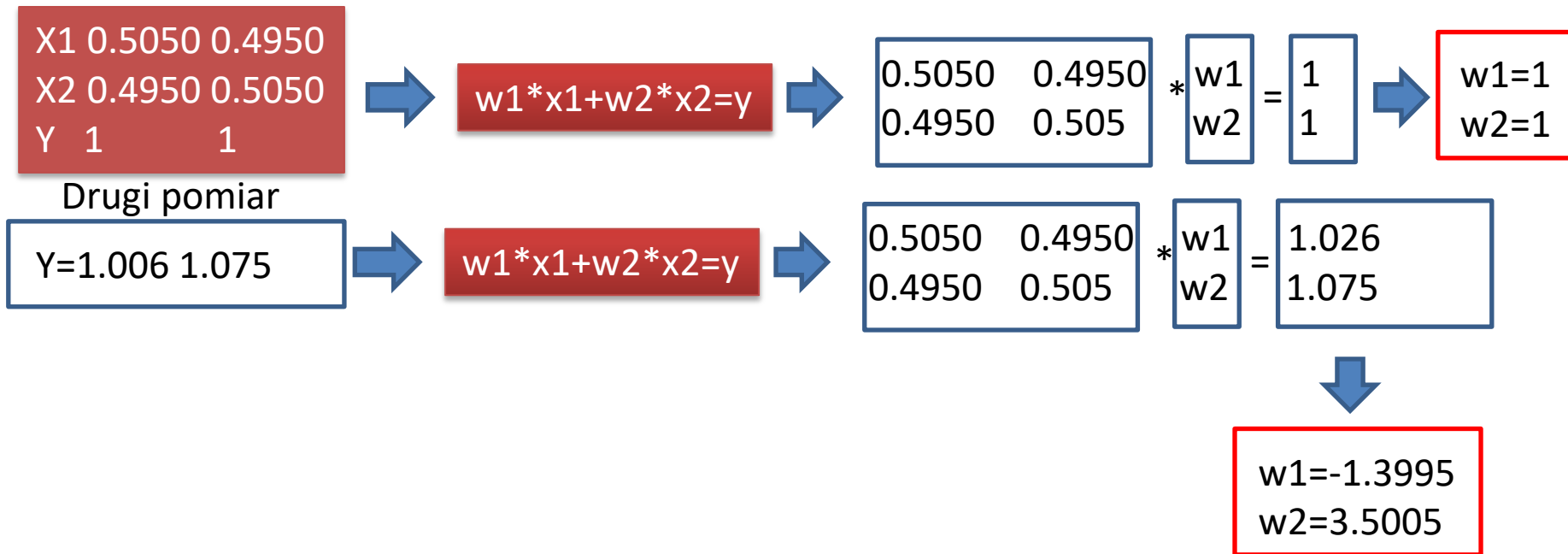
Let A be defined via $A = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + 10^{-2} \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T$ with $\mathbf{v}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$, $\mathbf{v}_2 = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$.

If $x = [1, 1]^T$, then clearly $\mathbf{b} = A\mathbf{x} = [1, 1]^T$ and $A^{-1}\mathbf{b} = [1, 1]^T$

However if we add one realization of ϵ given by $\epsilon = [0.026, 0.075]^T$ then $A^{-1}\mathbf{b} = [-1.400, 3.501]^T$.

Interpretacja jako eksperymentu

Interpretacja jako eksperymentu



Wpływ szumu

```
>> V1=[1/sqrt(2) 1/sqrt(2)]'
V2=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2)]'
A=V1*V1'+10^-2*V2*V2'
V1 =
    0.7071
    0.7071
V2 =
   -0.7071
    0.7071
A =
    0.5050    0.4950
    0.4950    0.5050
>> A^-1*[1 1]'
```

ans =

1
1

```
>> [u s v]=svd(A)

u =

   -0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071

s =

    1.0000    0
    0    0.0100

v =

   -0.7071   -0.7071
   -0.7071    0.7071
```

```
>> be=[1 1]'+[0.026 0.075]'
```

be =

1.0260
1.0750

```
>> A^-1*be
```

ans =

-1.3995
3.5005

Rozkład obciętej wartości osobliwej

Truncated singular value decomposition (TSVD)

Duża wariancja wektora v_2 (którego wartość singularna 10^{-2})

```
> [V e]=eig(A)
```

V =

```
-0.7071  0.7071  
 0.7071  0.7071
```

e =

```
0.0100    0  
 0  1.0000
```

Usuwamy ten wektor i zostawimy

$$A_{\text{filt}} = \sigma_1 v_1 v_1^T$$

$$x_{LS\text{filtered}} = A_{\text{filt}}^\dagger \mathbf{b} = \sigma_1^{-1} (v_1^T \mathbf{b}) v_1 = [1.0505, 1.0505]^T$$

$$\mathbf{v}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T, \mathbf{v}_2 = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T.$$

$$w = \mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{u}_1^T \mathbf{d}}{\sigma_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\mathbf{u}_2^T \mathbf{d}}{\sigma_2}$$

```
>> q=1/sqrt(2)
```

```
q =
```

```
0.7071
```

```
>> [q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[q q]'+100*[-q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[-q q]'
```

```
-1.3995
```

```
3.5005
```

```
>> [q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[q q]'
```

```
1.0505
```

```
1.0505
```

Regularyzacja ,regresja grzbietu' (ridge regression)

$$\min_w \|Aw - d\|_2^2 + \lambda \|w\|_2^2 \Rightarrow w = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T d$$

Sterowanie normą

SVD

$$A^T A = V \Sigma^2 V^T, \lambda I = V \lambda I V^T$$

$$w = \left(V (\Sigma^2 + \lambda I) V^T \right)^{-1} V \Sigma U^T d = V (\Sigma^2 + \lambda I)^{-1} \Sigma U^T d = V D U^T d$$

$$D = (\Sigma^2 + \lambda I)^{-1} \Sigma$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 + \lambda} & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_p^2 + \lambda} & \\ 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \lambda} \end{bmatrix}$$

$$w = \sum_{i=1}^P \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} v_i (u_i^T d)$$

$$\sigma_i \rightarrow 0, \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} \rightarrow \sigma_i / \lambda$$

Zwiększenie

$$\|Aw - d\|_2^2$$

$$\mathbf{v}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T, \mathbf{v}_2 = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T.$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \sigma_1 \frac{\mathbf{u}_1^T \mathbf{d}}{\sigma_1^2 + \lambda} + \mathbf{v}_2 \sigma_2 \frac{\mathbf{u}_2^T \mathbf{d}}{\sigma_2^2 + \lambda}$$

lambda=0.1;

s1/(s1^2+lambda)*[q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[q q]'

s1/(s1^2+lambda)*[q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[q q]'+s2/(s2^2+lambda)*[-q q]*[1+0.026 1+0.075]'*[-q q]'

lambda=0.0;

ans =

1.0505

1.0505

ans =

-1.3995

3.5005

lambda=0.1;

ans =

0.9550

0.9550

ans =

0.9526

0.9574

lambda=0.01;

ans =

1.0401

1.0401

ans =

1.0158

1.0644

```
A=[1 0.99;0.99 1]
```

```
>> AtA=A'*A
```

```
AtA =
```

1.9801	1.98
1.98	1.9801

```
>> L=0;D=(S+[L 0;0 L])^-1*sqrt(S);V*D*U'*d
```

```
ans =
```

25.3768844221173
-24.6231155778961

```
> [U,S,V] = svd(AtA)
```

```
U =
```

-0.707106781186548	-0.707106781186548
-0.707106781186547	0.707106781186547

```
S =
```

3.9601	0
0	9.99999999999464e-05

```
V =
```

-0.707106781186547	-0.707106781186547
-0.707106781186547	0.707106781186547

Aproksymacja ciągła

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b [f(x) - (a_0\phi_0(x) + \cdots + a_n\phi_n(x))]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Aproksymacja wielomianowa

Przykład ciągłej funkcji $f(x)$ na odcinku $[a, b]$

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$E = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$E = \int_a^b [f(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)]^2 dx,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \int_a^b [f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n] dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \int_a^b x[f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n] dx$$

$\vdots$

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = -2 \int_a^b x^n[f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n] dx$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow a_0 \int_a^b 1 \, dx + a_1 \int_a^b x \, dx + a_2 \int_a^b x^2 \, dx + \cdots + a_n \int_a^b x^n \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow a_0 \int_a^b x^i \, dx + a_1 \int_a^b x^{i+1} \, dx + a_2 \int_a^b x^{i+2} \, dx + \cdots + a_n \int_a^b x^{i+n} \, dx = \int_a^b x^i f(x) \, dx,$$
$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$i = 0: \quad a_0 \int_a^b 1 \, dx + a_1 \int_a^b x \, dx + a_2 \int_a^b x^2 \, dx + \cdots + a_n \int_a^b x^n \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$i = 1: \quad a_0 \int_a^b x \, dx + a_1 \int_a^b x^2 \, dx + a_2 \int_a^b x^3 \, dx + \cdots + a_n \int_a^b x^{n+1} \, dx = \int_a^b x f(x) \, dx$$

$$\vdots$$

$$i = n: \quad a_0 \int_a^b x^n \, dx + a_1 \int_a^b x^{n+1} \, dx + a_2 \int_a^b x^{n+2} \, dx + \cdots + a_n \int_a^b x^{2n} \, dx = \int_a^b x^n f(x) \, dx$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

$$\int_a^b x^i dx = s_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, 2n, \quad \text{and} \quad b_i = \int_a^b x^i f(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = b_0$$

$$a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + \cdots + a_n s_{n+1} = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_0 s_n + a_1 s_{n+1} + a_2 s_{n+2} + \cdots + a_n s_{2n} = b_n$$

$$Sa = b$$

Przykład

$$f(x) = e^x \text{ on } [-1, 1]$$

$$f(x) = e^x$$

$$E = \int_{-1}^1 (e^x - a_0)^2 dx \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \int_{-1}^1 (e^x - a_0) dx$$

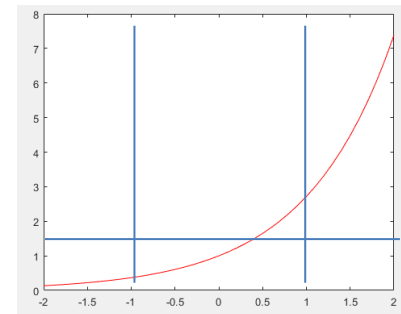
$$a_0 \int_{-1}^1 1 dx = \int_{-1}^1 e^x dx$$

$$a_0 \cdot 2 = e^1 - e^{-1}$$

$$a_0 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$

$$P_0(x) = a_0$$

$$E = \int_a^b [f(x) - P_0(x)]^2 dx$$



```
>> (exp(1)-exp(-1))/2
```

```
P_0(x)= 1.1752
```

```
P_0(0.5)= 1.1752
```

```
abs(1.1752-exp(0.5))/exp(0.5)  
= 0.2872
```

Przykład (cd)

$$f(x) = e^x \text{ on } [-1, 1]$$

$$n = 1; P_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$E = \int_a^b [f(x) - P_1(x)]^2 dx$$

$$s_0 = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$s_1 = \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$s_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Przykład (cd.)

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

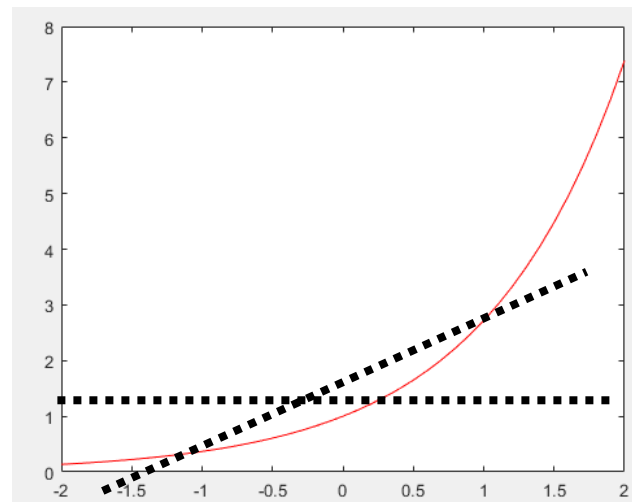
$$b_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e} = 2.3504$$

$$b_1 = \int_{-1}^1 e^x x dx = \frac{2}{e} = 0.7358$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 1.1752, \quad a_1 = 1.1037$$

$$P_1(x) = 1.1752 + 1.1037x$$

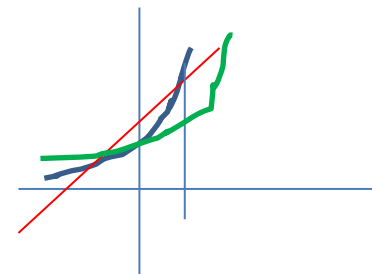


Przykład (cd.)

$$P_1(0.5) = 1.7270, \quad e^{0.5} = 1.6487$$

$$\frac{|e^{0.5} - P_1(0.5)|}{|e^{0.5}|} = \frac{|1.6487 - 1.7270|}{|1.6487|} = 0.0475.$$

Przykład (cd)



$$n = 2; P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$s_0 = 2, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$s_4 = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

$$b_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e} = 2.3504$$

$$b_1 = \int_{-1}^1 x e^x dx = \frac{2}{e} = 0.7358$$

$$b_2 = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx = e - \frac{5}{e} = 0.8789$$

Przykład (cd.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3504 \\ 0.7358 \\ 0.8789 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 1.1752, \quad a_1 = 1.1037$$

$$P_1(x) = 1.1752 + 1.1037x$$

$$a_0 = 0.9963, \quad a_1 = 1.1037, \quad a_2 = 0.5368$$

$$P_2(x) = 0.9963 + 1.1037x + 0.5368x^2$$

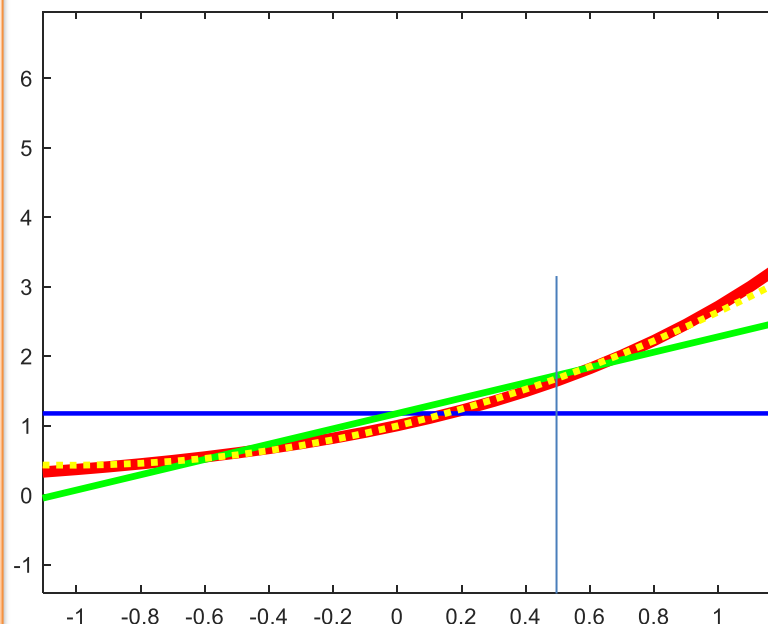
$$P_2(0.5) = 1.6824$$

$$e^{0.5} = 1.6487$$

$$\frac{|P_2(0.5) - e^{0.5}|}{|e^{0.5}|} = \frac{|1.6824 - 1.6487|}{|1.6487|} = 0.0204$$

Przykład (cd)

```
P2=[];
P1=[];
P0=[];
E=[];
for x=-2:0.1:2
    P2=[P2;x 0.9963+1.1037*x+0.5369*x^2];
    P1=[P1;x 1.1752+1.1037*x];
    P0=[P0;x 1.1752];
    E=[E;x exp(x)];
end;
plot(E(:,1),E(:,2),'-r');
hold on;
plot(P0(:,1),P0(:,2),'-b');
plot(P1(:,1),P1(:,2),'-g');
plot(P2(:,1),P2(:,2),'-y');
```



$$P_0(0.5) = 1.1752$$

$$P_1(0.5) = 1.7270, \quad e^{0.5} = 1.6487$$

$$P_2(0.5) = 1.6824$$

ApproximationExponentPolinom.m

Przykład 2

$$f(x) = x^2 + 5x + 6 \quad [0, 1]$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$s_0 = \int_0^1 dx = 1$$

$$s_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^1 (x^2 + 5x + 6) dx = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} + 6 \\ &= \frac{53}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^1 x(x^2 + 5x + 6) dx = \int_0^1 (x^3 + 5x^2 + 6x) dx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{3} + \frac{6}{2} = \frac{59}{12} \end{aligned}$$

Przykład 2 (cd.)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{6} \\ \frac{59}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_0 = 5.8333 \\ a_1 = 6 \end{matrix}$$

$$\boxed{P_1(x) = 5.8333 + 6x} \quad f(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$f(0.5) = 8.75; \quad P_1(0.5) = 8.833$$

$$\frac{|8.833 - 8.75|}{|8.75|} = 0.0095$$

Przykład 2 (cd.)

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$b_0 = \frac{53}{6}, \quad b_1 = \frac{59}{12},$$

$$b_2 = \int_0^1 x^2(x^2 + 5x + 6) dx = \int_0^1 (x^4 + 5x^3 + 6x^2) dx = \frac{1}{5} + \frac{5}{4} + \frac{6}{3} = \frac{69}{20}.$$

$$a_0 = 6, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 1$$

$$P_2(x) = 6 + 5x + x^2 \quad f(x) = x^2 + 5x + 6$$

Aproksymacja wielomianowa na odcinku [0,1]

W przypadku, gdy $a=0, b=1$

$$\int_a^b x^i dx = s_i,$$

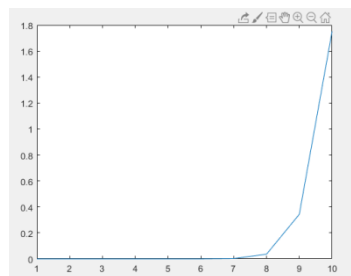
$$s_i = \int_0^1 x^i dx = \frac{1}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, 2n$$

Macierz Hilberta

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}(S) = O(10^n)$$

`H = hilb( 10 )`
`plot(eig(H))`



$$\text{Hinv} = \text{invhilb}(10)$$

Aproksymacja wielomianowa (cd.)

macierz Vandermonde'a

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \rightarrow s_k = \sum_{i=1}^m x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n$$

$$b_k = \sum_{i=1}^m x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

m – ilość pomiarów

$$V^T V a = b$$

$$S = V^T V$$

Jeśli x_i są różne, rozwiązanie $Sa = b$ jest jednoznaczne

Aproksymacja wielofunkcyjna

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Macierz Hilberta $n = 5$, $\text{cond}(S) = O(10^5)$

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

Funkcje ortogonalne

$$\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$$

$$\int_a^b w(x)\phi_j(x)\phi_i(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ C_j & \text{if } i = j \end{cases}$$

$C > 0$. Gdy $C_j = 1, j = 0, 1, \dots, n$, funkcje są ortonormalne

Aproksymacja wielofunkcyjna(cd)

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b [f(x) - (a_0\phi_0(x) + \cdots + a_n\phi_n(x))]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \int_a^b \phi_0(x) [f(x) - a_0\phi_0(x) - \underline{a_1\phi_1(x)} - \cdots - \underline{a_n\phi_n(x)}] dx$$

$$\int_a^b \phi_0(x) f(x) dx = \int_a^b (a_0\phi_0(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)) \phi_0(x) dx$$

$$\int_a^b \phi_0^2(x) dx = C_0$$

$$\int_a^b \phi_0(x) \phi_{i(x)} dx = 0, \quad i \neq 0$$

Aproksymacja wielofunkcyjna(cd.)

$$\int_a^b \phi_0(x) f(x) dx = C_0 a_0.$$

$$a_0 = \frac{1}{C_0} \int_a^b \phi_0(x) f(x) dx \quad \int_a^b \phi_0^2(x) dx = C_0$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b [f(x) - (a_0 \phi_0(x) + \dots a_n \phi_n(x))]^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \int_a^b \phi_1(x) [f(x) - a_0 \phi_0(x) - a_1 \phi_1(x) - \dots - a_n \phi_n(x)] dx.$$

$$\int_a^b \phi_1^2(x) dx = C_1$$

ortogonalność

$$\int_a^b \phi_1(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad i \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{C_1} \int_a^b \phi_1(x) f(x) dx$$

Aproksymacja wielofunkcyjna(cd.)

$$a_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b \phi_k(x) f(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$C_k = \int_a^b \phi_k^2(x) dx.$$

Z wagami

$$a_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$C_k = \int_a^b w(x) \phi_k^2(x) dx$$

Wielomiany Legendre'a

$$\phi_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, \dots)$$



Własności

Zależność rekurencyjna

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \phi_n(x) - \frac{n}{n+1} \phi_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ortogonalność z wagą $w(x)=1$ na odcinku $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 \phi_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn} \quad \text{Symbol Kroneckera}$$

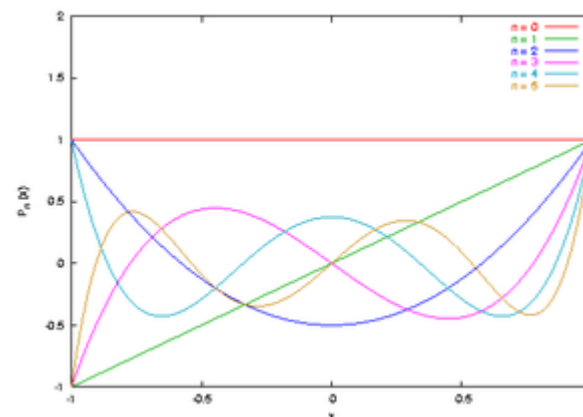
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ 1 & \text{if } i = j. \end{cases}$$

a zatem układ $\left\{ \sqrt{n + \frac{1}{2}} \phi_n : n \in \mathbb{N} \right\}$

jest układem ortonormalnym **w przedziale $[-1, 1]$.**

Adrien-Marie Legendre (ur. 18 września 1752, Paryż, zm. 10 stycznia 1833 tamże) – francuski matematyk.

legendre(n,x)



Wielomiany Legendre'a $\phi_n(x)$ dla $n=0, \dots, 5$

Wielomiany Legendre'a (cd)

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

$$[a, b] = [-1, 1]$$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\phi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$\phi_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\phi_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$\phi_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

$$\phi_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$$

$$\phi_9(x) = \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$$

$$\phi_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$w(x) = 1$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$C_k = \int_{-1}^1 \phi_k^2(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{C_k} \int_{-1}^1 f(x) \phi_k(x) dx$$

Przykład

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$f(x) = e^x$$

$$a_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b \phi_k(x) f(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$C_k = \int_a^b \phi_k^2(x) dx.$$

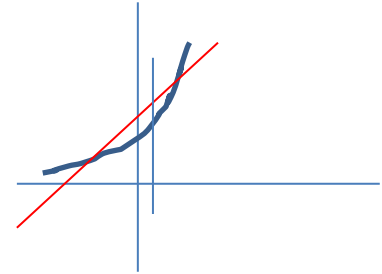
$$C_0 = \int_{-1}^1 \phi_0^2(x) dx = \int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{C_0} \int_{-1}^1 \phi_0(x) e^x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$P_0(x) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$$

Przykład

$$f(x) = e^x$$



$$P_1(x) = a_0 + a_1x$$

$$P_1(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x)$$

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x$$

$$C_0 = \int_{-1}^1 \phi_0^2(x) dx = \int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = 2$$

$$C_1 = \int_{-1}^1 \phi_1^2(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Przykład (cd.)

$$a_0 = \frac{1}{C_0} \int_{-1}^1 \phi_0(x) e^x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{C_1} \int_{-1}^1 f(x) \phi_1(x) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 e^x x dx = \frac{3}{e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) \\ &= \frac{1}{2} \left[e - \frac{1}{e} \right] + \frac{3}{e} x \end{aligned}$$

$$P_1(0.5) = \frac{1}{2} \left[e - \frac{1}{e} \right] + \frac{3}{e} \cdot 0.5 = 1.7270$$

$$e^{0.5} = 1.6487$$

$$\frac{|1.7270 - 1.6487|}{|1.6487|} = 0.0475$$

Przykład (cd.)

$$P_2(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x)$$

$$\overset{1}{a_0} = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right), \quad \overset{x}{a_1} = \frac{3}{e}$$

Już obliczone!

$$C_2 = \int_{-1}^1 \phi_2^2(x) dx$$

$$>> C2 = \text{int}((1/2*(3*x^2-1))^2, -1, 1) = 2/5$$

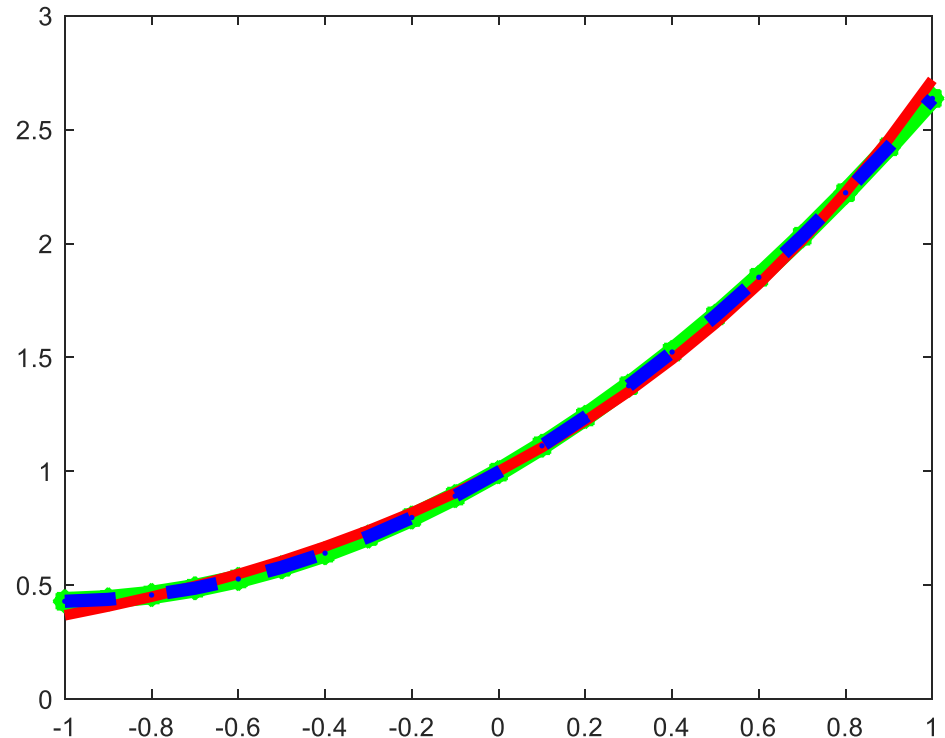
$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\overset{1/2*(3*x^2-1)}{a_2} = \frac{1}{C_2} \int_{-1}^1 e^x \phi_2(x) dx$$

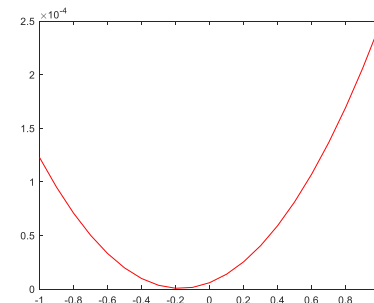
```
>> a2=int((1/2*(3*x^2-1))*exp(x),-1,1)/C2  
(5*exp(1))/2 - (35*exp(-1))/2  
>> eval(a2)  
0.357814350647373
```

Przykład (cd.)

```
%ApproxLegendreOS.m  
a0=1/2*(exp(1)-exp(-1));  
a1=3*exp(-1);  
a2= 0.357814350647373;  
Out=[];  
for x=-1:0.1:1  
    p2L=a0+a1*x+a2*1/2*(3*x^2-1);  
    p2P=0.9963+1.1037*x+0.5369*x^2;  
    Out=[Out;x p2L p2P exp(x)];  
end;  
plot(Out(:,1),Out(:,2),'b.-');  
hold on;  
plot(Out(:,1),Out(:,3),'g*');  
plot(Out(:,1),Out(:,4),'r-');
```



Err=p2E-p2P



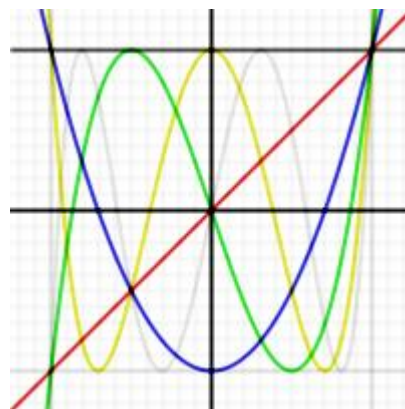
Wielomiany Czebyszewa

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0 \quad [-1, 1].$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$\theta = \arccos x$$



$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos n\theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x) &= 2 \cos n\theta \cos \theta - T_{n-1}(x) \\&= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).\end{aligned}$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$n = 1 : \quad T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$n = 2 : \quad T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

Ortogonalność wielomianów Czebyszewa

$$\int_a^b w(x) \phi_j(x) \phi_i(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ C_j & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad [-1, 1].$$

$$\int_{-1}^1 T_k(x) T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : k \neq j \\ \pi & : k = j = 0 \\ \pi/2 & : k = j \neq 0 \end{cases}$$

Dowód

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad n \geq 0$$

$$\langle T_k, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x) \cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(k \cdot \arccos(x)) \cdot \cos(j \cdot \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} &> \text{diff}(\arccos(x)) \\ &-1/(1-x^2)^{(1/2)} \end{aligned}$$

Zastosujmy podstawienie $t = \arccos(x)$. Mamy wówczas $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ oraz $x = \cos(t)$. Stosując we wcześniejszym wzorze:

$$\langle T_k, T_j \rangle = - \int_{\pi}^0 \frac{\cos(k \cdot t) \cdot \cos(j \cdot t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} \sqrt{1-\cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi} \cos(k \cdot t) \cdot \cos(j \cdot t) dt$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ dostajemy

$$\langle T_k, T_j \rangle = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos((k-j)t) + \cos((k+j)t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((k-j)t) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((k+j)t) dt$$

Założmy w tym momencie, że $k \neq j$ i rozpatrzmy obie całki osobno.

$$\int_0^{\pi} \cos((k-j)t) dt = \frac{1}{k-j} \int_0^{(k-j)\pi} \cos(t) dt = \frac{1}{k-j} [\sin(t)]_0^{(k-j)\pi} = 0$$

Analogicznie:

$$\int_0^{\pi} \cos((k+j)t) dt = \frac{1}{k+j} \int_0^{(k+j)\pi} \cos(t) dt = \frac{1}{k+j} [\sin(t)]_0^{(k+j)\pi} = 0$$

Zatem:

$$\langle T_k, T_j \rangle = 0$$

Dowód (cd)

Widać, że założenie, iż $k \neq j$ jest istotne, ponieważ w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy 0 w mianowniku.

Powyższe równania dowodzą, że wielomiany Czebyszewa są wzajemnie **prostopadłe**.

Teraz rozważmy przypadek, kiedy $j = k \neq 0$

$$\begin{aligned}\langle T_k, T_k \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((k-k)t) + \cos((k+k)t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + \cos(2kt)] dt = \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi \cos(2kt) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2k} \int_0^{2k\pi} \cos(t) dt = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

W przypadku $k = j = 0$ dostajemy $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$ co kończy dowód.

Przykłady wielomianów Czebyszewa

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

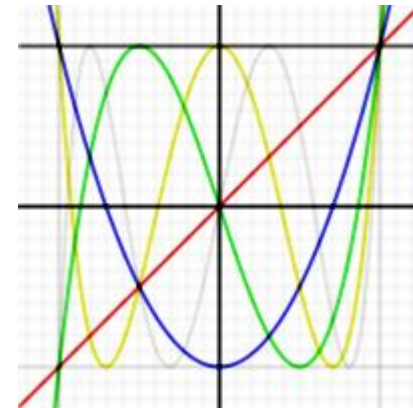
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$



-1

1

Definicja rekurencyjna

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 2x$$

$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

Aproksymacja wielomianami Czebyszewa

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$
$$a_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b w(x)f(x)\phi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$C_k = \int_a^b w(x)\phi_k^2(x) dx$$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \phi_k(x) = T_k(x), \quad [a, b] = [-1, 1],$$

$$C_0 = \int_{-1}^1 \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

$$C_k = \int_{-1}^1 \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, \dots, n$$

Aproksymacja wielomianami Czebyszewa (cd)

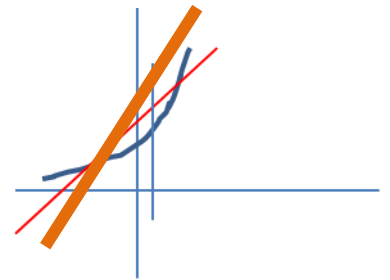
$$P_n(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x)$$

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_i(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Przykład

$$f(x) = e^x$$



$$P_1(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) = a_0 + a_1x,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1.2660$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{xe^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx 1.1303$$

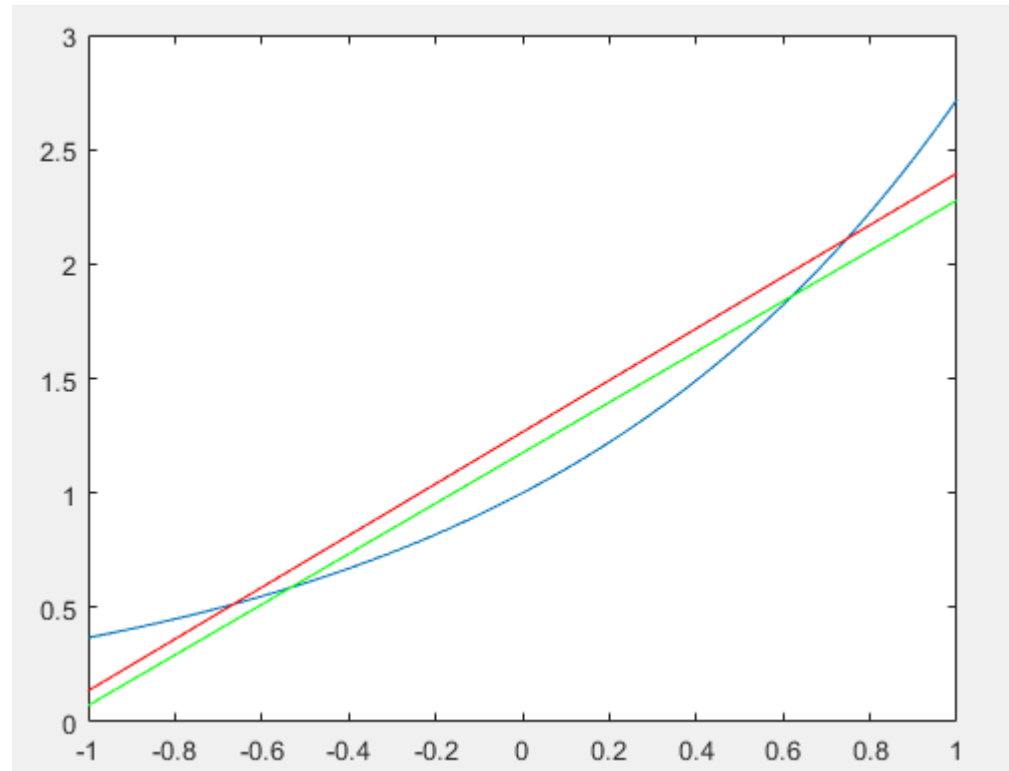
$$P_1(x) = 1.2660 + 1.1303x$$

$$P_1(0.5) = 1.8312;$$

$$e^{0.5} = 1.6487 \quad \text{Relative error: } \frac{|1.6487 - 1.8312|}{1.6487} = 0.1106.$$

P1L, P1Cz

```
x=-1:0.01:1;  
f=exp(x);  
plot(x,f);  
a0=1.2660;  
a1=1.1303;  
yC=a0+x.*a1;  
hold on  
plot(x,yC,'r');  
b0=1/2*(exp(1)-1/exp(1));  
b1=3/exp(1);  
yL=b0+b1.*x;  
plot(x,yL,'g');
```



Aproksymacja szeregiem Fouriera



Szereg Fouriera – szereg pozwalający rozłożyć funkcję **okresową**, spełniającą warunki Dirichleta, na sumę funkcji trygonometrycznych.

Niech dana będzie **funkcja okresowa** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
o okresie $T \in \mathbb{R}^+$
bezwzględnie całkowalna w przedziale $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Jean-Baptiste
Joseph Fourier,
(ur. 21 marca 1768 w Auxerre,
zm. 16 maja 1830 r. w Paryżu)
– francuski matematyk i fizyk.

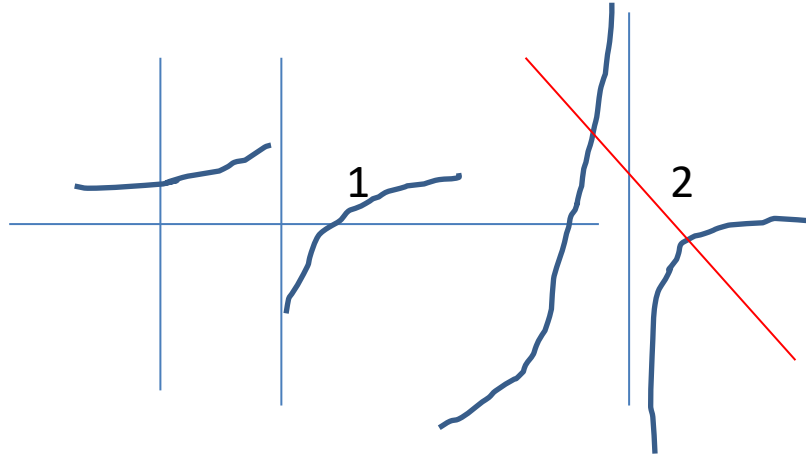
Trygonometrycznym szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

o współczynnikach określonych następującymi wzorami:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Warunki Dirichleta



Johann Peter Gustav Lejeune
Dirichlet



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Data i miejsce urodzenia	13 lutego 1805 Düren
Data i miejsce śmierci	5 maja 1859 Getynga
Zawód, zajęcie	matematyk

Przypuśćmy, że $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie T . Jeśli f spełnia następujące trzy warunki (zwane *warunkami Dirichleta*):

1. funkcja f jest bezwzględnie całkowalna, tzn.:

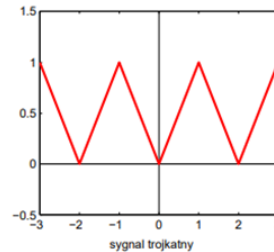
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| dx < \infty,$$

2. funkcja f w przedziale jednego okresu ma skończoną liczbę maksimów lokalnych i minimów lokalnych,

3. funkcja f w przedziale jednego okresu posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,

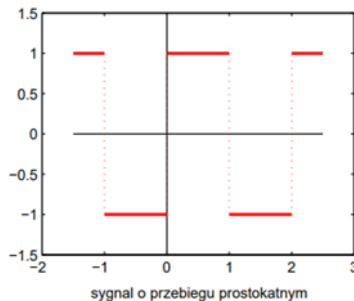
to f ma reprezentację w postaci szeregu Fouriera.

Cechy rozkładu Fouriera



$$f(-x) = f(x)$$

- Jeżeli $f(t)$ jest funkcją parzystą na przedziale $[-T, T]$, to $b_n = 0$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$ i w szeregu Fouriera tej funkcji nie występują sinusy.
- Jeżeli $f(t)$ jest funkcją nieparzystą na przedziale $[-T, T]$, to $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ i w szeregu Fouriera tej funkcji nie występują cosinusy i wyraz początkowy.



$$(f(-x) = -f(x))$$

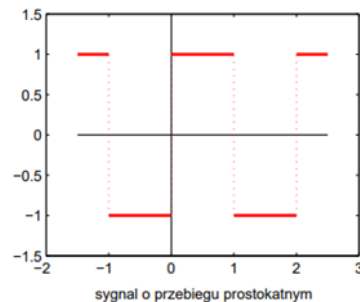
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jej szereg Fouriera jest zbieżny do wartości funkcji w tym punkcie. Innymi słowy: w punktach różniczkowalności funkcję da się rozwinąć w szereg Fouriera.

Przykład 1

Sygnał o przebiegu prostokątnym, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t < T \\ -1 & \text{dla } -T < t < 0 \\ 0 & \text{dla } t = -T, 0, T. \end{cases}$$



- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \dots$

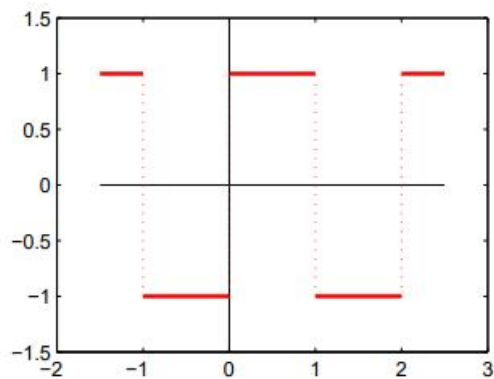
Obliczamy b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left(-\frac{T}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T = \\ &= \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla } n = 2k - 1 \\ 0 & \text{dla } n = 2k \end{cases}, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

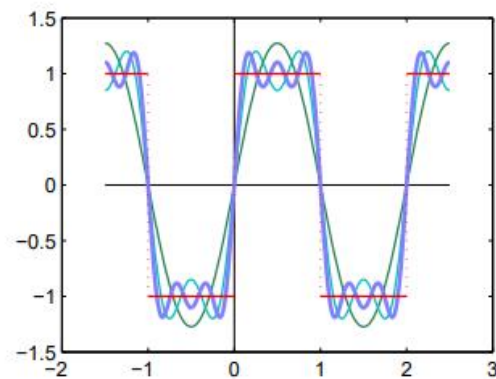
- Zatem sygnał prostokątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{T}\right)$$

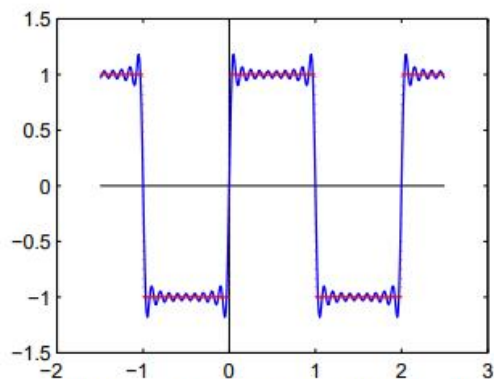
Przykład 1 (cd)



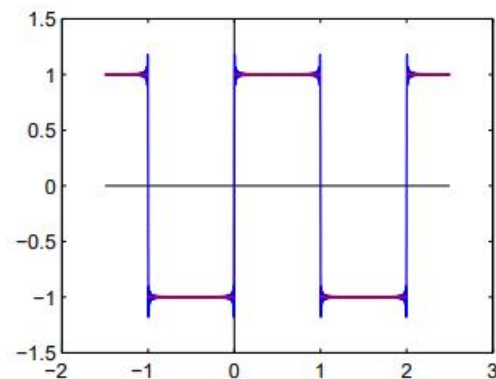
sygnał o przebiegu prostokątnym



suma częściowa szeregu Fouriera tego sygnału
ilość składników $N=1, 2, 3$



suma częściowa szeregu Fouriera tego sygnału
ilość składników $N=10$



suma częściowa szeregu Fouriera tego sygnału
ilość składników $N=100$

Przykład 2

Sygnał trójkątny, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 < t \leq T \\ -t & \text{dla } -T \leq t < 0. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja parzysta.
Zatem $b_n = 0$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$

Obliczamy a_n :

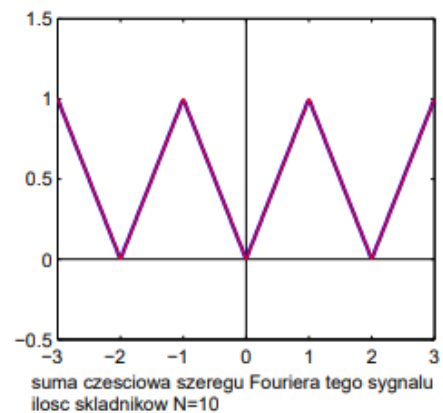
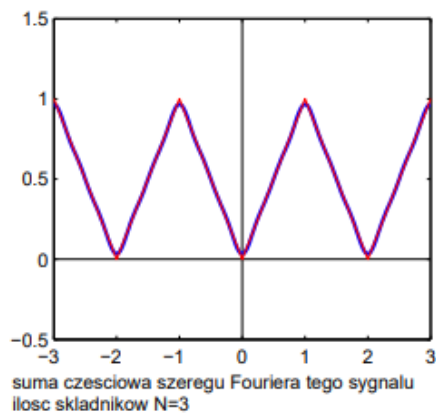
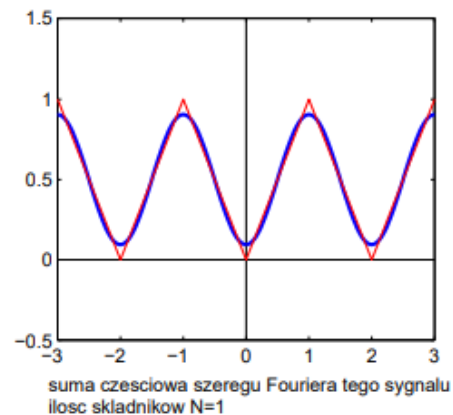
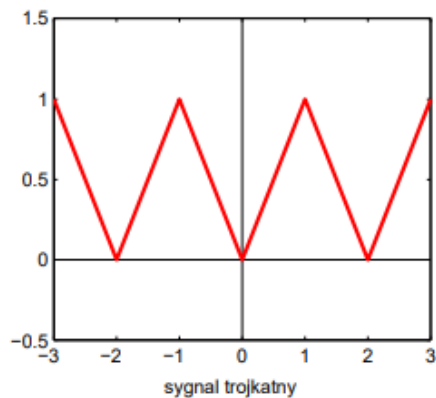
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t dt = T$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left(\frac{T}{n\pi}\right) \left(t \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T - \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt \right) = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\frac{T}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T = \frac{2T((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{4T}{n^2\pi^2} & \text{dla } n = 2k - 1 \\ 0 & \text{dla } n = 2k \end{cases}, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Zatem sygnał trójkątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

$$f(t) = \frac{T}{2} + \frac{2T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{T}\right)$$

Przykład 2 (cd)



Przykład 3

Sygnał o przebiegu piłowym, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } -T < t < T \\ 0 & \text{dla } t = -T, T. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \dots$

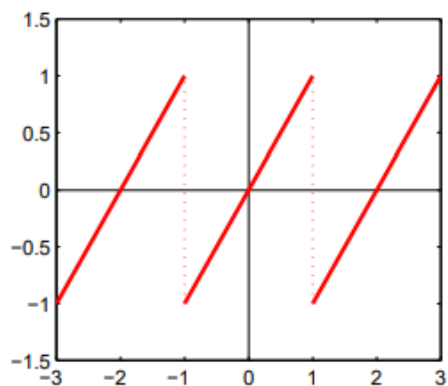
Obliczamy b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left(\frac{T}{n\pi}\right) \left(-t \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T + \int_0^T \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt\right) = \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(-(-1)^n T + \frac{T}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \Big|_0^T\right) = \frac{2T(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

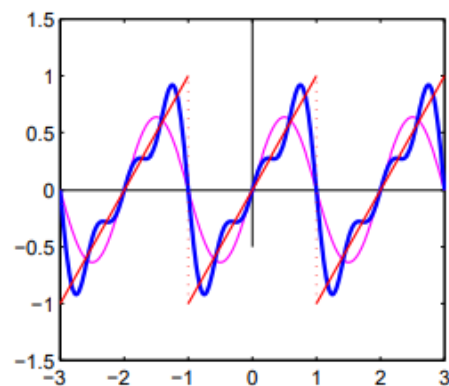
- Zatem sygnał piłowy rozwija się w następujący szereg Fouriera:

$$f(t) = \frac{2T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

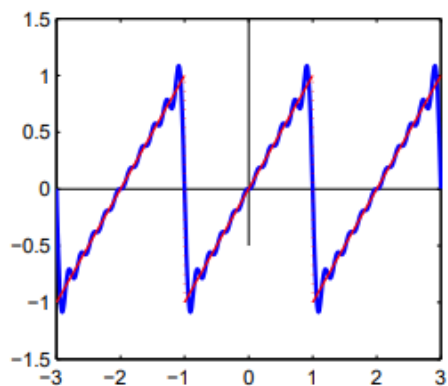
Przykład 3 (cd)



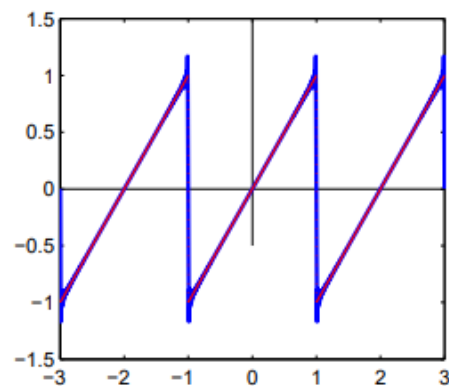
sygnał o przebiegu pilowym



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow $N=1, 3$



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow $N=10$



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow $N=100$

Period 2π

$$P_n(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \right)$$

Dla dowolnej funkcji $f(x)$ z periodem 2π

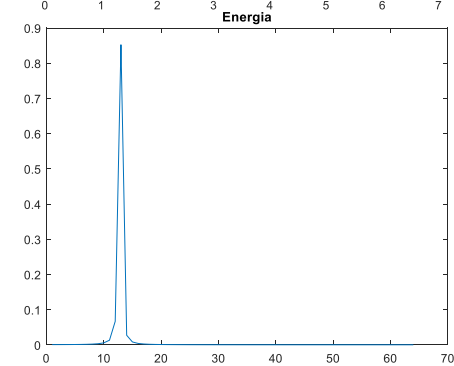
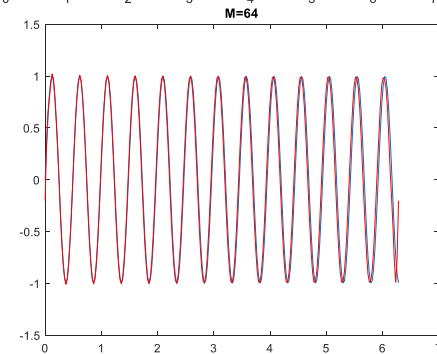
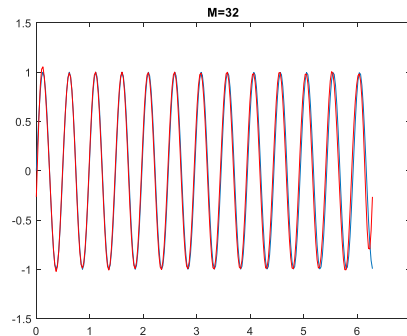
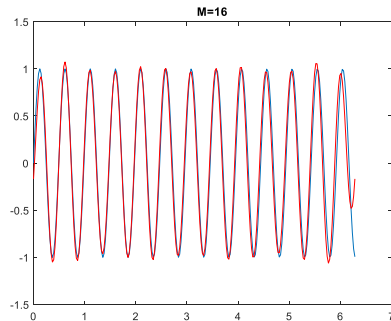
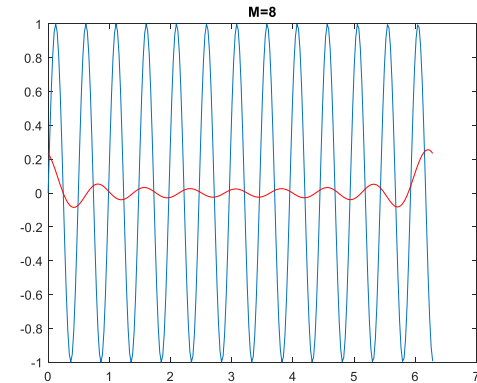
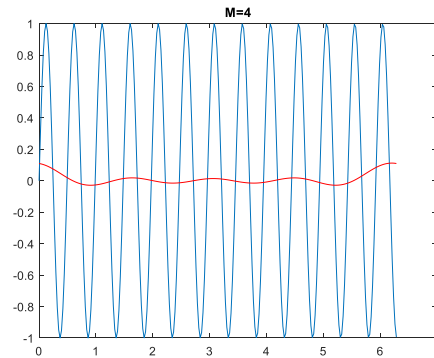
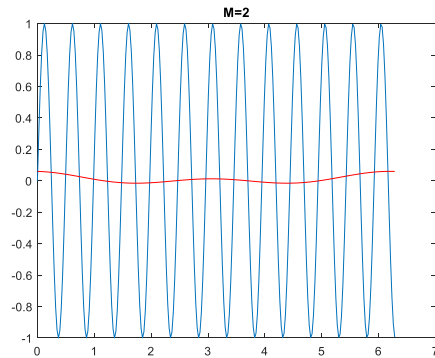
$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

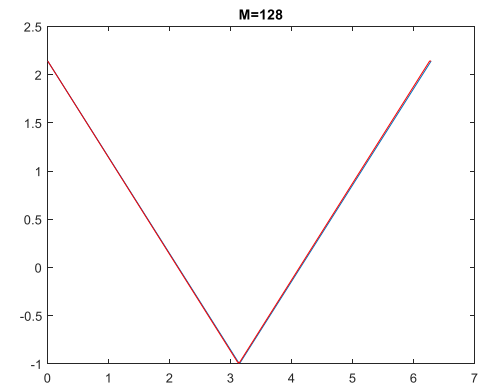
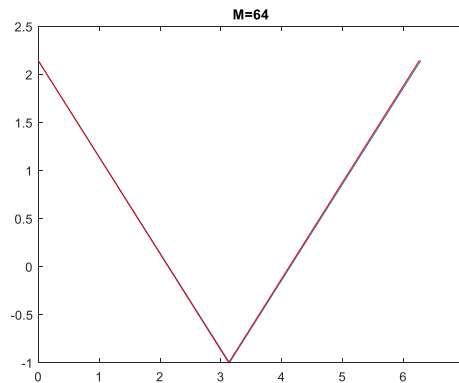
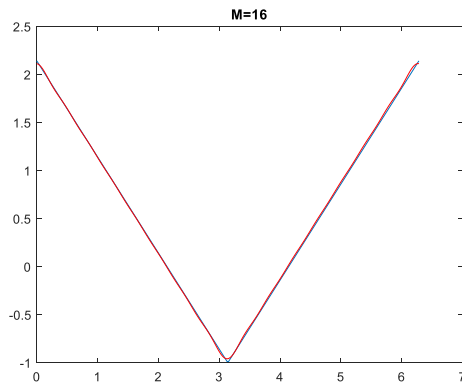
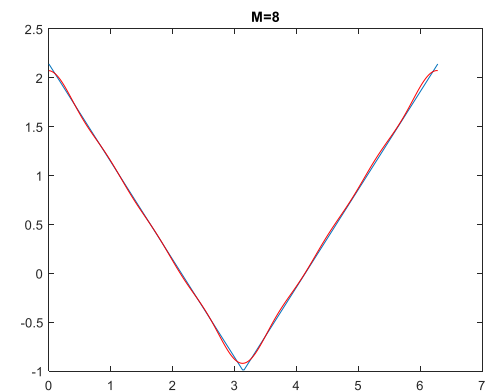
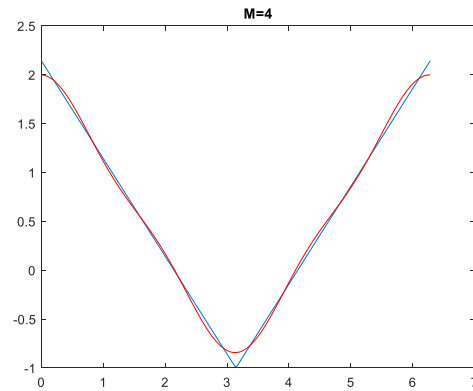
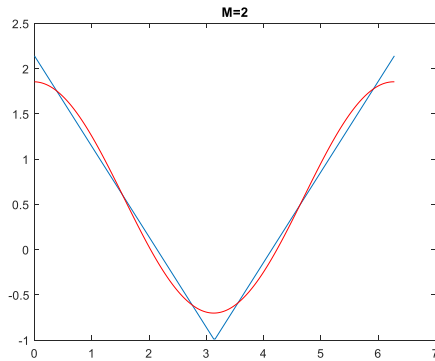
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

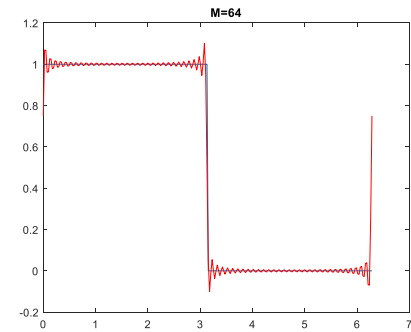
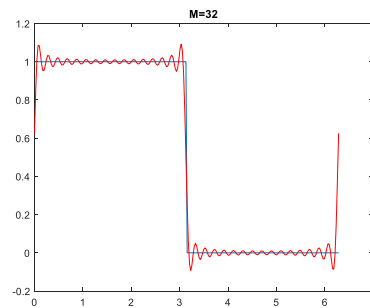
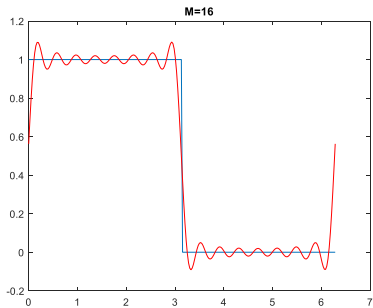
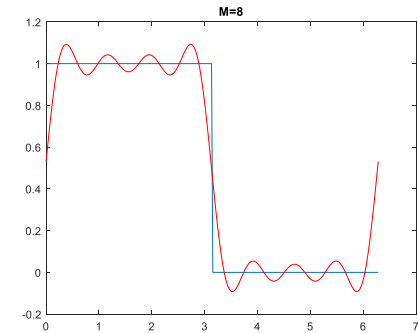
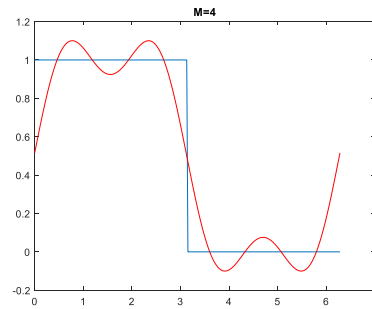
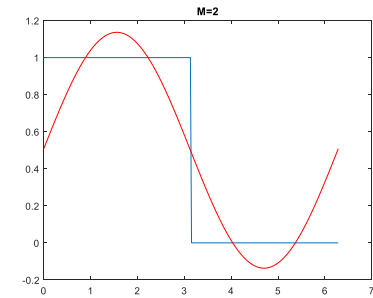
Aproksymacja szeregiem Fouriera (cd)



Aproksymacja szeregiem Fouriera (cd)

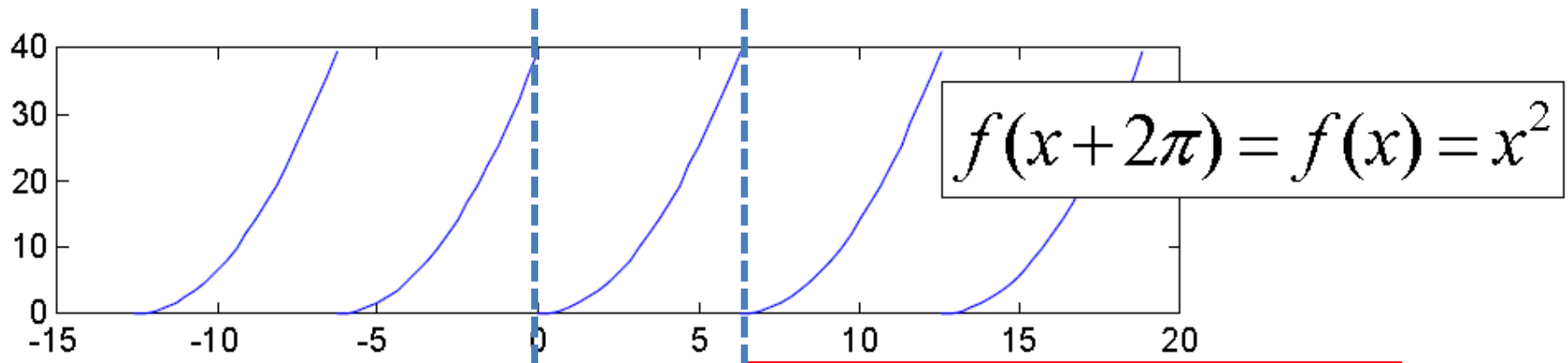


Aproksymacja szeregiem Fouriera (cd)



Aproksymacja Fouriera

$$f(x+2\pi) = f(x)$$



Aproksymujemy przez funkcje

$$f(x) \approx g_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i \Phi_i(x)$$

$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)$

$$f(x) \approx g_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aproksymacja Fouriera (cd.)

Sprawdzanie ortogonalności funkcji na przedziale 2π

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 2\pi & j = k = 0 \\ \pi & j = k > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = \begin{cases} 0 & j \neq k, j, k > 0 \\ \pi & j = k > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \sin(kx) dx = 0 \quad j \geq 0, k > 0$$

Aproksymacja Fouriera (cd.)

$$\|g_n(x) - f(x)\|_2 \rightarrow \min$$

$$g_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \{ \|g_n(x) - f(x)\|_2 \} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} - f(x) \right]^2 dx \right] = 0$$

Aproksymacja Fouriera (cd.)

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

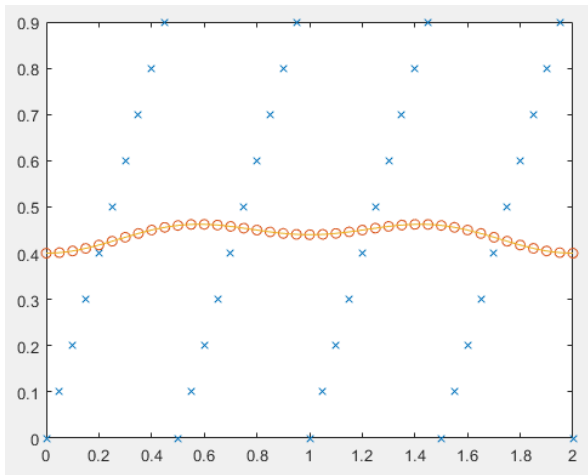
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$g_N(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^N \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

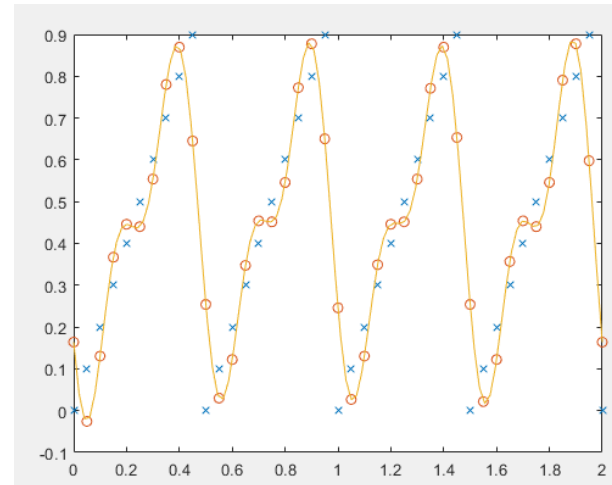
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31013-simple-real-fourier-series-approximation/content/Fseries.m>

Fseries.m

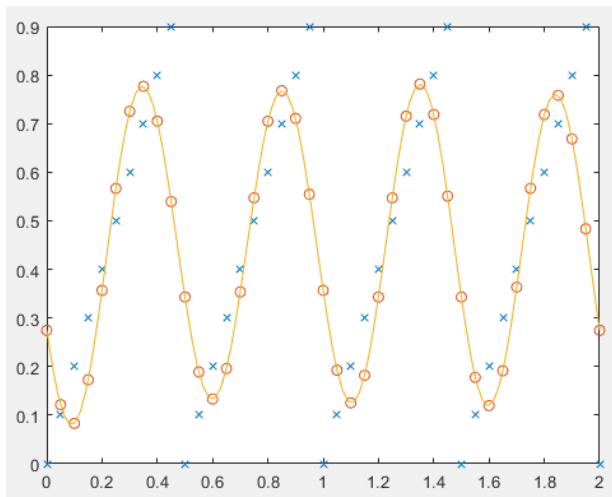
N=2



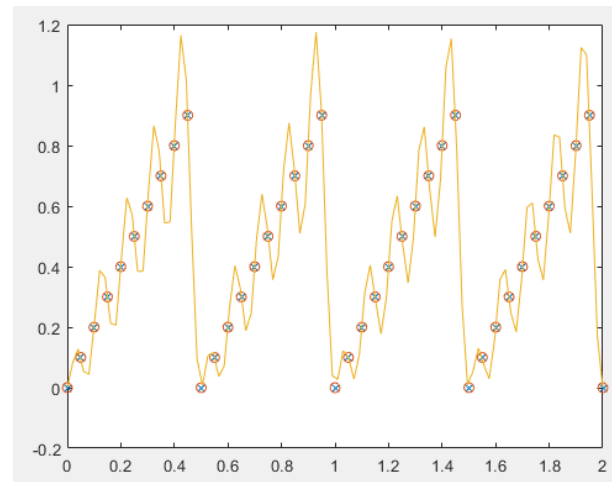
N=10



N=5



N=20

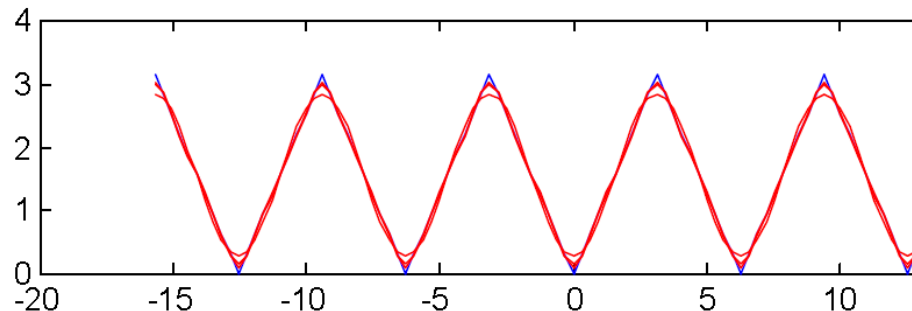


Przykład

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

```
>> syms x k
>> int(sin(k*x)*x,x,-pi,pi)
ans =
(2*(sin(pi*k) -
pi*k*cos(pi*k)))/k^2
>> int(cos(k*x)*x,x,-pi,pi)
ans =
0
```

$$g(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right\}$$

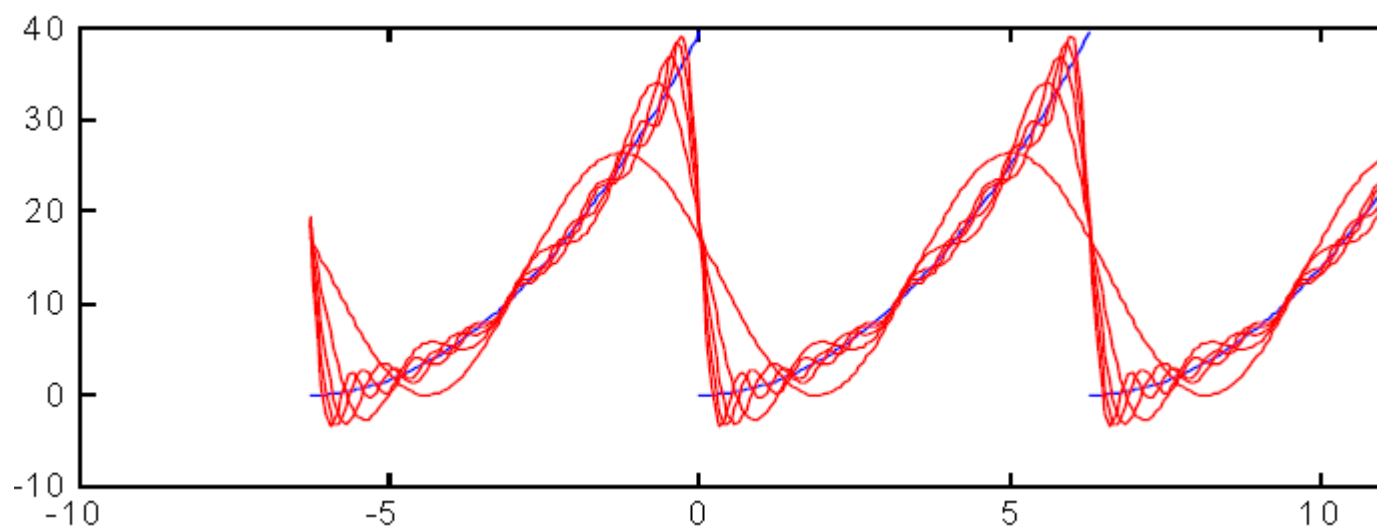


$n < 4$

Przykład 2

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$g_N(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{4}{k^2} \cos(kx) - \frac{4\pi}{k} \sin(kx) \right\}$$



$N < 11$

Aproksymacja Fouriera punktowa

$f(x)$ jest obliczona w $x_i = \frac{2\pi}{N}i$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \cos(kx_j), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sin(kx_j), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$g_m^*(x) = \frac{1}{2} a_0^* + \sum_{k=1}^{m-1} \{a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)\} + \frac{1}{2} a_m^* \cos(kx)$$

$$N=2m$$

Częstotliwość Nyquista

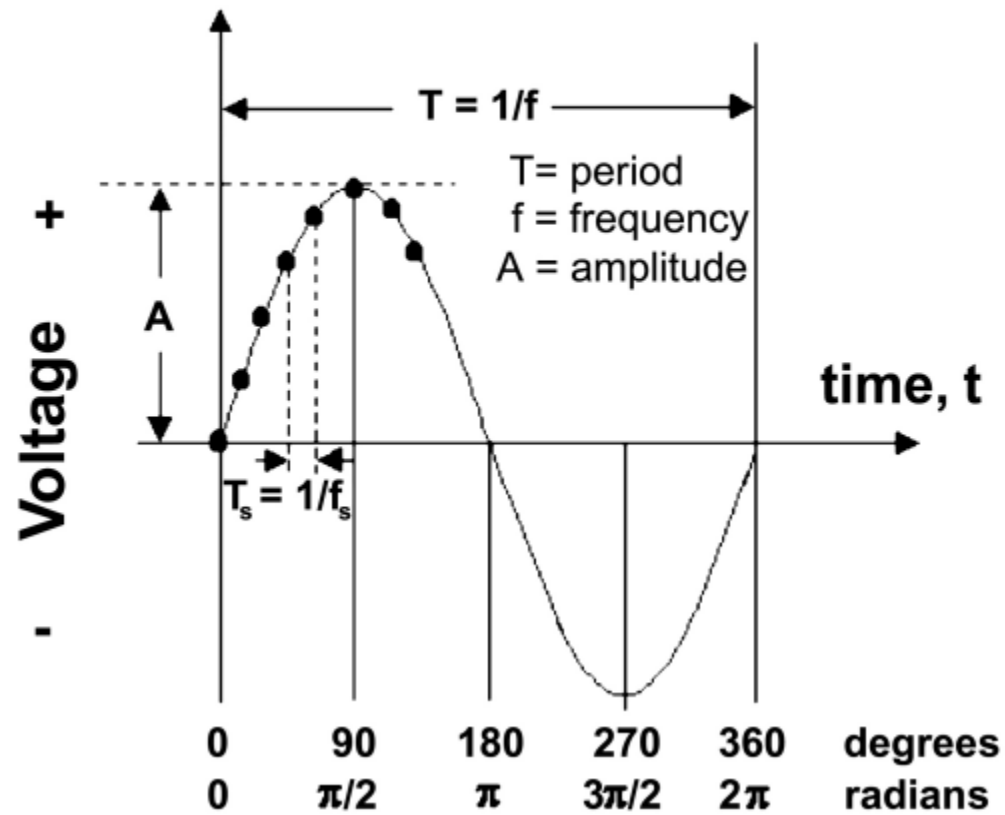
Częstotliwość Nyquista – maksymalna częstotliwość składowych widmowych sygnału poddawanego procesowi próbkowania, które mogą zostać odtworzone z ciągu próbek bez zniekształceń. Składowe widmowe o częstotliwościach wyższych od częstotliwości Nyquista ulegają podczas próbkowania nałożeniu na składowe o innych częstotliwościach (zjawisko aliasingu), co powoduje, że nie można ich już poprawnie odtworzyć.



Harry Nyquist,
1889-1976
szwedzki inżynier
elektryk,
naukowiec i wynalazca.

Przy próbkowaniu równomiernym z odstępem próbkowania T_s warunkiem odtworzenia sygnału jest, aby **maksymalna częstotliwość sygnału** nie przekraczała połowy **częstotliwości próbkowania**

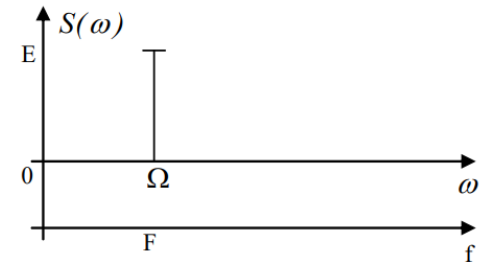
Oscillating Sine Wave



Rekonstrukcja sygnału

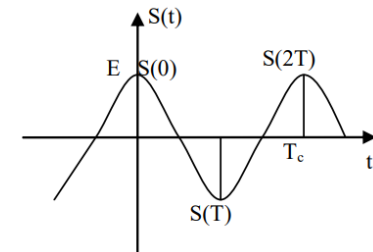
$$S(t) = E \cos \Omega t$$

$$T \leq \frac{1}{2F_{\max}}$$



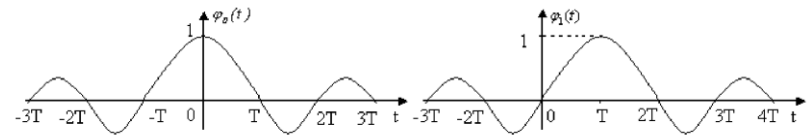
$$T \leq \frac{1}{2F_{\max}} = \frac{1}{2F} = \frac{T_c}{2}$$

$S(0), S(T), S(2T), \dots$



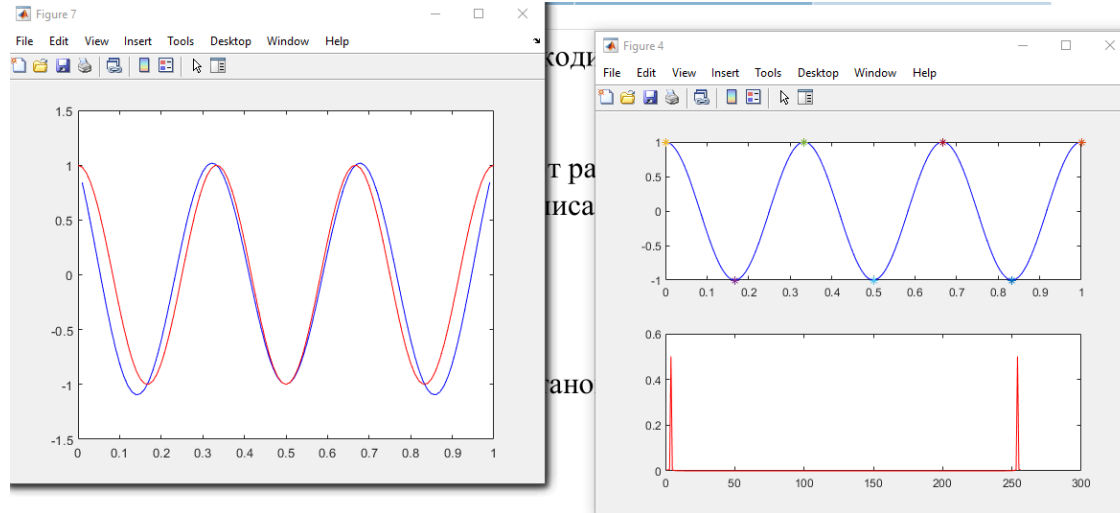
$$S(t) = \sum_n S(nT) \cdot \varphi_n(t)$$

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(2\pi \cdot F_{\max}(t - nT))}{2\pi \cdot F_{\max}(t - nT)} = \text{sinc}(2\pi \cdot F_{\max}(t - nT))$$

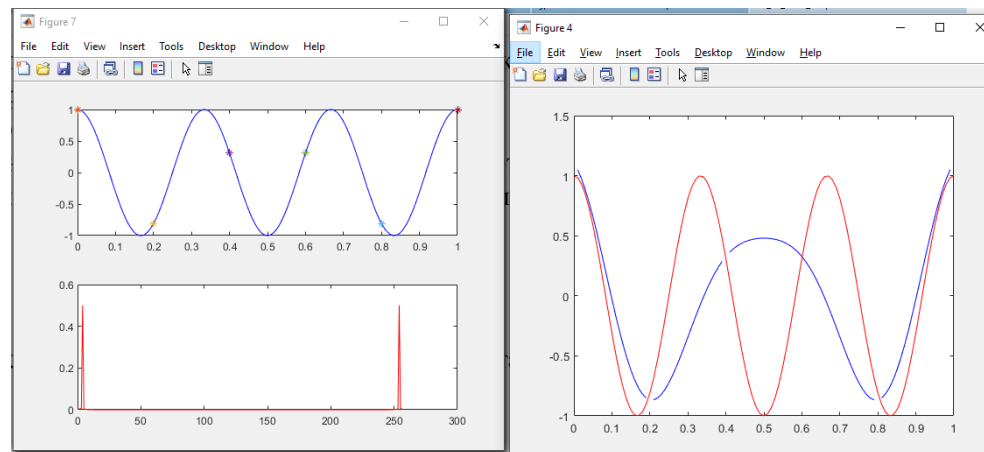


NyquistOS.m

$F_s=6$



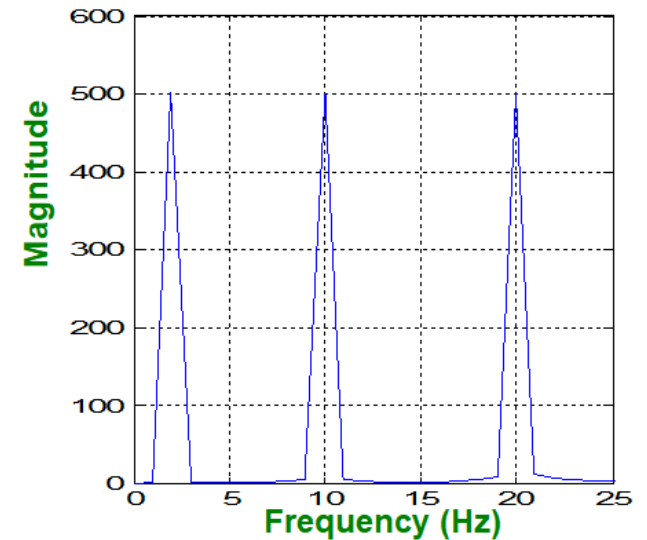
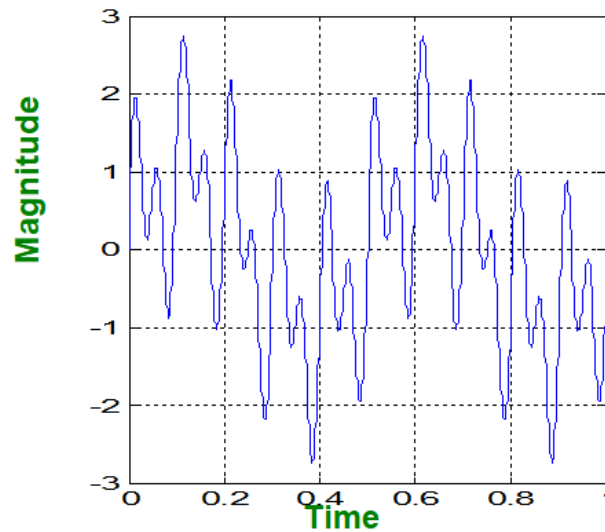
$F_s=5$



Rozkład Fouriera

2 Hz + 10 Hz + 20Hz

Stationary

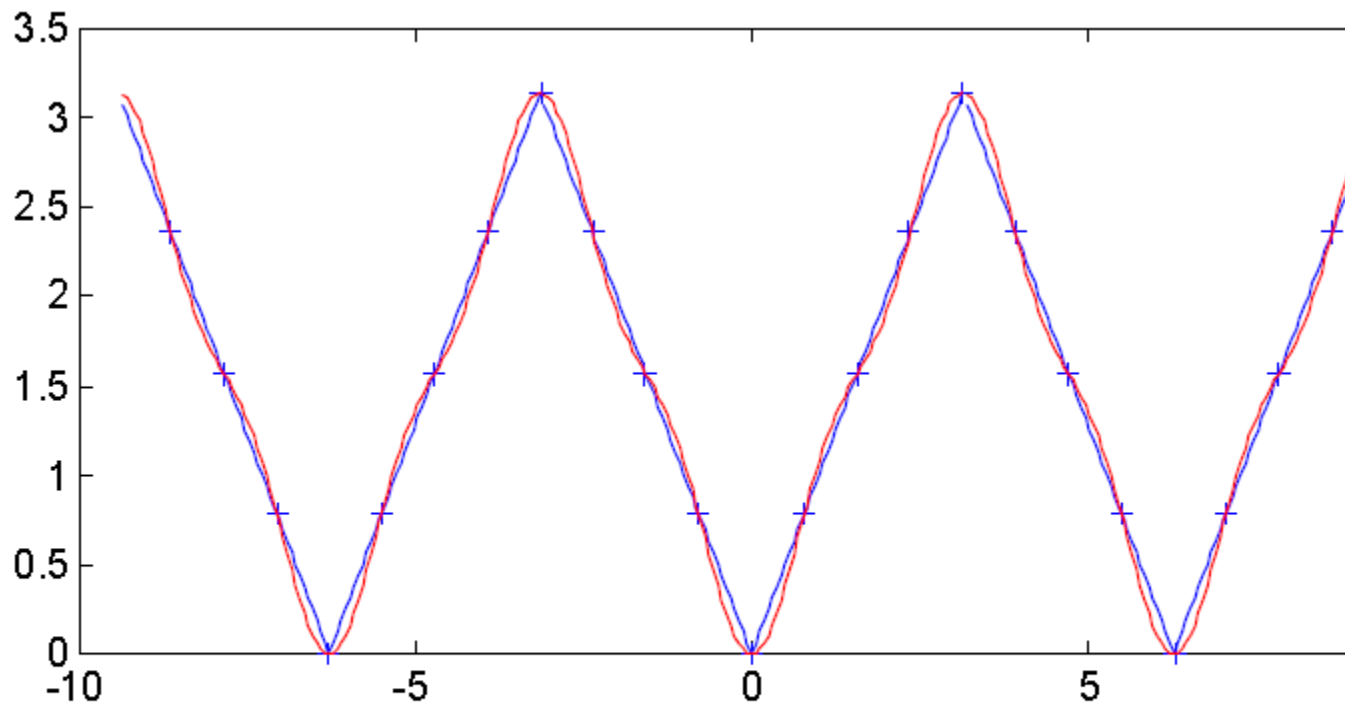


$$f(t) = \sin(2t) + \sin(10t) + \sin(20t)$$

Aproksymacja Fouriera punktowa (cd.)

kolokacja

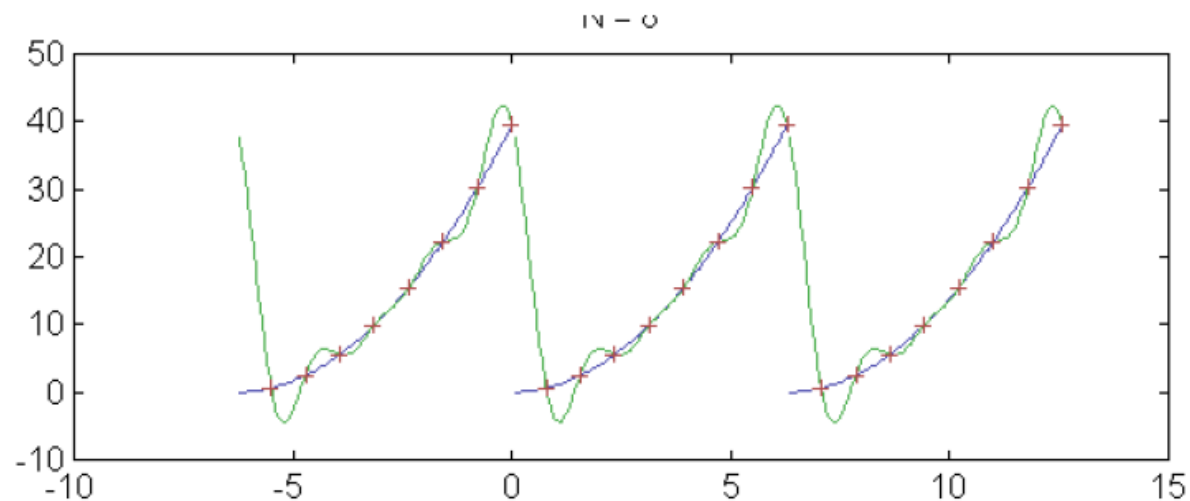
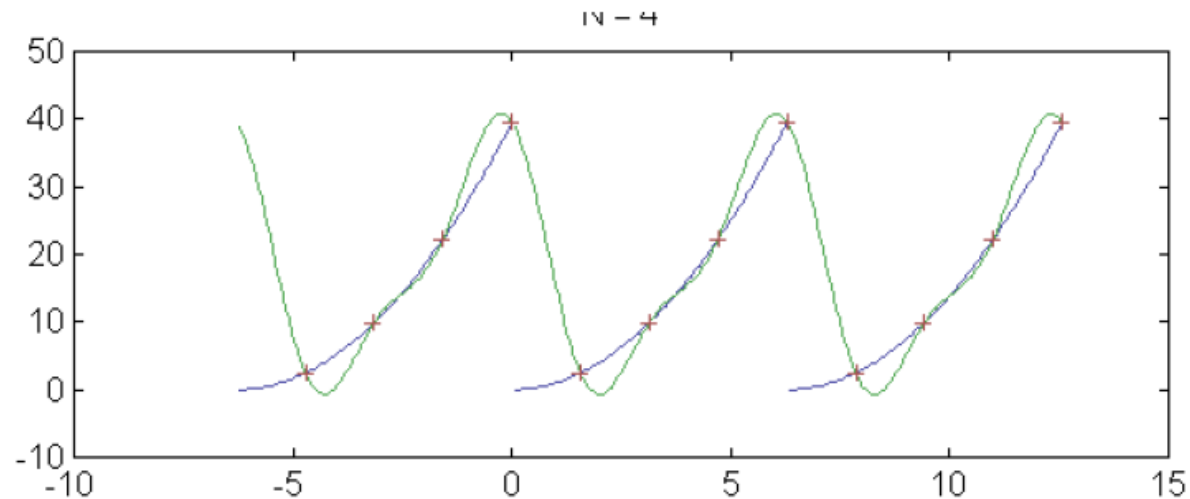
$$g_m^*(x_i) = f(x_i)$$



$f(x)=|x| \Rightarrow f(x)$ - blue ; $g(x)$ - red; x_i - '+'

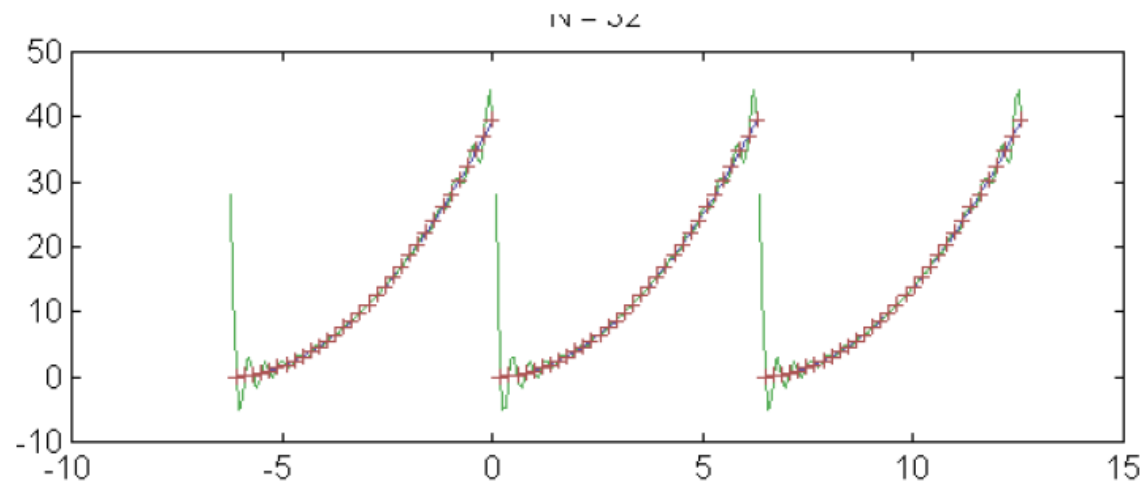
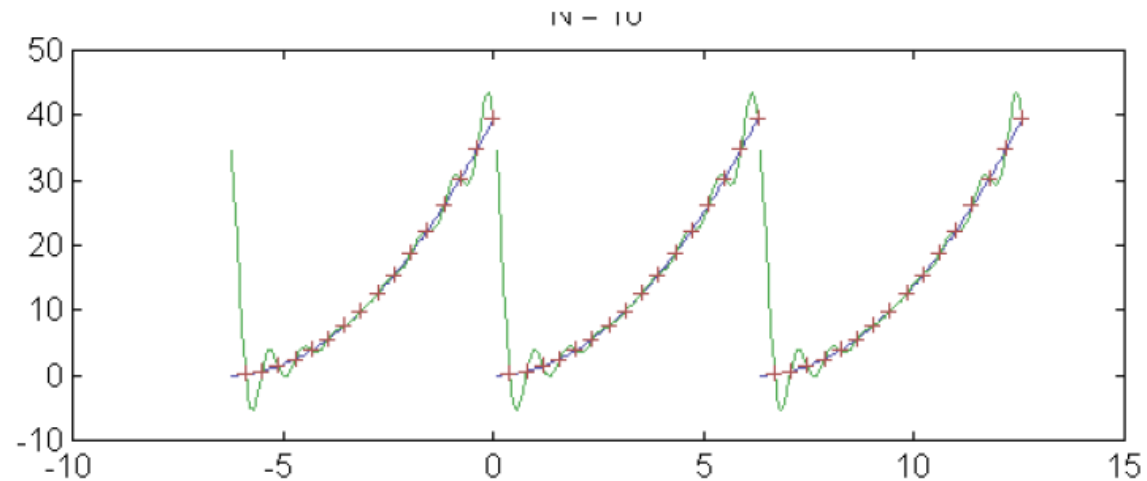
Aproksymacja Fouriera punktowa (cd.)

$f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)$ - blue ; $g(x)$ - red; x_i - '+'



Aproksymacja Fouriera punktowa (cd.)

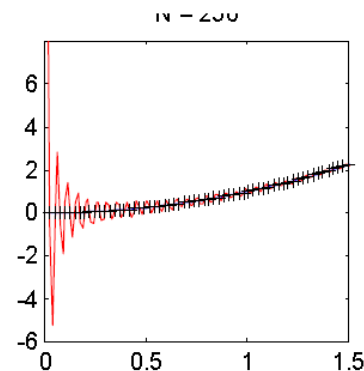
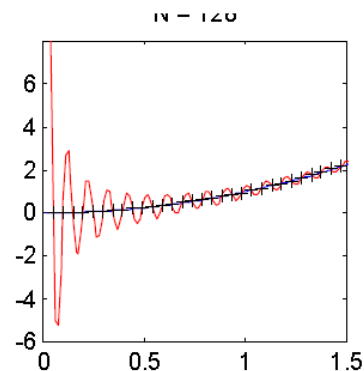
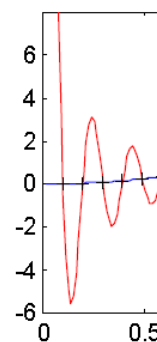
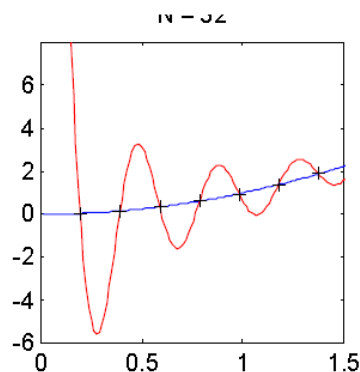
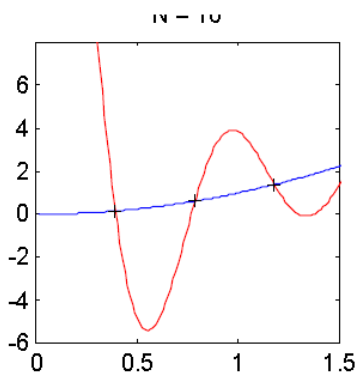
$f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)$ - blue ; $g(x)$ - red; x_i - '+'



Efekt Gibbsa

Efekt Gibbsa – charakterystyczny sposób, w jaki zachowuje się aproksymacja funkcji f szeregiem Fouriera w punktach nieciągłości x tej funkcji.

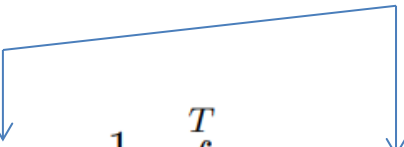
$f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)$ - blue ; $g(x)$ - red; x_i - '+'



The overshoot for equi-spaced Fourier interpolations is $\approx 14\%$ of the step height.

Rozkład Fouriera a widmo sygnału

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi t}{T}},$$


$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\frac{\pi t}{T}} dt.$$

Symbol e^{ix} oznacza liczbę zespoloną $\cos x + i \sin x$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ oraz } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ dla } n \geq 1$$

t - czas

$f(t)$ - sygnał okresowy

(c_n) - widmo sygnału f

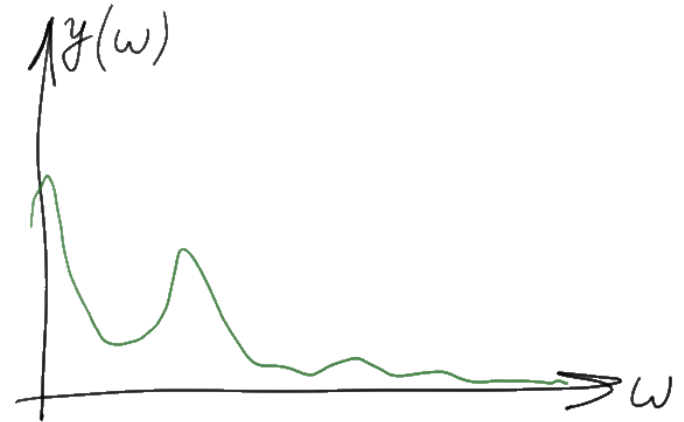
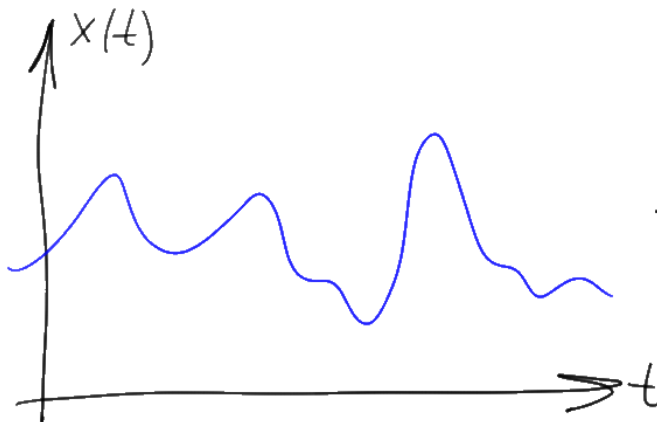
$\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$ to funkcje okresowe o okresie $\frac{2T}{n}$. Mają $\nu = \frac{n}{2T}$ okresów w odcinku $[0, 1]$, czyli częstotliwość ν Hz (ν okresów na sekundę).

Całka Fouriera

$$T \rightarrow \infty, \quad \delta\omega \rightarrow 0$$

$$G(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad \longrightarrow \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) \exp(i\omega_n t) \delta\omega \quad \longrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$



Prosta i odwrotna transformata Fouriera

$$G(\omega) = \Phi[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt$$

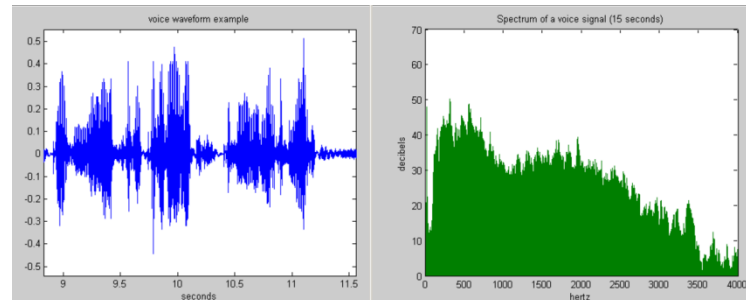
$$s(t) = \Phi^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

Twierdzenie Parsewala – suma (lub całka) kwadratu funkcji równa się sumie (lub całce) kwadratu jej transformaty (1799)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega,$$

Gęstość widmową energii

$$S(\omega) = |G(\omega)|^2$$



Porównywanie

Fourier

$$x_i = \frac{2\pi}{N}i$$

periodic functions

$$\cos(nx), \sin(nx)$$

$$g_m^*(x) = \frac{1}{2}a_0^* + \sum_{k=1}^{m-1} \{a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)\} + \frac{1}{2}a_m^* \cos(kx)$$

$$a_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \cos(kx_j)$$

$$b_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) \sin(kx_j)$$

collocation points

domain

basis functions

interpolating function

coefficients

Chebyshev

$$x_i = \cos \frac{\pi}{N}i$$

limited area [-1,1]

$$T_n(x) = \cos(n\varphi),$$

$$x = \cos \varphi$$

$$g_m^*(x) = \frac{1}{2}c_0^*T_0 + \sum_{k=1}^m c_k^*T_k(x)$$

$$c_k^* = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(\cos \varphi_j) \cos(k\varphi_j)$$

Dodatkowe

Regularyzacja

$$\mathbf{x}_\nu = V \Phi_\nu \Sigma^\dagger U^T \mathbf{b}$$

$$\Phi_\nu = \text{diag}(\phi_1^{(\nu)}, \dots, \phi_r^{(\nu)}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\phi_i^\nu = \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, k \\ 0, & i = k + 1, \dots, r \end{cases}$$

Regularyzacja (cd)

$$\mathbf{x}_\nu = V\Phi_\nu\Sigma^\dagger U^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_\nu = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\}$$

$$\phi_i^\nu = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \nu}, \quad i = 1, \dots, r$$

$$\mathbf{x}_\nu = \sum_{i=1}^r \phi_i^{(\nu)} (\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}) \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^r \phi_i^{(\nu)} \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\epsilon}}{\sigma_i} \right) \mathbf{v}_I$$

Ill-conditioned least-squares problems 2 have small singular values

$$\min_{\underline{w}} \|\underline{A}\underline{w} - \underline{d}\|_2^2 \Rightarrow \underline{w} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{d}$$

SVD: $\underline{A} = \underline{U} \underline{\Sigma} \underline{V}^T \Rightarrow \underline{w} = \underline{V} \underline{\Sigma}^{-1} \underline{U}^T \underline{d} = \sum_{i=1}^P \frac{1}{\sigma_i} \underline{v}_i (\underline{u}_i^T \underline{d})$

$N \times P, \text{rank } P$

$$\Rightarrow \|\underline{w}\|_2^2 = \sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^2 (\underline{u}_i^T \underline{d})^2$$

Small $\sigma_i \Rightarrow$ large $\|\underline{w}\|_2$

Prediction with errors: $\tilde{y} = (\tilde{x} + \underline{\varepsilon})^T \underline{w} = \underline{x}^T \underline{w} + \underline{\varepsilon}^T \underline{w}$

$$|\underline{\varepsilon}^T \underline{w}|^2 = \|\underline{w}\|_2^2 \|\underline{\varepsilon}\|_2^2 \cos^2 \theta$$

large $\|\underline{w}\|_2^2 \Rightarrow$ sensitive to errors

What if $\text{rank}(\underline{A}) < P$?

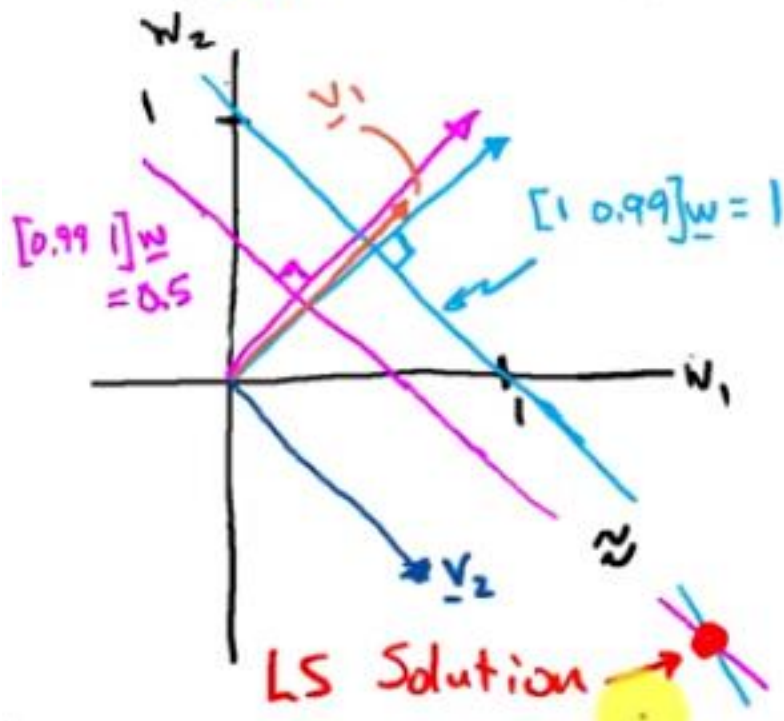
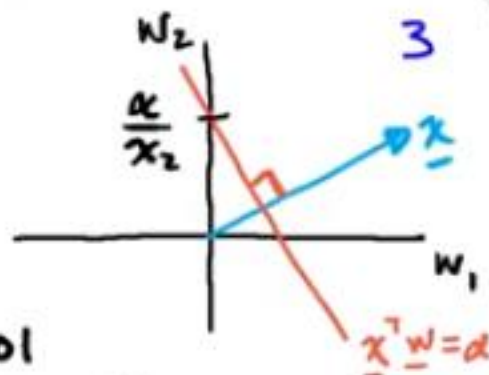
$$\sigma_P = 0$$

no unique solution

Example: ill-conditioned $\underline{A}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix}, \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Geometry $\underline{x}^T \underline{w} = \alpha$



$$\sigma_1 = 1.99 \quad \sigma_2 = 0.01$$

$$1/\sigma_1 \approx 0.5, \quad 1/\sigma_2 = 100$$

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{u}_1^T \underline{d} = \frac{1.5}{\sqrt{2}}, \quad \underline{u}_2^T \underline{d} = \frac{0.5}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{w} = \underline{v}_1 \frac{\underline{u}_1^T \underline{d}}{\sigma_1} + \underline{v}_2 \frac{\underline{u}_2^T \underline{d}}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{3}{8} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \textcircled{25}$$

$\|\underline{w}\|_2 \uparrow$ as $\sigma_2 \downarrow$ (pink arrow $\rightarrow$ blue arrow)

```
>> A=[1 0.99;0.99 1]
```

```
A =
```

1	0.99
0.99	1

```
>> [U,S,V] = svd(A)
```

```
U =
```

-0.707106781186548	-0.707106781186547
-0.707106781186547	0.707106781186548

```
S =
```

1.99	0
0	0.009999999999999989

```
V =
```

-0.707106781186547	-0.707106781186548
-0.707106781186548	0.707106781186547

Regularized LS via truncated SVD

4

Replace $\sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i} \underline{v}_i (\underline{u}_i^T \underline{d})$ with $\sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} \underline{v}_i (\underline{u}_i^T \underline{d})$
where $r < p$.

- Avoid inverting small/zero singular values
- Equivalent to replacing $\underline{A} = \sum_{i=1}^p \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^T$ with the rank- r approximation $\underline{A}_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^T$
- Increases $\min_{\underline{w}} \|\underline{A}\underline{w} - \underline{d}\|_2^2$
- Can choose r using intuition or cross-validation

Regularized LS via ridge regression 5

$$\min_{\underline{w}} \|\underline{A}\underline{w} - \underline{d}\|_2^2 + \lambda \|\underline{w}\|_2^2 \Rightarrow \underline{w} = (\underline{A}^T \underline{A} + \lambda \underline{I})^{-1} \underline{A}^T \underline{d}$$

controls norm!

Use SVD: $\underline{A}^T \underline{A} = \underline{V} \underline{\Sigma}^2 \underline{V}^T$, $\lambda \underline{I} = \underline{V} \lambda \underline{I} \underline{V}^T$

$$\underline{w} = (\underline{V} (\underline{\Sigma}^2 + \lambda \underline{I}) \underline{V}^T)^{-1} \underline{V} \underline{\Sigma} \underline{U}^T \underline{d} = \underline{V} (\underline{\Sigma}^2 + \lambda \underline{I})^{-1} \underline{\Sigma} \underline{U}^T \underline{d}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 + \lambda} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_p^2 + \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 / (\sigma_1^2 + \lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\sigma_p}{\sigma_p^2 + \lambda} \end{bmatrix}$$

Controlled!

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} \underline{v}_i (\underline{u}_i^T \underline{d})$$

- as $\sigma_i \rightarrow 0$, $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} \rightarrow \sigma_i / \lambda$

- increased value $\|\underline{A}\underline{w} - \underline{d}\|_2^2$

$$A = UDV^T,$$

$$U^T U = U U^T = I, \quad V^T V = V V^T = I,$$

$$\text{Cond}(A) := \frac{d_1}{d_k}$$

$$A^{-1} = VD^{-1}U^T, \quad D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_k}\right),$$

$$\begin{aligned} AV &= U\Sigma, \\ A^H U &= V\Sigma^H. \end{aligned}$$

$$U^H U = I \text{ and } V^H V = I.$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{U} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Sigma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{V}^* \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{A} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{U} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Sigma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{V}^* \\ \hline \end{array}$$