

Metody numeryczne II.

Wartości własne i wektory własne

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK
<http://is.umk.pl/~osokolov/MNII/>

Wektory i wartości własne

Wektory i wartości własne – wielkości opisujące endomorfizm danej przestrzeni liniowej;

wektor własny przekształcenia można rozumieć jako wektor, którego kierunek nie ulega zmianie po przekształceniu go endomorfizmem;

wartość własna odpowiadająca temu wektorowi to skala podobieństwa tych wektorów.

Najczęściej **przekształcenie liniowe** wyraża się jako **macierz**, która działa na wektory

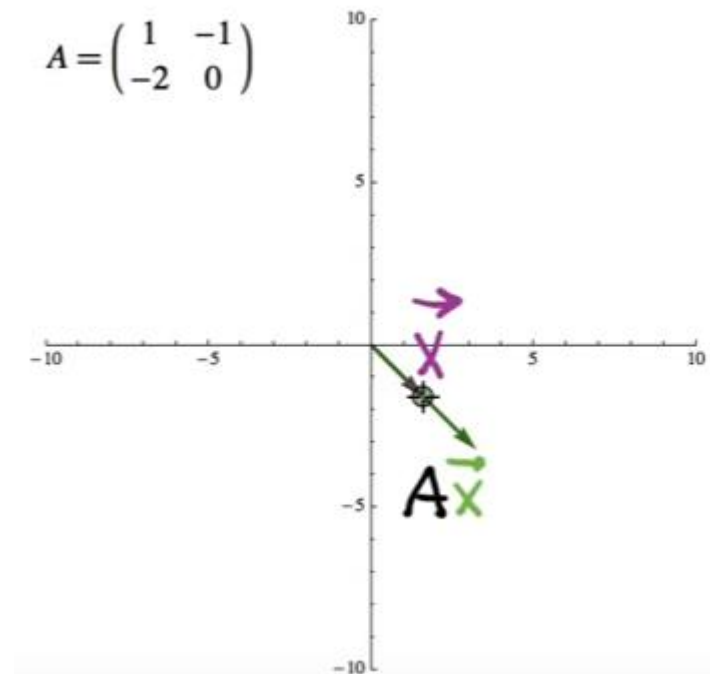
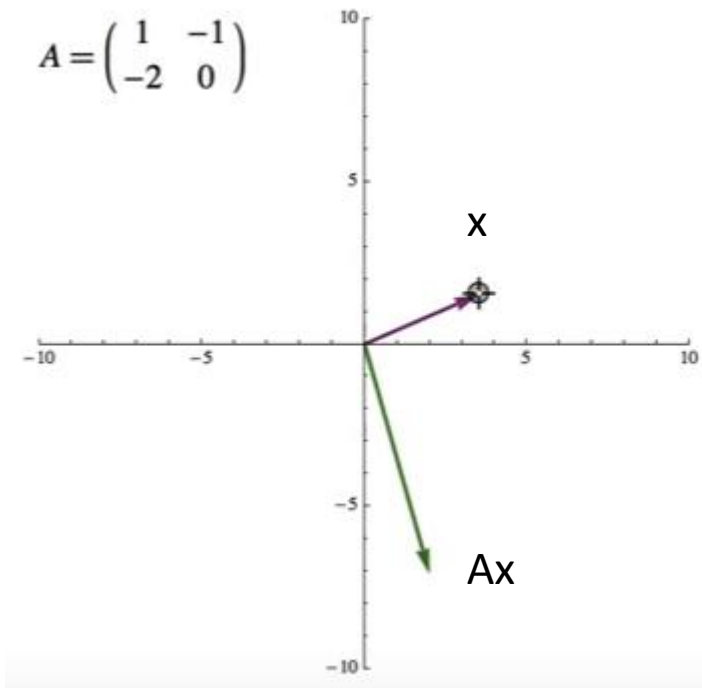
Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są **liniowo niezależne**.

Definicje

Jeśli dla danej liczby λ i wektora $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ spełniona jest równość:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x},$$

to λ nazywa się *wartością własną macierzy $\mathbf{A}$* , a $\mathbf{x}$ - *wektorem własnym* odpowiadającym wartości λ .



Definicje

Równanie $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ można także zapisać w postaci:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

Układ ten ma rozwiązanie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tylko pod warunkiem, że:
 $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Równanie:

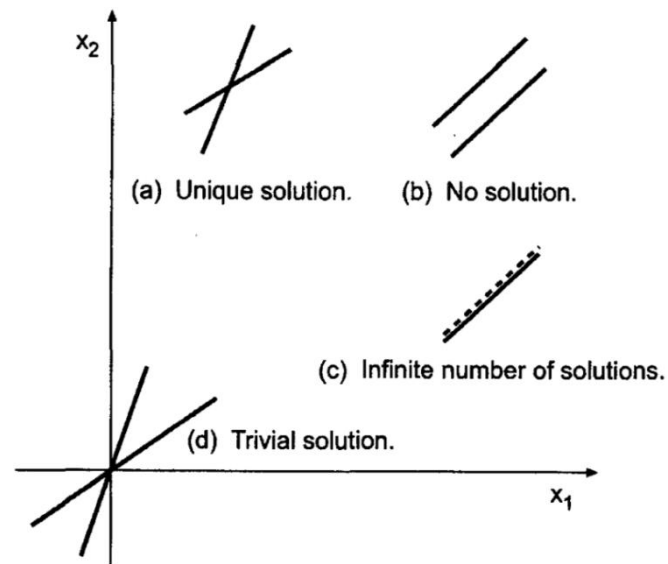
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

nazywane jest *równaniem charakterystycznym* macierzy $\mathbf{A}$.

Możliwe rozwiązywania

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



Układ 2 rzędu

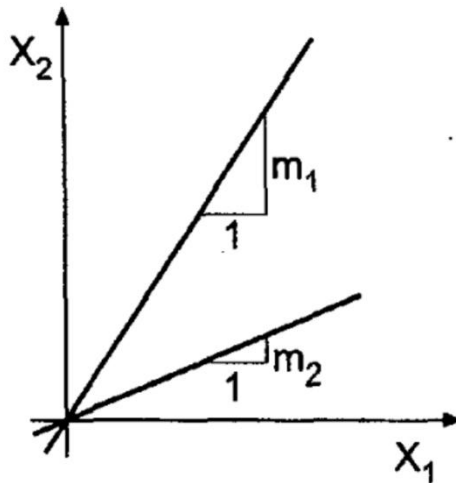
$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0$$

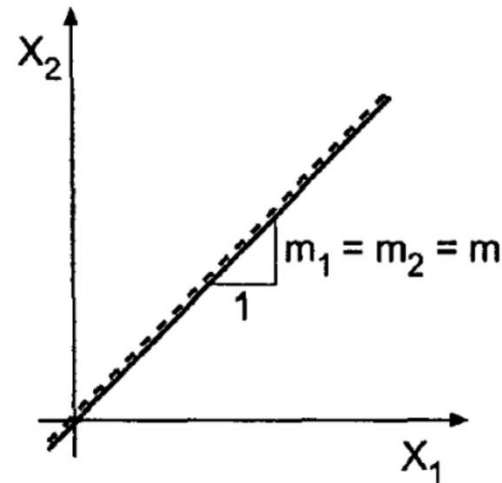
$$x_2 = -\frac{(a_{11} - \lambda)}{a_{12}}x_1 = m_1x_1$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{(a_{22} - \lambda)}x_1 = m_2x_1$$

Układ 2 rzędu (cd.)



(a) $m_1 \neq m_2$.



(b) $m_1 = m_2 = m$.

$$x_2 = -\frac{(a_{11} - \lambda)}{a_{12}}x_1 = m_1x_1$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{(a_{22} - \lambda)}x_1 = m_2x_1$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

Dowód

Układ ten ma rozwiązanie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tylko pod warunkiem, że:
 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow x_j = \frac{\det(\mathbf{C}^j)}{\det(\mathbf{C})} = \frac{0}{|\mathbf{C}|} \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$x_j \times |\mathbf{C}| = 0, j = 1, \dots, n$$

Skoro $\exists x_j \neq 0$,

więc $\det(\mathbf{C}) = |\mathbf{C}| = 0$

Dowód (cd.)

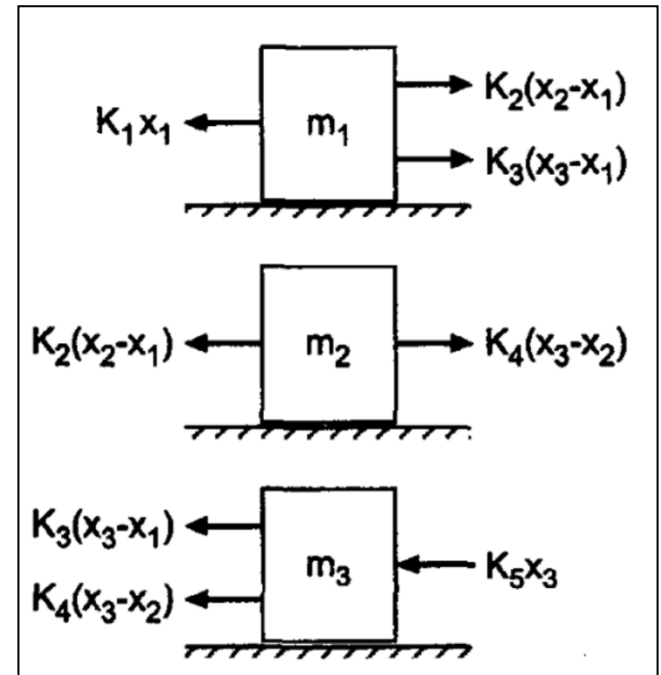
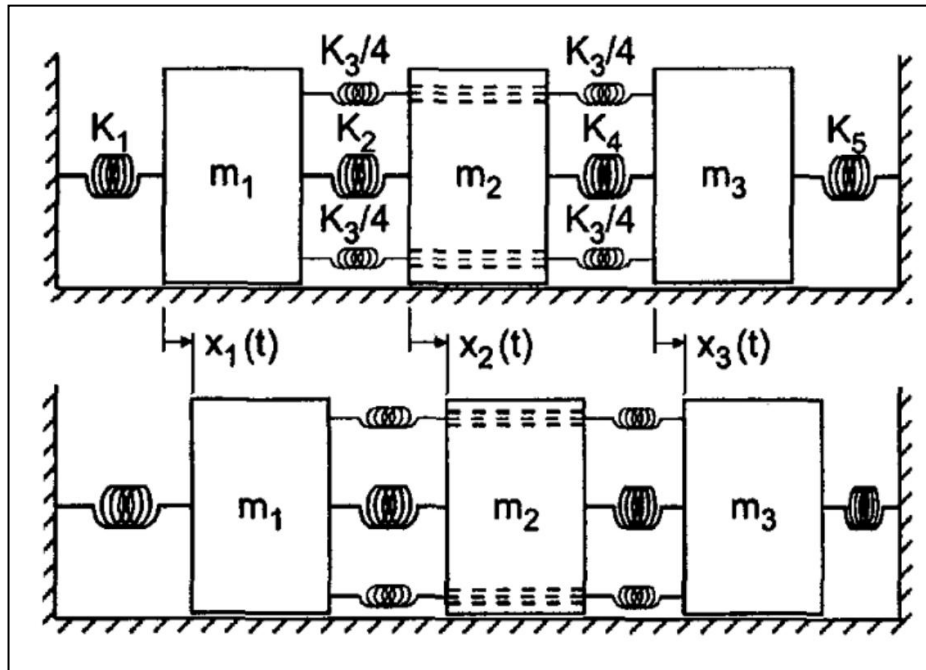
Niech λ jest wartością własną macierzy A

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Przykład zastosowania



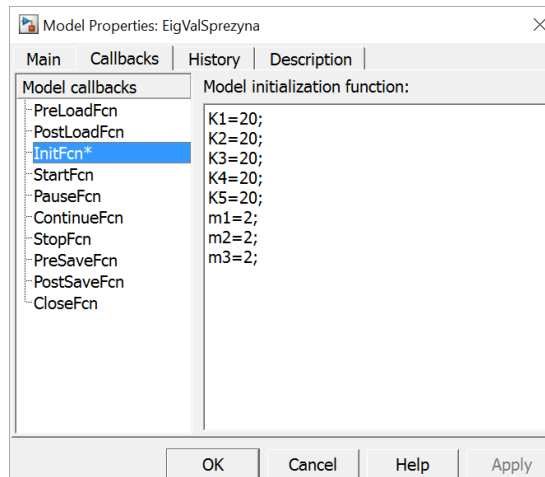
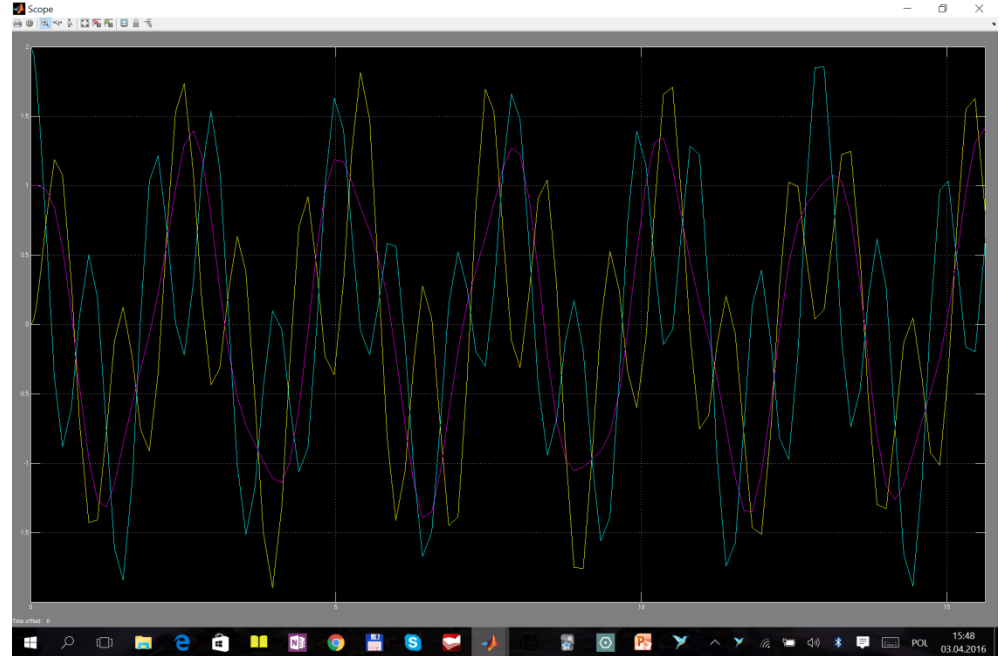
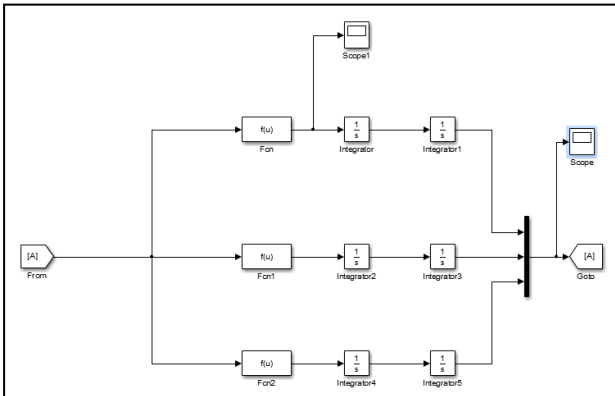
$$-(K_1 + K_2 + K_3)x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 = m_1\ddot{x}_1$$

$$K_2x_1 - (K_2 + K_4)x_2 + K_4x_3 = m_2\ddot{x}_2$$

$$K_3x_1 + K_4x_2 - (K_3 + K_4 + K_5)x_3 = m_3\ddot{x}_3$$

Przykład (cd.)

$$\begin{aligned} -(K_1 + K_2 + K_3)x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 &= m_1\ddot{x}_1 \\ K_2x_1 - (K_2 + K_4)x_2 + K_4x_3 &= m_2\ddot{x}_2 \\ K_3x_1 + K_4x_2 - (K_3 + K_4 + K_5)x_3 &= m_3\ddot{x}_3 \end{aligned}$$



Przykład (cd.)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \sin(\omega t)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \omega \mathbf{X} \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{X} \sin(\omega t)$$

$$-(K_1 + K_2 + K_3)X_1 + K_2X_2 + K_3X_3 = -m_1\omega^2X_1$$

$$K_2X_1 - (K_2 + K_4)X_2 + K_4X_3 = -m_2\omega^2X_2$$

$$K_3X_1 + K_4X_2 - (K_3 + K_4 + K_5)X_3 = -m_3\omega^2X_3$$

Przykład (cd.)

$$(K_1 + K_2 + K_3) - m_1\omega^2)X_1 - K_2X_2 - K_3X_3 = 0$$

$$-K_2X_1 + (K_2 + K_4 - m_2\omega^2)X_2 - K_4X_3 = 0$$

$$-K_3X_1 - K_4X_2 + (K_3 + K_4 + K_5 - m_3\omega^2)X_3 = 0$$

$$\bar{m} = m/m_{\text{ref}}$$

$$\bar{K} = K/K_{\text{ref}}$$

$$\left[\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 - \bar{m}_1 \left(\frac{m_{\text{ref}}\omega^2}{K_{\text{ref}}} \right) \right] X_1 - \bar{K}_2X_2 - \bar{K}_3X_3 = 0$$

$$-\bar{K}_2X_1 + \left[\bar{K}_2 + \bar{K}_4 - \bar{m}_2 \left(\frac{m_{\text{ref}}\omega^2}{K_{\text{ref}}} \right) \right] X_2 - \bar{K}_4X_3 = 0$$

$$-\bar{K}_3X_1 - \bar{K}_4X_2 + \left[\bar{K}_3 + \bar{K}_4 + \bar{K}_5 - \bar{m}_3 \left(\frac{m_{\text{ref}}\omega^2}{K_{\text{ref}}} \right) \right] X_3 = 0$$

Przykład (cd.)

$$\lambda = \frac{m_{\text{ref}} \omega^2}{K_{\text{ref}}}$$

$$(\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 - \bar{m}_1 \lambda) X_1 - \bar{K}_2 X_2 - \bar{K}_3 X_3 = 0$$

$$-\bar{K}_2 X_1 + (\bar{K}_2 + \bar{K}_4 - \bar{m}_2 \lambda) X_2 - \bar{K}_4 X_3 = 0$$

$$-\bar{K}_3 X_1 - \bar{K}_4 X_2 + (\bar{K}_3 + \bar{K}_4 + \bar{K}_5 - \bar{m}_3 \lambda) X_3 = 0$$

Przykład (cd.)

$$K_1 = 40 \text{ N/cm}, K_2 = K_3 = K_4 = 20 \text{ N/cm}, K_5 = 90 \text{ N/cm},$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 2 \text{ kg}, K_{\text{ref}} = 10 \text{ N/cm}, m_{\text{ref}} = 2 \text{ kg}$$

$$(8 - \lambda)X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 0$$

$$-2X_1 + (4 - \lambda)X_2 - 2X_3 = 0$$

$$-2X_1 - 2X_2 + (13 - \lambda)X_3 = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

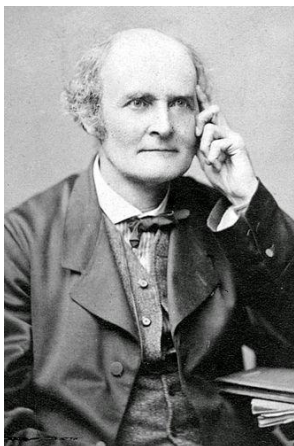
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} (8 - \lambda)X_1 - 2X_2 - 2X_3 &= 0 \\ -2X_1 + (4 - \lambda)X_2 - 2X_3 &= 0 \\ -2X_1 - 2X_2 + (13 - \lambda)X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona



Arthur Cayley (ur. 16 sierpnia 1821 w Richmond (hrab. Surrey), zm. 26 stycznia 1895 w Cambridge) – angielski matematyk[1] i prawnik.

Każda macierz kwadratowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego.

$$p_A(t) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

$$p_A(A) = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_0 = 0.$$



William Rowan Hamilton (ur. 4 sierpnia 1805 w Dublinie, zm. 2 września 1865) – matematyk, astronom i fizyk irlandzki.

Przykład (cd.)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (8 - \lambda) & -2 & -2 \\ -2 & (4 - \lambda) & -2 \\ -2 & -2 & (13 - \lambda) \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

$$(8 - \lambda) [(4 - \lambda)(13 - \lambda) - 4] - (-2) [(-2)(13 - \lambda) - 4] + (-2)[4 + 2(4 - \lambda)] = 0$$

$$\lambda^3 - 25\lambda^2 + 176\lambda - 300 = 0$$

$$\lambda = 13.870585, \quad 8.620434, \quad 2.508981$$

```
>> A=[8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13];  
>> A^3-25*A^2+176*A-300*eye(3)
```

```
ans =
```

```
0    0    0  
0    0    0  
0    0    0
```

$$\lambda^3 - 25\lambda^2 + 176\lambda - 300 = 0$$

Przykład (cd.)

$$f_1 = 2\pi\omega_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_1 K_{\text{ref}}}{m_{\text{ref}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(13.870585)(10)}{2}} = 16.656 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2\pi\omega_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_2 K_{\text{ref}}}{m_{\text{ref}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(8.620434)(10)}{2}} = 13.130 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 2\pi\omega_3 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_3 K_{\text{ref}}}{m_{\text{ref}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(2.508981)(10)}{2}} = 7.084 \text{ Hz}$$



Przykład (cd.)

Obliczymy wektory własne (amplitudy)

$$(8 - \lambda)X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 0$$

$$-2X_1 + (4 - \lambda)X_2 - 2X_3 = 0$$

$$-2X_1 - 2X_2 + (13 - \lambda)X_3 = 0$$

$$X_1 = 1.0$$



$$\lambda_i (i = 1, 2, 3)$$

$$(8 - \lambda)X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 0$$

$$-2X_1 - 2X_2 + (13 - \lambda)X_3 = 0$$

$$X_3 = \frac{(10 - \lambda)}{15} - \lambda$$

$$X_2 = \frac{(8 - \lambda)}{2} - X_3$$

Przykład (cd.)

$$\lambda_1 = 13.870586:$$

$$\mathbf{X}_1 = [1.000000 \quad 0.491779 \quad -3.427072]$$

$$\lambda_2 = 8.620434:$$

$$\mathbf{X}_2 = [1.000000 \quad -0.526465 \quad 0.216247]$$

$$\lambda_3 = 2.508981:$$

$$\mathbf{X}_3 = [1.000000 \quad 2.145797 \quad 0.599712]$$

$$x_1 * x_2' = 0, x_1 * x_3' = 0, x_2 * x_3' = 0$$

Zadanie

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$$

Odpowiada
wartości własnej 5

Sprawdzić:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\lambda_1 = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x + 4y = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 2 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x + 4y = 0$$

$$2x + 4y = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Odpowiada
wartości własnej -1

Zadanie

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy A za pomocą równania charakterystycznego:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Obliczenia w Matlabie

```
[V L]=eig([1 3;2 2])
```

```
L =
```

```
-1.  0.
```

```
0.  4.
```

```
V =
```

```
-0.8320503 -0.7071068
```

```
0.5547002 -0.7071068
```

```

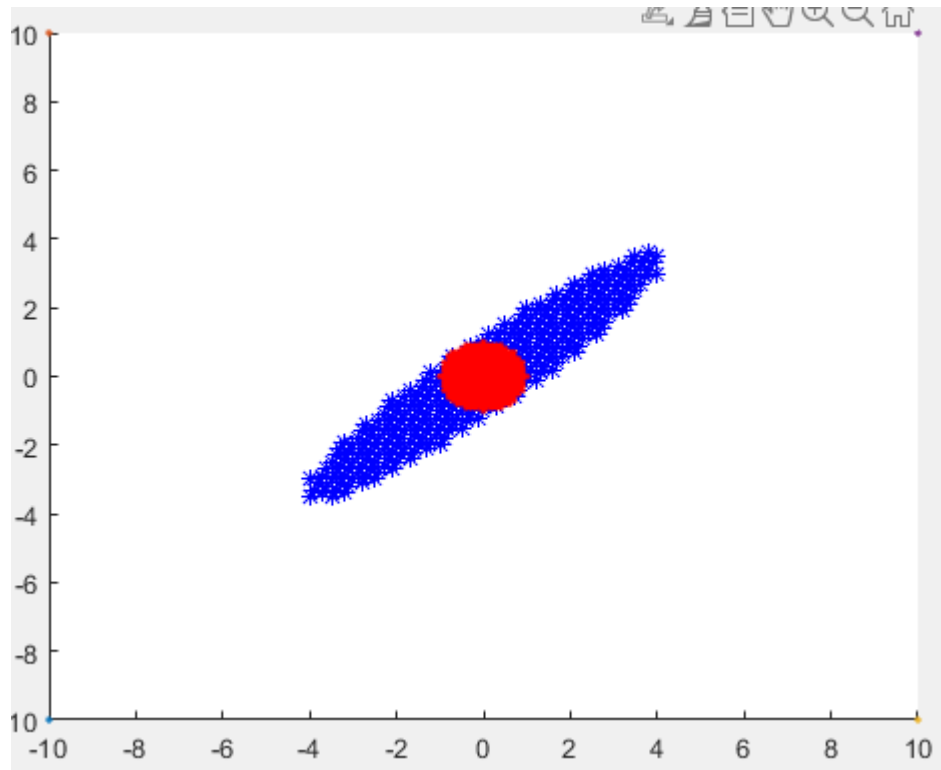
hold on;
for x1=-10:0.1:10
    for x2=-10:0.1:10
        Y=[1 -4 ;2 -3]*[x1 x2]';
        % Y=-5.*[x1 x2]';
        if (x1^2+x2^2)<=1
            plot(Y(1),Y(2),'*b');
        end;
    end;
end;
plot(-10,-10,'.');
plot(-10,10,'.');
plot(10,-10,'.');
plot(10,10,'.');

```

```

hold on;
for x1=-10:0.1:10
    for x2=-10:0.1:10
        if (x1^2+x2^2)<=1
            plot(x1,x2,'.r');
        end;
    end;
end;
plot(-10,-10,'.');
plot(-10,10,'.');
plot(10,-10,'.');
plot(10,10,'.');

```



Metoda potęgowa

Metoda potęgowa służy do wyznaczenia **maksymalnej co do modułu wartości własnej** i odpowiadającego jej **wektora własnego**.

Ponumerujemy wartości własne od największej do najmniejszej:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są **liniowo niezależne**.

Każdy inny wektor $\mathbf{x}$ może być przedstawiony jednoznacznie jako kombinacja liniowa **wektorów własnych** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \dots + C_n\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n C_i\mathbf{x}_i$$

gdzie c_i – stałe skalarne $\neq 0$.

Wartość własna dominująca

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i = 2, \dots, n.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

Metoda potęgowa (cd.)

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

Dla dowolnego wektora

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + C_n \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{y}^{(1)}$$

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(1)} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i \overset{\substack{\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \\ \downarrow}}{\mathbf{A}\mathbf{x}_i} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^2 \mathbf{x}_i = \mathbf{y}^{(2)}$$

.....

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)} = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^{k-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k \mathbf{x}_i = \mathbf{y}^{(k)}$$

Metoda potęgowa (cd.)

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{i=1}^n C_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_i = \mathbf{y}^{(k)}$$

Jeśli $|\lambda_1| > |\lambda_i| \quad i = 2, 3, \dots, n$

to $(\lambda_i/\lambda_1)^k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$

Więc

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda_1^k C_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}^{(k)}$$

Jeśli $|\lambda_1| < 1$ to proces jest zbieżny inaczej rozbieżny

Metoda potęgowa (cd.)

Skalowanie

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda_1^k C_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}^{(k)} \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$$

Niech komponent

$$x_1 = 1.0$$

Więc

$$y_1^{(k)} = \lambda_1^k C_1$$

Skąd

$$y_1^{(k+1)} = \lambda_1^{k+1} C_1 \quad \frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}} = \frac{\lambda_1^{k+1} C_1}{\lambda_1^k C_1} = \lambda_1$$

Jeśli

$$y_1^{(k)} = 1 \quad \text{to} \quad y_1^{(k+1)} = \lambda_1$$

Jeśli

$$y_1^{(k+1)} = 1 \quad \text{to} \quad y_1^{(k+2)} = \lambda_1$$

...

$$\lambda = \frac{\mathbf{A} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}} \rightarrow \lambda_1$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_1$$

Przykład

A =

```
2 -12
1 -5
```

```
>> eig(A)
```

ans =

```
-1
-2
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Wektor własny [3 1]'

```
>> A*[3 1]'
```

ans =

```
-6
-2
```

```
>> -2*[3 1]'
```

ans =

```
-6
-2
```

```
>> 190/(-94)
```

ans =

```
-2.0213
```

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A^2\mathbf{x}_0) = A^3\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k &= A\mathbf{x}_{k-1} = A(A^{k-1}\mathbf{x}_0) = A^k\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

	Iteration	Approximation
$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$-4 \begin{bmatrix} 2.50 \\ 1.00 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$10 \begin{bmatrix} 2.80 \\ 1.00 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 \\ -22 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$-22 \begin{bmatrix} 2.91 \\ 1.00 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -64 \\ -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 46 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$46 \begin{bmatrix} 2.96 \\ 1.00 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_5 = A\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -280 \\ -94 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$-94 \begin{bmatrix} 2.98 \\ 1.00 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}_6 = A\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -280 \\ -94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 568 \\ 190 \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	$190 \begin{bmatrix} 2.99 \\ 1.00 \end{bmatrix}$

Wektor własny [3 1]'

Przykład 2

FIND THE DOMINANT EIGENVECTOR AND THE CORRESPONDING EIGENVALUE

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -30 \\ 34 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ -30 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83 \\ -105 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.79 \\ 1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -83 \\ -105 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -247 \\ -276 \\ -40 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.89 \\ 1 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -247 \\ -276 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -603 \\ -639 \\ -197 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1 \\ 0.31 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

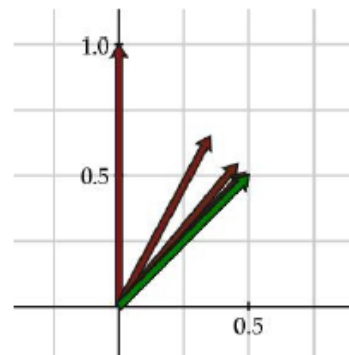
$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 23 & -19 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2$$

Zbieżność metody potęgowej

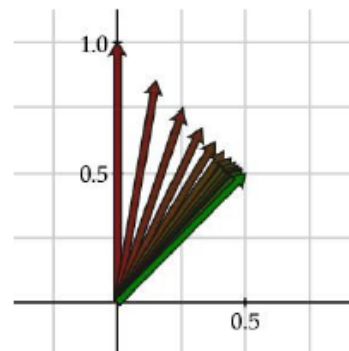
$$H = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.3$$



$$H = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.7$$



Zbieżność metody zależy od $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \dots + C_n \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i$$

$$[x]_{k+1} = [u]_1 + \frac{c_2 \lambda_2^k}{c_1 \lambda_1^k} [u]_2 + \dots + \frac{c_n \lambda_n^k}{c_1 \lambda_1^k} [u]_n$$

Zadanie

Znaleźć dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny macierzy A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Metoda odwrotna potęgowa

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Metoda potęgowa

$$\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{i=1}^n C_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_i = \mathbf{y}^{(k)}$$

Algorytm iteracyjny

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{x} = \lambda_{\text{inverse}} \mathbf{x}$$

Metoda na podstawie LU faktoryzacji

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{I} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A} \mathbf{y}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

inicjalizacja

$$\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\mathbf{L} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(0)}$$

$$\mathbf{U} \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(1)} \mathbf{x}^{(1)}$$

Skalowanie $\mathbf{y}^{(1)}$



iteracje

$$\mathbf{L} \mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{U} \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{invers}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

Przykład

```
>> eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])
```

ans =

2.5090

8.6204

13.8706

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)T} = [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 0 & 7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 75/7 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(0)}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$x'_1 = 1.0$$

$$x'_2 = 1.0 - (-1/4)(1.0) = 5/4$$

$$x'_3 = 1.0 - (-1/4)(1.0) - (-5/7)(5/4) = 15/7$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}'$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 0 & 7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 75/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 5/4 \\ 15/7 \end{bmatrix}$$

$$y_1^{(1)} = [1.0 - (-2.0)(0.5) - (-2)(0.2)]/8 = 0.30$$

$$y_2^{(1)} = [5/4 - (-5/2)(0.2)]/(7/2) = 0.50$$

$$y_3^{(1)} = (15/7)/(75/7) = 0.20$$

Przykład (cd.)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\mathbf{x}' &= \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} &= \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}^{(k+1)} &= \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}\end{aligned}$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{0.30} \\ 0.50 \\ 0.20 \end{bmatrix}$$

Skalowanie $\mathbf{y}^{(1)}$

$$\lambda_{\text{inverse}}^{(1)} = 0.300000$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.000000 \\ 1.666667 \\ 0.666667 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 0.3/0.3=1.00000 \\ 0.5/0.3=1.66667 \\ 0.2/0.3=0.66667 \end{array}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

Wektor własny

>> 1/0.398568
ans =
2.5090

k	λ_{inverse}	x_1	x_2	x_3
0		1.000000	1.000000	1.000000
1	0.300000	1.000000	1.666667	0.666667
2	0.353333	1.000000	1.981132	0.603774
3	0.382264	1.000000	2.094439	0.597565
4	0.393346	1.000000	2.130396	0.598460
...				
12	0.398568	1.000000	2.145796	0.599712
13	0.398568	1.000000	2.145797	0.599712

Przykład (cd.)

$$\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_{\text{inverse}}^{(k+1)} \mathbf{x}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_{\text{inverse}}} = \frac{1}{0.398568} = 2.508981$$

$$\mathbf{x}_3^T = [1.000000 \quad 2.145797 \quad 0.599712]$$

```
eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])
```

```
ans =
```

```
2.5090
```

```
8.6204
```

```
13.8706
```

Metoda przesuniętych iteracji

Niech s jest skalarem.

$$\begin{cases} s\mathbf{I}\mathbf{x} = s\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - s\mathbf{I}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - s\mathbf{x}$$

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{x} = (\lambda - s)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}_{\text{shifted}} \mathbf{x} = \lambda_{\text{shifted}} \mathbf{x}$$

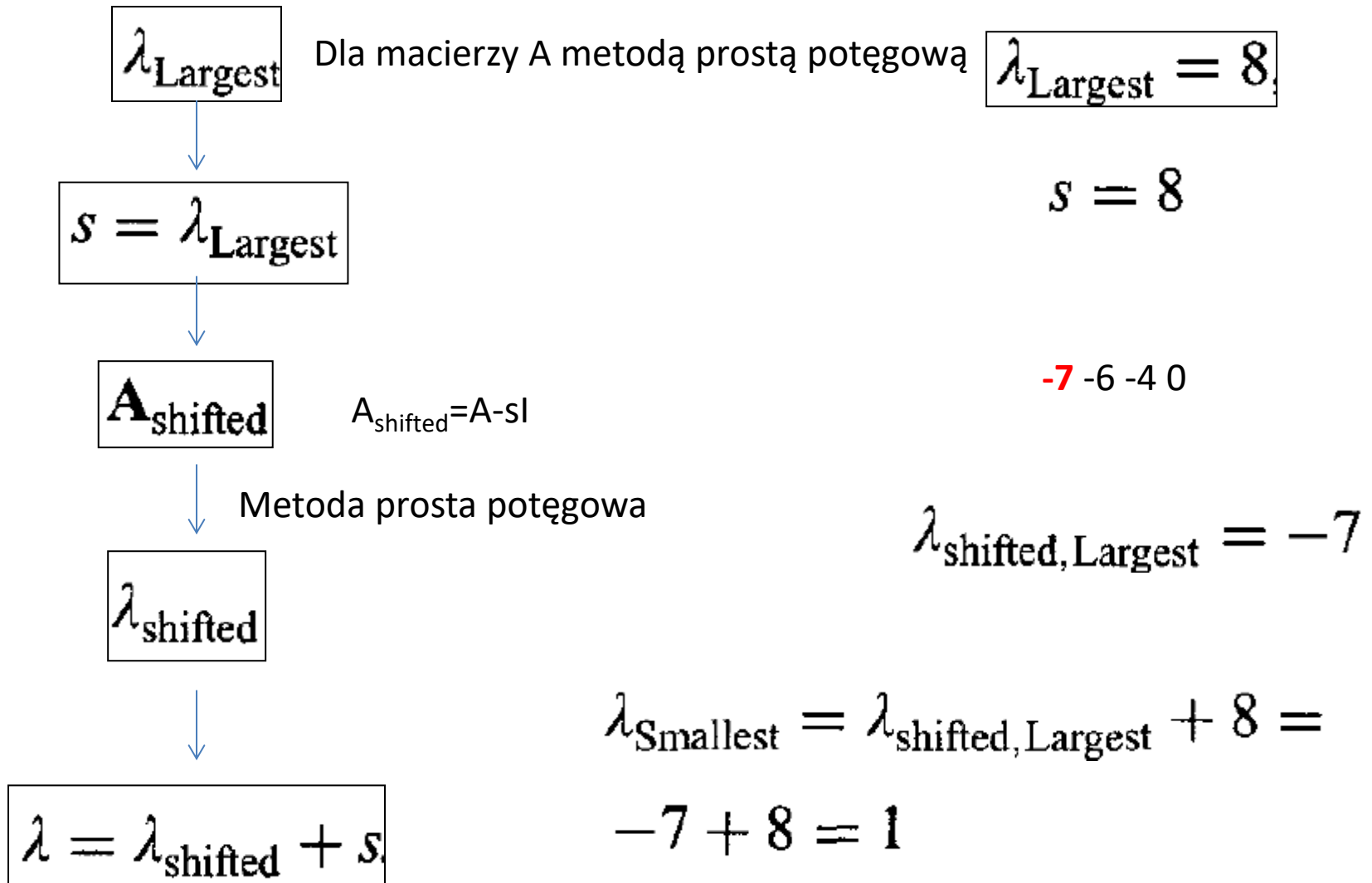
$$\mathbf{A}_{\text{shifted}} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I})$$

$$\lambda_{\text{shifted}} = \lambda - s$$

Algorytm

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Przykład 1 2 4 **8**



Przykład

```
>> A=[1 0 0 0;0 2 0 0;0 0 4 0;0 0 0 8]
```

A =

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

```
>> eig(A) det(A-lambda*I)=0
```

ans =

1
2
4
8

```
>> As=A-8*eye(4)
```

As =

-7	0	0	0
0	-6	0	0
0	0	-4	0
0	0	0	0

```
>> eig(As)
```

ans =

-7
-6
-4
0

-7+8=1

```
>> A=[1 0 0 0;0 2 0 0;0 0 4 0;0 0 0 8]
```

```
>> As=A-8*eye(4)
```

A =

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

As =

-7	0	0	0
0	-6	0	0
0	0	-4	0
0	0	0	0

$$\lambda_{\text{Smallest}} = \lambda_{\text{shifted,Largest}} + 8 =$$

$$-7 + 8 = 1$$

Przykład

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix} \quad s = \lambda_{\text{Largest}} = 13.870584$$

```
eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])  
2.5090  
8.6204  
13.8706
```

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{shifted}} &= \begin{bmatrix} (8 - 13.870584) & -2 & -2 \\ -2 & (4 - 13.870584) & -2 \\ -2 & -2 & (13 - 13.870584) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5.870584 & -2.000000 & -2.000000 \\ -2.000000 & -9.870584 & -2.000000 \\ -2.000000 & -2.000000 & -0.870584 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{x}^{(0)T} = [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{shifted}} \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} -5.870584 & -2.000000 & -2.000000 \\ -2.000000 & -9.870584 & -2.000000 \\ -2.000000 & -2.000000 & -0.870584 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9.870584 \\ -13.870584 \\ -4.870584 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^{(1)} \end{aligned}$$

Przykład (cd.)

k	λ_{shifted}	x_1	x_2	x_3
0		1.000000	1.000000	1.000000
1	-13.870584	0.711620	1.000000	0.351145
2	-11.996114	0.573512	1.000000	0.310846
3	-11.639299	0.514510	1.000000	0.293629
4	-11.486864	0.488187	1.000000	0.285948
....				
19	-11.361604	0.466027	1.000000	0.279482
20	<u>-11.361604</u>	0.466027	1.000000	0.279482

Przykład (cd.)

```
eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])
```

2.5090

8.6204

13.8706

$$\lambda_{\text{shifted,Largest}} = -11.361604$$

$$\lambda = \lambda_{\text{shifted,Largest}} + 13.870584 =$$

$$-11.361604 + 13.870586 = 2.508980$$

Wektor własny

20 | -11.361604

0.466027

1.000000

0.279482

Obliczenie pozostałych wartości własnych

Przykład : **1** 2 4 **8** $\lambda_{\text{Largest}} = 8$ $\lambda_{\text{Smallest}} = 1$

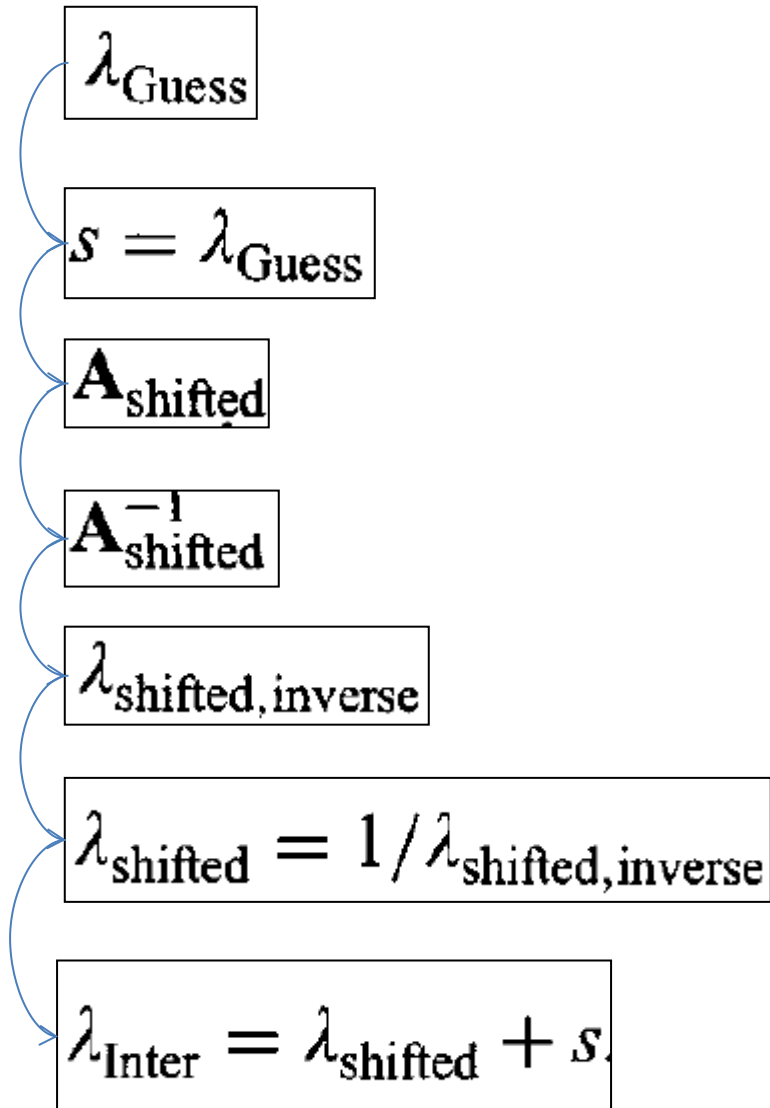
$$\lambda_{\text{Inter}} = 2 \text{ and } 4$$

$$\lambda_{\text{Guess}} = 5 \quad s = 5, \quad \text{Lista : } -4 \ -3 \ \textcolor{red}{-1} \ 3$$

Metoda odwrotna $\lambda_{\text{shifted}} = -1$

$$\lambda = \lambda_{\text{shifted}} + s = -1 + 5 = 4.$$

Algorytm



Przykład

```
>> A=[1 0 0 0;0 2 0 0;0 0 4 0;0 0 0 8]
```

A =

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

min =1, max=8

Najbliższa do $s=5$ wartość własna

```
>> s=5
```

s =

5

```
>> Asg=A-s*eye(4)
```

Asg =

-4	0	0	0
0	-3	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	3

```
>> eig(Asg)
```

ans =

-4

-3

-1

3

$$-1+s=-1+5=4$$

```
>> As1=As^-1
```

As1 =

-0.2500	0	0	0
0	-0.3333	0	0
0	0	-1.0000	0
0	0	0	0.3333

$$\lambda_{\max|.|} = -1$$

Przykład2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\text{Guess}} = 10.0$$

```
eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])  
2.5090  
8.6204  
13.8706
```

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{shifted}} &= (\mathbf{A} - \lambda_{\text{Guess}}\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} (8 - 10.0) & -2 & -2 \\ -2 & (4 - 10.0) & -2 \\ -2 & -2 & (13 - 10.0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 & -2.0 \\ -2.0 & -6.0 & -2.0 \\ -2.0 & -2.0 & 3.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Przykład2 (cd.)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 & -2.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(0)T} = [1.0 \quad 1.0 \quad 1.0] \quad \boxed{\mathbf{L}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(0)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$x'_1 = 1.0$$

$$x'_2 = 1.0 - 1.0(1.0) = 0.0$$

$$x'_3 = 1.0 - 1.0(1.0) - 1.0(0.0) = 0.0$$

Przykład2 (cd.)

$$\mathbf{U}\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}'$$

$$\begin{bmatrix} -2.0 & -2.0 & -2.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$y_3^{(1)} = 0.0/(5.0) = 0.0$$

$$y_2^{(1)} = [0.0 - (0.0)(0.0)]/(-4.0) = 0.0$$

$$y_1^{(1)} = [1.0 - (-2.0)(0.0) - (-2.0)(0.0)]/(-2.0) = -0.50$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.50 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \quad \lambda_{\text{shifted, inverse}}^{(1)} = -0.50 \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

k	$\lambda_{\text{shifted, inverse}}$	x_1	x_2	x_3
0		1.000000	1.000000	1.000000
1	-0.500000	1.000000	0.000000	0.000000
2	-0.550000	1.000000	-0.454545	0.363636
3	-0.736364	1.000000	-0.493827	0.172840
4	-0.708025	1.000000	-0.527463	0.233653
.....				
14	-0.724865	1.000000	-0.526465	0.216248
15	-0.724866	1.000000	-0.526465	0.216247

$$\boxed{\mathbf{A}_{\text{shifted}}^{-1}}$$

$$\lambda_{\text{shifted, inverse}} = -0.724866$$

$$\lambda_{\text{shifted}} = \frac{1}{\lambda_{\text{shifted, inverse}}} = \frac{1}{-0.724866} = -1.379566$$

Przykład2 (cd.)

```
>> eig([8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13])
```

ans =

2.5090

8.6204

13.8706

A

$$\lambda_I = \lambda_{\text{shifted}} + s = -1.379566 + 10.000000 = 8.620434$$

$$\mathbf{x}^T = [1.0 \quad -0.526465 \quad 0.216247]$$

Wektor własny

$$15 \quad | \quad -0.724866 \quad \underbrace{1.000000 \quad -0.526465 \quad 0.216247}$$

Zadanie

Znaleźć maksymalną wartość własną macierzy A za pomocą metody potęgowej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Zrobić 3 kroki

Odpowiedź

```
>> eig(A)
    0.388125791921659
    20.6118742080783
```

```
>> x=[1 1]'
```

```
>> x=A*x;x
```

```
x =
```

```
    5
```

```
   23
```

```
>> x=A*x;x
```

```
x =
```

```
   97
```

```
  475
```

```
>> 475/23
```

```
ans =
```

```
20.6521739130435
```

Wartości własne macierzy U

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} (u_{11} - \lambda) & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & (u_{22} - \lambda) & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & (u_{33} - \lambda) & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (u_{nn} - \lambda) \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I}|$$

$$(u_{11} - \lambda) (u_{22} - \lambda) (u_{33} - \lambda) \cdots (u_{nn} - \lambda) = 0$$

$$\lambda_i = u_{i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Cel metody QR – przekształcenie macierzy A do trybu U

Przykład 1

A =

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

>> B=A

B =

1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

>> B(1,4)=100

B =

1	0	0	100
0	2	0	0
0	0	4	0
0	0	0	8

>> eig(B)

ans =

1
2
4
8

Przykład 2

```
>> A=[2 3 4; 0 -1 3; 0 0 5]
```

```
A =
```

```
2  3  4  
0 -1  3  
0  0  5
```

```
>> eig(A)
```

```
ans =
```

```
2  
-1  
5
```

QR metoda

$$A = QR \longrightarrow Rx = Q^T b$$

Q jest macierzą ortogonalną, R jest macierzą U

Definicja: Macierz Q jest **ortogonalna**, jeśli wektory q_i utworzone z jej kolumn mają długość 1 i są wzajemnie prostopadłe. Czyli, $Q = [q_1, \dots, q_n]$, dla każdego j mamy $|q_j| = 1$ oraz $q_i^* q_j = 0$ dla $i \neq j$.

$$Q^T Q = I$$

$$Q Q^T = I$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

Transformacje ortogonalne nie zniekształcają obrazów (odpowiadają za rotacje i odbicia).

QR faktoryzacja

$$A = \left[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \right] =$$

Q

R

$$\left[\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{e}_1 \\ 0 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = QR$$

$$QR = A$$

$$R = Q^T A$$

Metody ortogonalizacji

przekształcenie układu liniowo niezależnych wektorów przestrzeni unitarnej w układ wektorów ortogonalnych:

- ortogonalizacja Grama-Schmidta
- transformacja Householdera (elementarne odbicia)
- transformacja Givensa (elementarne obroty)

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Ortogonalizacja Grama-Schmidta – przekształcenie układu liniowo niezależnych wektorów przestrzeni unitarnej w układ wektorów ortogonalnych.

$$A = \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$$

$$B = \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N$$

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$$

$$\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \quad (1)$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_2 \quad (2)$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_3 - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_4 = \mathbf{a}_4 - \text{proj}_{\mathbf{b}_1} \mathbf{a}_4 - \text{proj}_{\mathbf{b}_2} \mathbf{a}_4 - \text{proj}_{\mathbf{b}_3} \mathbf{a}_4 \quad (4)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_N = \mathbf{a}_N - \sum_{j=1}^{N-1} \text{proj}_{\mathbf{b}_j} \mathbf{a}_N \quad (N)$$

Ortogonalizacja wektorów

$$A = \left[\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \right] \longrightarrow \left[\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n \right]$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|},$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}.$$

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} - (\mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \cdots - (\mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k,$$

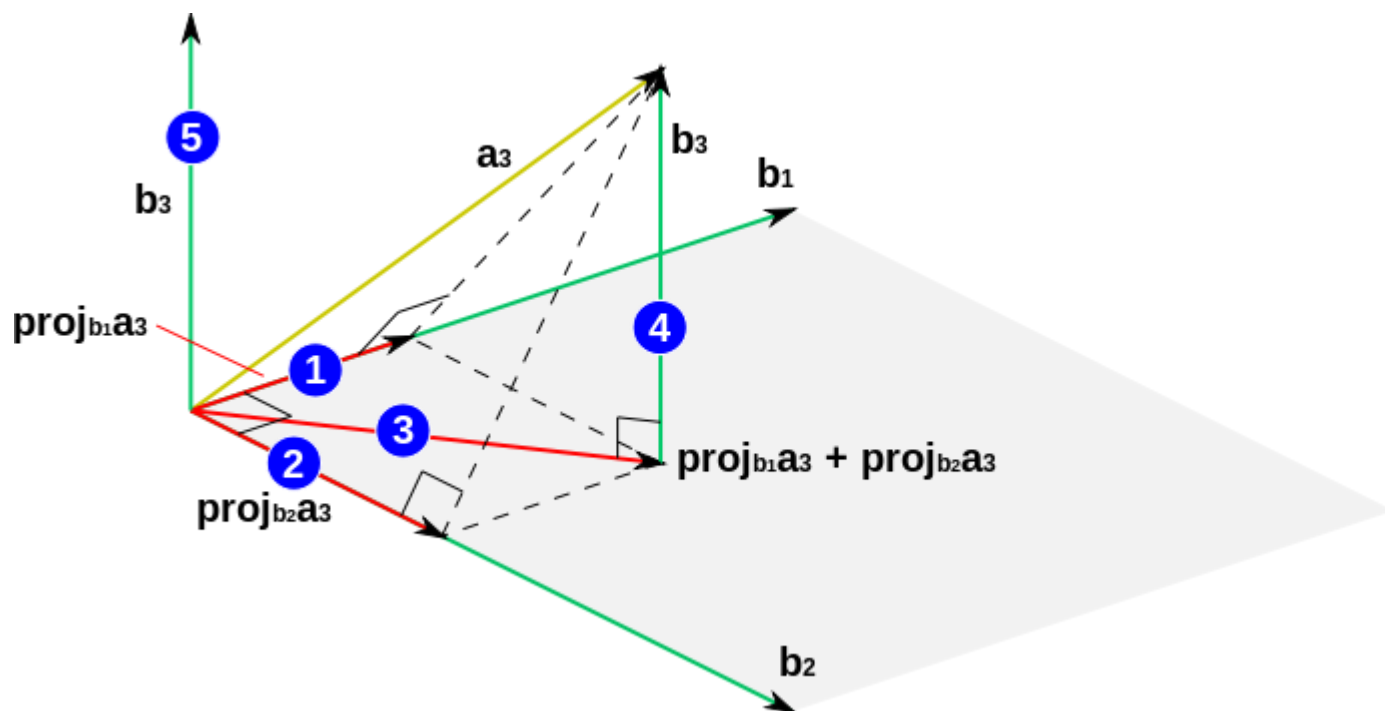
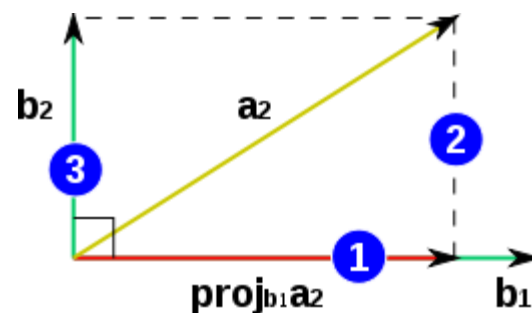
$$\mathbf{e}_{k+1} = \frac{\mathbf{u}_{k+1}}{\|\mathbf{u}_{k+1}\|}$$

Interpretacja geometryczna

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - \text{proj}_{b_1} a_2$$

$$b_3 = a_3 - (\text{proj}_{b_1} a_3 + \text{proj}_{b_2} a_3)$$



Rzutowanie ortogonalne

Operator rzutowania ortogonalnego wektora $\mathbf{v}$ na wektor $\mathbf{u}$ definiujemy jako:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}.$$

Wówczas dla układu k wektorów $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ proces przebiega następująco:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_j} \mathbf{v}_k,$$

czyli wektor $\mathbf{u}_k$ to wektor $\mathbf{v}_k$ po odjęciu od niego rzutu wektora $\mathbf{v}_k$ na podprzestrzeń rozpiętą przez wektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$. Otrzymany zbiór $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ jest zbiorem wektorów ortogonalnych.

Aby zbudować w ten sposób zbiór [ortonormalny](#), każdy wektor należy podzielić przez jego [normę](#):

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}, n = 1, 2, \dots, k$$

Przykład 1

Rozważmy zbiór wektorów w $\mathbf{R}^2$ (ze standardowym iloczynem skalarnym):

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Teraz przeprowadzamy ortogonalizację, aby otrzymać wektory parami prostopadłe

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \text{proj}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że wektory $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ rzeczywiście są prostopadłe:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} \right\rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0,$$

ponieważ jeśli dwa wektory są prostopadłe, to ich iloczyn skalarny wynosi 0.

Następnie normalizujemy wektory, dzieląc każdy przez ich normy:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przykład 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)^T, \mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)^T$$

Przykład 2(cd.)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 1, 0),$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Przykład 2 (cd.)

$$Q = \left[\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$
$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1 \\ 0 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podstawowa idea dekompozycji QR polega na utworzeniu iterowanej sekwencji macierzy $\{[A_i]\}$ podobnych do pierwotnej macierzy $[A]$, które zbiegają do takiej postaci, której wartości własne są dostępne.

Twierdzenie: Niech $[A] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i niech $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$. Wtedy sekwencja $\{[A_i]\}$ zbiega do macierzy trójkątnej górnej.

Algorytm

```
[A]1 = [A]
for k = 1..kmax
    [A]k = [Q]k[R]k
    [A]k+1 = [R]k[Q]k
```

Q jest macierzą **ortogonalną**,
R=U

A  U

Zwróćmy uwagę, że

$$[A]_k = [Q]_k [R]_k$$

$$[Q]_k^T [A]_k = [Q]_k^T [Q]_k [R]_k$$

$$[R]_k = [Q]_k^T [A]_k$$

$$[A]_{k+1} = [R]_k [Q]_k$$

$$[A]_{k+1} = [Q]_k^T [A]_k [Q]_k$$

Czyli $[A]_{k+1}$ i $[A]_k$ to macierze podobne.

Macierze podobne mają jednakowe wielomiany charakterystyczne i dlatego mają także jednakowe widma wartości własnych.

Zbieżność QR metody

<https://sites.math.rutgers.edu/~falk/math574/lecture9.pdf>

Theorem 22. Suppose that A has eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfying $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$. Let X denote the matrix whose i th column is an eigenvector of A corresponding to λ_i and suppose that X^{-1} has an LU decomposition. Then the subdiagonal elements of the matrices A_s of the basic QR algorithm tend to zero and for $i = 1, 2, \dots, n$, $(A_s)_{ii} \rightarrow \lambda_i$.

Note that since we are assuming that the eigenvalues are distinct, we know there are a complete set of linearly independent eigenvectors and hence X^{-1} exists.

Without giving a formal proof, let us try to understand what makes this algorithm work. Recall that the QR algorithm sets $A_1 = A$, factors $A_i = Q_i R_i$ and then sets $A_{i+1} = R_i Q_i$. Since $Q_i^{-1} = Q_i^T$, we have $R_i = Q_i^T A_i$ and so

$$A_{i+1} = Q_i^T A_i Q_i.$$

Thus, we have performed a similarity transformation, which preserves the eigenvalues. If we iterate the above equation, we get

$$A_{i+1} = Q_i^T A_i Q_i = Q_i^T Q_{i-1}^T A_{i-1} Q_{i-1} Q_i = \dots Q_1^T \dots Q_i^T A_1 Q_1 \dots Q_i = P_i^T A_1 P_i,$$

where $P_i = Q_1 \dots Q_i$. Note that P_i is the product of orthogonal matrices and hence is orthogonal.

Now under our assumptions, we can write $A = XDX^{-1}$ where $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ and X is a real matrix of eigenvectors of A . We know there is a factorization of $X = QR$, where Q is orthogonal and R is upper triangular. Then

$$A = QRDR^{-1}Q^{-1} \quad \text{and so} \quad Q^{-1}AQ = RDR^{-1}.$$

Since RDR^{-1} is the product of upper triangular matrices, it is also upper triangular, and hence we know that $Q^{-1}AQ = Q^T AQ$ is upper triangular. Note that the eigenvalues of A will then lie of the diagonal of $Q^T AQ$.

The theorem is proved by showing that $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = Q$, since this implies that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i^T A_1 P_i = Q^T A Q.$$

In other words, the matrices A_i are converging to an upper triangular matrix whose diagonal elements are the eigenvalues of A .

To see why $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = Q$, we look at the quantity $P_i U_i$, where $U_i = R_i R_{i-1} \dots R_1$. Then

$$P_i U_i = Q_1 \dots Q_i R_i \dots R_1 = Q_1 \dots Q_{i-1} A_i R_{i-1} \dots R_1 = P_{i-1} A_i U_{i-1}.$$

But since $A_{i+1} = P_i^T A_1 P_i$, we have $P_i A_{i+1} = A_1 P_i$, or after reducing the indices by one, $P_{i-1} A_i = A_1 P_{i-1}$. Hence,

$$P_i U_i = A_1 P_{i-1} U_{i-1}.$$

If we iterate this identity, we get

$$P_i U_i = (A_1)^{i-1} P_1 U_1 = (A_1)^{i-1} Q_1 R_1 = A^i.$$

Using the fact that $A = XDX^{-1}$, we also have that $A^i = X D^i X^{-1}$. We know that $X = QR$ and by hypothesis $X^{-1} = LU$. Hence,

$$A^i = Q R D^i L U = Q R (D^i L D^{-i}) D^i U.$$

Equating these two expressions for A^i , we get that

$$P_i U_i = Q R (D^i L D^{-i}) D^i U.$$

The key step in the proof is to show that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D^i L D^{-i} = I.$$

Assuming for the moment that this is true, the right hand side becomes $Q R D^i U$. But $R D^i U$ is the product of upper triangular matrices and is therefore upper triangular. Hence, we are essentially able to identify $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i$ with Q , since both are orthogonal matrices, and $\lim_{i \rightarrow \infty} U_i$ with $\lim_{i \rightarrow \infty} R D^i U$ since both quantities are upper triangular matrices. We have ignored a subtle point; namely that the QR factorization is only unique if R is chosen to have positive diagonal entries. So we must choose all the decompositions to insure this property so that we can identify the individual pieces of the decomposition. Returning to the key step, we observe that the matrix $D^i L D^{-i}$ is a lower triangular matrix whose j, k th element is given by $l_{jk}(\lambda_j/\lambda_k)^i$, when $j > k$. Since $|\lambda_j/\lambda_k| < 1$ for $j > k$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D^i L D^{-i} = I.$$

So, the convergence is very similar to that of the power method.

Using the similarity to the power method, we expect to be able to improve the convergence by changing the method to correspond to the inverse power method. Thus, we consider the QR method with origin shift, described by the algorithm: Let s_i be any number. (i) Factor $A_i - s_i I = Q_i R_i$ and then (ii) set $A_{i+1} = R_i Q_i + s_i I$. Note that

$$A_{i+1} = Q_i^T Q_i R_i Q_i + Q_i^T s_i Q_i = Q_i^T (A_i - s_i I) Q_i + Q_i^T s_i Q_i = Q_i^T A_i Q_i.$$

Hence A_{i+1} is similar to A_i .

Since we expect that $(A_i)_{nn}$ is converging to an eigenvalue of A , we can choose $s_i = (A_i)_{nn}$. We will then get an iteration similar to the Rayleigh quotient iteration.

Remark: In general, the method produces a sequence of matrices that do not converge to a triangular matrix, but rather to a block triangular matrix (for example if we have complex conjugate eigenvalues), from which we can also determine the eigenvalues. In this case, a more complicated shift strategy is used.

Eigenvalue of Matrix Powers

https://proofwiki.org/wiki/Eigenvalue_of_Matrix_Powers

Theorem

Let A be a square matrix.

Let λ be an eigenvalue of A and $\mathbf{v}$ be the corresponding eigenvector.

Then:

$$A^n \mathbf{v} = \lambda^n \mathbf{v}$$

holds for each positive integer n .

Proof

Proof by induction:

For all $n \in \mathbb{N}_{>0}$, let $P(n)$ be the proposition:

$$A^n \mathbf{v} = \lambda^n \mathbf{v}$$

Basis for the Induction

$P(1)$ is true, as this just says:

$$A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

which follows by definition of eigenvector.

This is our basis for the induction.

Induction Hypothesis

Now we need to show that, if $P(k)$ is true, where $k \geq 2$, then it logically follows that $P(k+1)$ is true.

So this is our induction hypothesis:

$$A^k \mathbf{v} = \lambda^k \mathbf{v}$$

Then we need to show:

$$A^{k+1} \mathbf{v} = \lambda^{k+1} \mathbf{v}$$

Induction Step

This is our induction step:

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} \mathbf{v} &= \lambda \cdot \lambda^k \mathbf{v} \\ &= \lambda A^k \mathbf{v} && \text{Induction Hypothesis} \\ &= A^k \lambda \mathbf{v} \\ &= A^k A \mathbf{v} && \text{Basis for the Induction} \\ &= A^{k+1} \mathbf{v} \end{aligned}$$

So $P(k) \implies P(k+1)$ and the result follows by the Principle of Mathematical Induction.

Therefore:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} : A^n \mathbf{v} = \lambda^n \mathbf{v}$$



QR metoda

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad \|\mathbf{a}_1\| = [a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{n1}^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2}{\|\mathbf{a}'_2\|}$$

$$\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{a}'_3}{\|\mathbf{a}'_3\|}$$

QR metoda (cd.)

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\mathbf{q}_k^T \mathbf{a}_i) \mathbf{q}_k \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{a}'_i}{\|\mathbf{a}'_i\|} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n]$$

A=QR

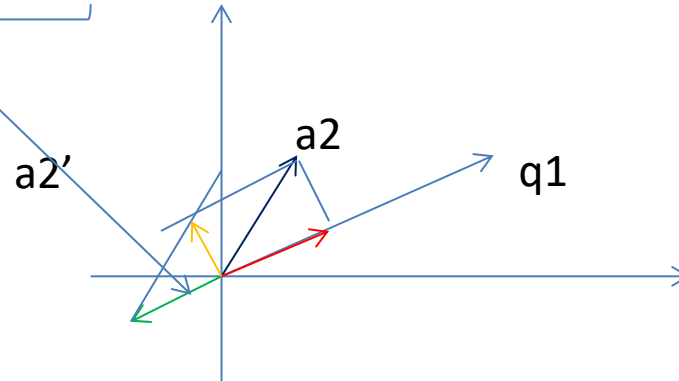
$$r_{i,i} = \|\mathbf{a}'_i\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$r_{i,j} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = i + 1, \dots, n)$$

Geometryczna interpretacja

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \underbrace{(\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1}$$

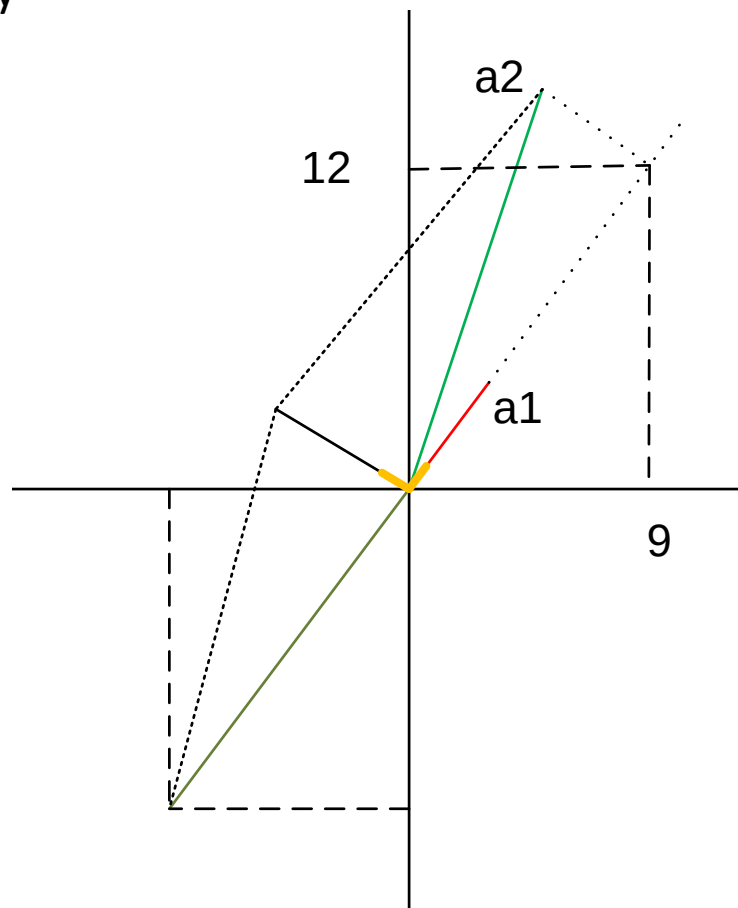
$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2}{\|\mathbf{a}'_2\|}$$



Zadanie

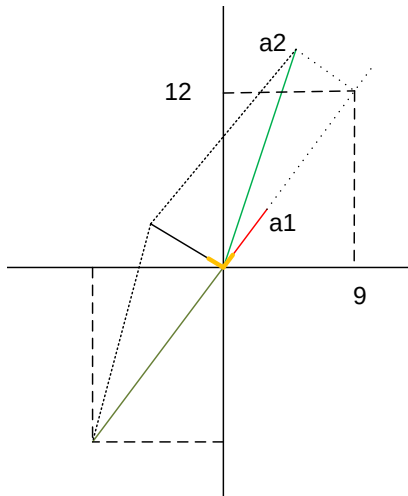
Dokonać QR faktoryzacji dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$



Odpowiedź

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}$$

$$\mathbf{q}_1 = [3/5 \quad 4/5]'$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2}{\|\mathbf{a}'_2\|}$$

$$\mathbf{q}_1' * \mathbf{a}_2 = [3/5 \quad 4/5] * [5 \quad 15]' = 3 + 12 = 15$$

$$(\mathbf{q}_1' * \mathbf{a}_2) * \mathbf{q}_1 = 15 * [3/5 \quad 4/5]' = [9 \quad 12]'$$

$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - \mathbf{q}_1' * \mathbf{a}_2 * \mathbf{q}_1 = [5 \quad 15]' - [9 \quad 12]' = [-4 \quad 3]'$$

$$\mathbf{q}_2 = [-4/5 \quad 3/5]$$

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$r_{i,i} = \|\mathbf{a}'_i\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$r_{11} = 5$$

$$r_{22} = 5$$

$$r_{i,j} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = i + 1, \dots, n)$$

$$r_{12} = [3/5 \quad 4/5] * [5 \quad 15]' = 15$$

QR metoda (cd.)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)}$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k)}$$

Zadanie na QR metodę

```
>> A=[1 3;2 4]
```

```
A =
```

```
1 3
```

```
2 4
```

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \quad \|\mathbf{a}_1\| = [a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{n1}^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}'_2}{\|\mathbf{a}'_2\|}$$

Rozwiązanie

```
>> A=[1 3;2 4]
```

```
A =
```

```
1 3  
2 4
```

```
>> q1=[1 2]/na1
```

```
q1 =
```

```
0.4472  0.8944
```

```
>>
```

```
na2p=sqrt(a2p(1)^2+a2p(2)^2)
```

```
>> a2p=[3 4]'-q1*[3 4]'*q1'
```

```
na2p =
```

```
a2p =
```

```
0.8944
```

```
0.8000
```

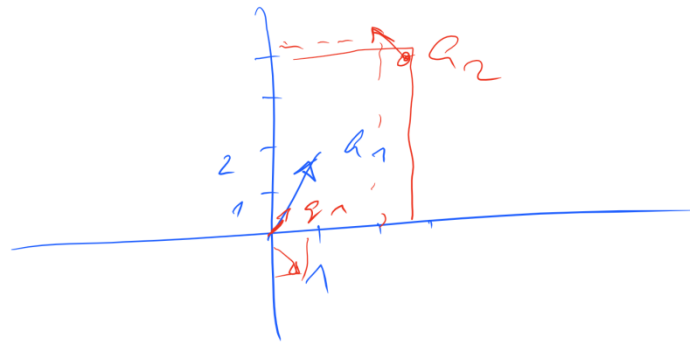
```
-0.4000
```

```
>> q2=a2p/na2p
```

```
q2 =
```

```
0.8944
```

```
-0.4472
```



Przykład

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{a}_1\| = [8^2 + (-2)^2 + (-2)^2]^{1/2} = 8.485281$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1 / \|\mathbf{a}_1\|$$

$$\mathbf{q}_1^T = [0.942809 \quad -0.235702 \quad -0.235702]$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2) \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} - [0.942809 \quad -0.235702 \quad -0.235702] \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.942809 \\ -0.235702 \\ -0.235702 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = -2.357023$$

$$\mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -2 & -(-2.222222) \\ 4 & -(0.555555) \\ -2 & -(0.555555) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.222222 \\ 3.444444 \\ -2.555557 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$\|\mathbf{a}'_2\| = 4.294700$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{a}'_2 / \|\mathbf{a}'_2\|$$

$$\mathbf{q}_2 = [0.051743 \quad 0.802022 \quad -0.595049]$$

$$\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3) \mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix} - [0.942809 \quad -0.235702 \quad -0.235702] \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.942809 \\ -0.235702 \\ -0.235702 \end{bmatrix} \\ - [0.051743 \quad 0.802022 \quad -0.595049] \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.051743 \\ 0.802022 \\ -0.595049 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3 = -4.478343, \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3 = -9.443165$$

$$\mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} -2 & -(-4.222222) & -(-0.488618) \\ -2 & -(1.055554) & -(-7.573626) \\ 13 & -(1.055554) & -(5.619146) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.710840 \\ 4.518072 \\ 6.325300 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{a}'_3\| = 8.232319$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{a}'_3 / \|\mathbf{a}'_3\|$$

$$\mathbf{q}'_3 = [0.329293 \quad 0.548821 \quad 0.768350]$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{Q}^{(0)} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3]$$

$$\mathbf{Q}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.942809 & 0.051743 & 0.329293 \\ -0.235702 & 0.802022 & 0.548821 \\ -0.235702 & -0.595049 & 0.768350 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} 8.485281 & -2.357023 & -4.478343 \\ 0.000000 & 4.294700 & -9.443165 \\ 0.000000 & 0.000000 & 8.232819 \end{bmatrix}$$

$\|\mathbf{a}_1\| = 8.485281$ $\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 = -2.357023$ $\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3 = -4.478343$

$$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{Q}^{(0)} \mathbf{R}^{(0)}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)} \mathbf{Q}^{(0)}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)}$$

$$\mathbf{A}^{(3)}, \mathbf{A}^{(4)}, \dots, \mathbf{A}^{(n)}$$

Ortogonalizacja QR w Matlabie

```
>> A=[8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13];  
>> [Q,R]=qr(A)
```

Q =

-0.9428	-0.0517	0.3293
0.2357	-0.8020	0.5488
0.2357	0.5950	0.7683

R =

-8.4853	2.3570	4.4783
0	-4.2947	9.4432
0	0	8.2323

```
>> Q*R
```

ans =

8.0000	-2.0000	-2.0000
-2.0000	4.0000	-2.0000
-2.0000	-2.0000	13.0000

```
A=[8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13];  
[Q,R]=qr(A)  
Q*R  
A1=R*Q  
[Q,R]=qr(A1)  
A2=R*Q  
[Q,R]=qr(A2)  
A3=R*Q  
[Q,R]=qr(A3)  
A4=R*Q  
[Q,R]=qr(A4)  
A5=R*Q  
[Q,R]=qr(A5)  
A6=R*Q  
[Q,R]=qr(A6)  
A7=R*Q  
[Q,R]=qr(A7)  
A8=R*Q  
[Q,R]=qr(A8)  
A9=R*Q  
[Q,R]=qr(A9)  
A10=R*Q  
[Q,R]=qr(A10)  
A11=R*Q  
eig(A)
```

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)}$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k)}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} 8.485281 & -2.357023 & -4.478343 \\ 0.000000 & 4.294700 & -9.443165 \\ 0.000000 & 0.000000 & 8.232819 \end{bmatrix}$$

k	λ_1	λ_2	λ_3
1	9.611111	9.063588	6.325301
2	10.743882	11.543169	2.712949
3	11.974170	10.508712	2.517118
4	12.929724	9.560916	2.509360
....			
19	13.870584	8.620435	2.508981
20	13.870585	8.620434	2.508981

Przykład (cd.)

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)} \mathbf{Q}^{(0)}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8.485281 & -2.357023 & -4.478343 \\ 0.000000 & 4.294700 & -9.443165 \\ 0.000000 & 0.000000 & 8.232819 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.942809 & 0.051743 & 0.329293 \\ -0.235702 & 0.802022 & 0.548821 \\ -0.235702 & -0.595049 & 0.768350 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 9.611111 & 1.213505 & -1.940376 \\ 1.213505 & 9.063588 & -4.898631 \\ -1.940376 & -4.898631 & 6.325301 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{(19)} = \begin{bmatrix} 1.000000 & -0.000141 & 0.000000 \\ 0.000141 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{(19)} = \begin{bmatrix} 13.870585 & 0.003171 & 0.000000 \\ 0.000000 & 8.620434 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 2.508981 \end{bmatrix}$$

~~$$\mathbf{A}^{(20)} = \begin{bmatrix} 13.870585 & 0.001215 & 0.000000 \\ 0.001215 & 8.620434 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 2.508981 \end{bmatrix}$$~~

Obliczenie wektorów własnych

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 13.870584$$

$$\mathbf{A}_{\text{shifted}} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I}) =$$

$$\begin{bmatrix} -5.870584 & -2.000000 & -2.000000 \\ -2.000000 & -9.870584 & -2.000000 \\ -2.000000 & -2.000000 & -0.870584 \end{bmatrix}$$

Obliczenie wektorów własnych (cd.)

Po faktoryzacji

$$\mathbf{A}_{\text{shifted}} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s} * \mathbf{V} = \text{lambda} * \mathbf{V}$$

$$\text{Lambda} = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{s} * \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{L} * \mathbf{U} * \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.340682 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.340682 & 0.143498 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -5.870584 & -2.000000 & -2.000000 \\ 0.000000 & -9.189221 & -1.318637 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000001 \end{bmatrix}$$

Przykład

```
A=[8 -2 -2;-2 4 -2;-2 -2 13]
```

```
A =
```

```
8 -2 -2
```

```
-2 4 -2
```

```
-2 -2 13
```

```
>> [v L]=eig(A)
```

```
v =
```

```
0.409475122147575    0.869096109535528    -0.277492480497108
```

```
0.878650567571955   -0.457548383381889    -0.136464856172211
```

```
0.245567311439676    0.187939961835766     0.950986470091694
```

```
L =
```

```
2.50898079905102      0      0
```

```
0      8.62043407763086    0
```

```
0      0      13.8705851233181
```

MatLab

$$\lambda = 13.870584$$

$$\mathbf{A}_{\text{shifted}} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I}) =$$

$$\begin{bmatrix} -5.870584 & -2.000000 & -2.000000 \\ -2.000000 & -9.870584 & -2.000000 \\ -2.000000 & -2.000000 & -0.870584 \end{bmatrix}$$

```
As=[-5.870584 -2 -2;  
-2 -9.870584 -2;  
-2 -2 -0.870584]
```

```
>> eig(As)  
-11.3616  
-5.2501  
0.0000
```

```
[L U]=lu(As)
```

L =

```
1.0000    0    0  
0.3407    1.0000    0  
0.3407    0.1435    1.0000
```

U =

```
-5.8706 -2.0000 -2.0000  
0 -9.1892 -1.3186  
0    0    0.0000
```

```
AsV=0*V
```

```
LUV=0
```

```
UV=0
```

v3=1

```
v2=-1.3186/9.1892= -0.143494  
v1=-(2-2* 0.143494)/5.8706=  
-0.291795046502913
```

```
V=[-0.291795046502913 -0.143494 1]'
```

```
>> U*V
```

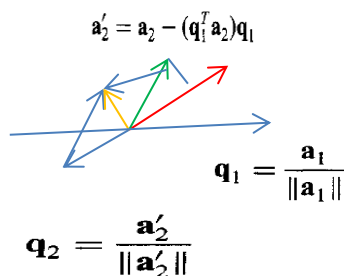
```
1.0e-04 *  
-0.0467  
-0.3874  
0.0124
```

Ortogonalizacja Householdera

Macierz Householdera

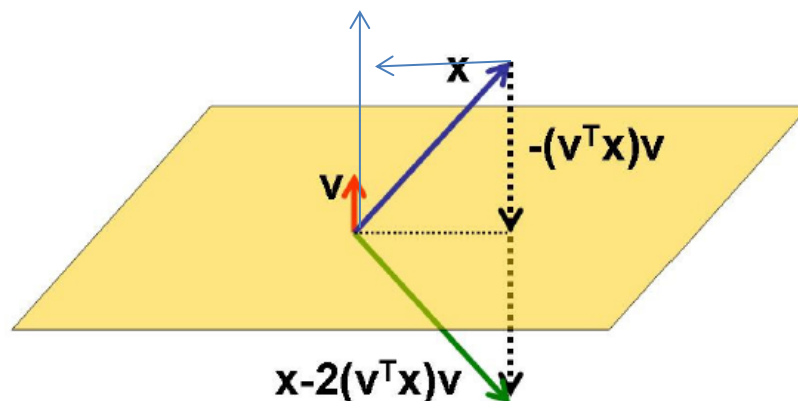
Macierz Householdera H zwana również refleksją (odbiciem) - symetryczna i ortogonalna macierz przekształcenia wektora, które odbija go względem pewnej płaszczyzny.

Metoda Householdera H jest najczęściej używaną metodą dekompozycji QR.



$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v][v]^T$$

$$[H][x] = [x]'$$



$$H1 = [1 \ 0; 0 \ 1] - 2/1 * [0 \ 0; 0 \ 1]$$

$$H1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\gg H1 * [3 \ 2]'$$

$$\text{ans} =$$

$$3$$

$$-2$$

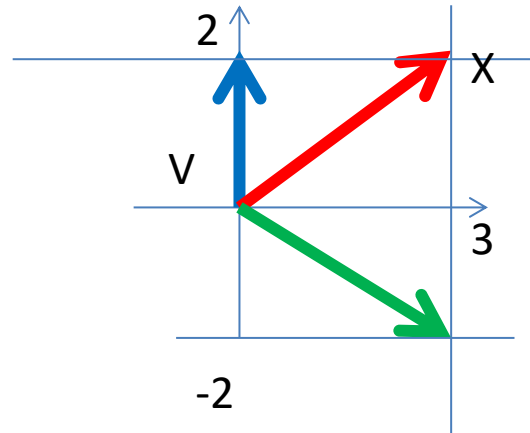
$$V * V^T = [0 \ 1] * [0 \ 1]'$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [0 \ 1]$$

Przykład

$$V = [0 \ 1]'$$



$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v][v]^T$$

$$[H][x] = [x]'$$

Schemat dekompozycji przy pomocy macierzy Householdera

Wektor odbicia $[v]$ musi zapewnić następujący ciąg przekształceń macierzy $[A]$:

1. Weźmy pierwszą kolumnę i znajdziemy wektor $[v]$ taki, aby pierwszy wektor (kolumna) macierzy $[H]^1[A]$ miał tylko jedną składową.

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \end{bmatrix}$$

$[A] \qquad \qquad \qquad [H]^1[A]$

2. Kolejny wektor $[v]$ powinien zmienić drugą kolumnę macierzy $[H]^1[A]$ (tak, by kolumna ta w nowej macierzy $[H]^2[H]^1[A]$ miała tylko dwie składowe) i jednocześnie zachować postać pierwszej kolumny $[H]^1[A]$,

$$\begin{bmatrix} \alpha & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \\ 0 & x' & x' & x' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta_1 & x'' & x'' \\ 0 & \beta_2 & x'' & x'' \\ 0 & 0 & x'' & x'' \\ 0 & 0 & x'' & x'' \end{bmatrix}$$

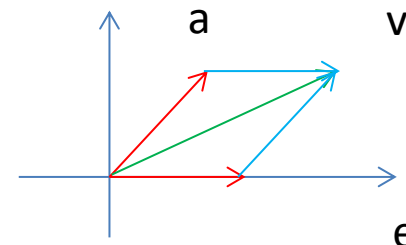
$[H]^1[A] \qquad \qquad \qquad [H]^2[H]^1[A]$

3. I tak dalej...

Ortogonalizacja Housholdera (cd)

Taką transformację zapewnia wektor:

$$[v] = [a_i] + \|a_i\|[e]$$

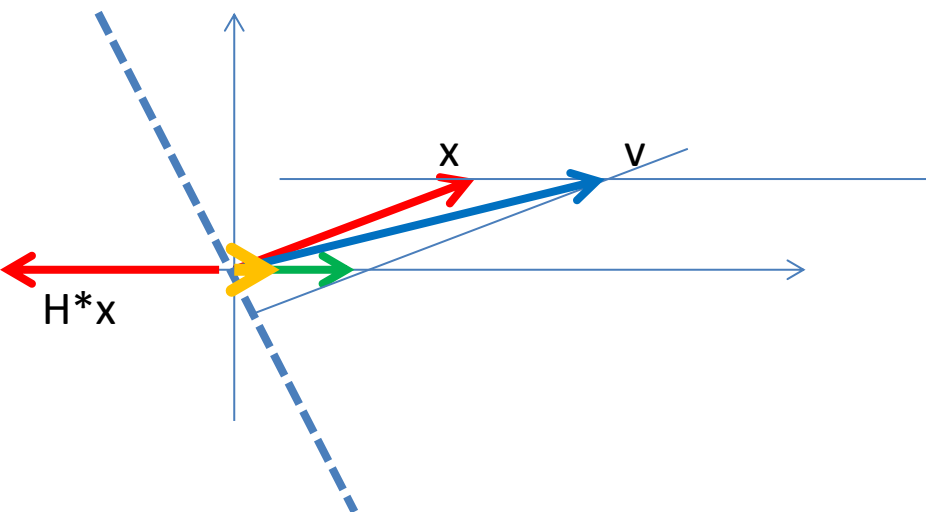


gdzie

- wektor $[a_i]$ – jest i -tą kolumną aktualnie przekształcanej macierzy
- $\|a_i\|$ - jest długością (normą) wektora $[a_i]$
- wektor $[e]$ – wektor zerowy, którego i -ty element jest równy długości wektora $[a_i]$.

Ortogonalizacja Housholdera (cd)

```
x=[3 1]'  
v=x+norm(x,2)*[1 0]'  
H=[1 0 ;0 1]-2./(v'*v).*(v*v')  
H*x
```



```
x =  
    3  
    1  
v =  
    6.1623  
    1.0000  
H =  
   -0.9487   -0.3162  
   -0.3162    0.9487  
H*x =  
   -3.1623  
    0.0000
```

Przykład

$$[v] = [a_i] + \|a_i\| [e]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

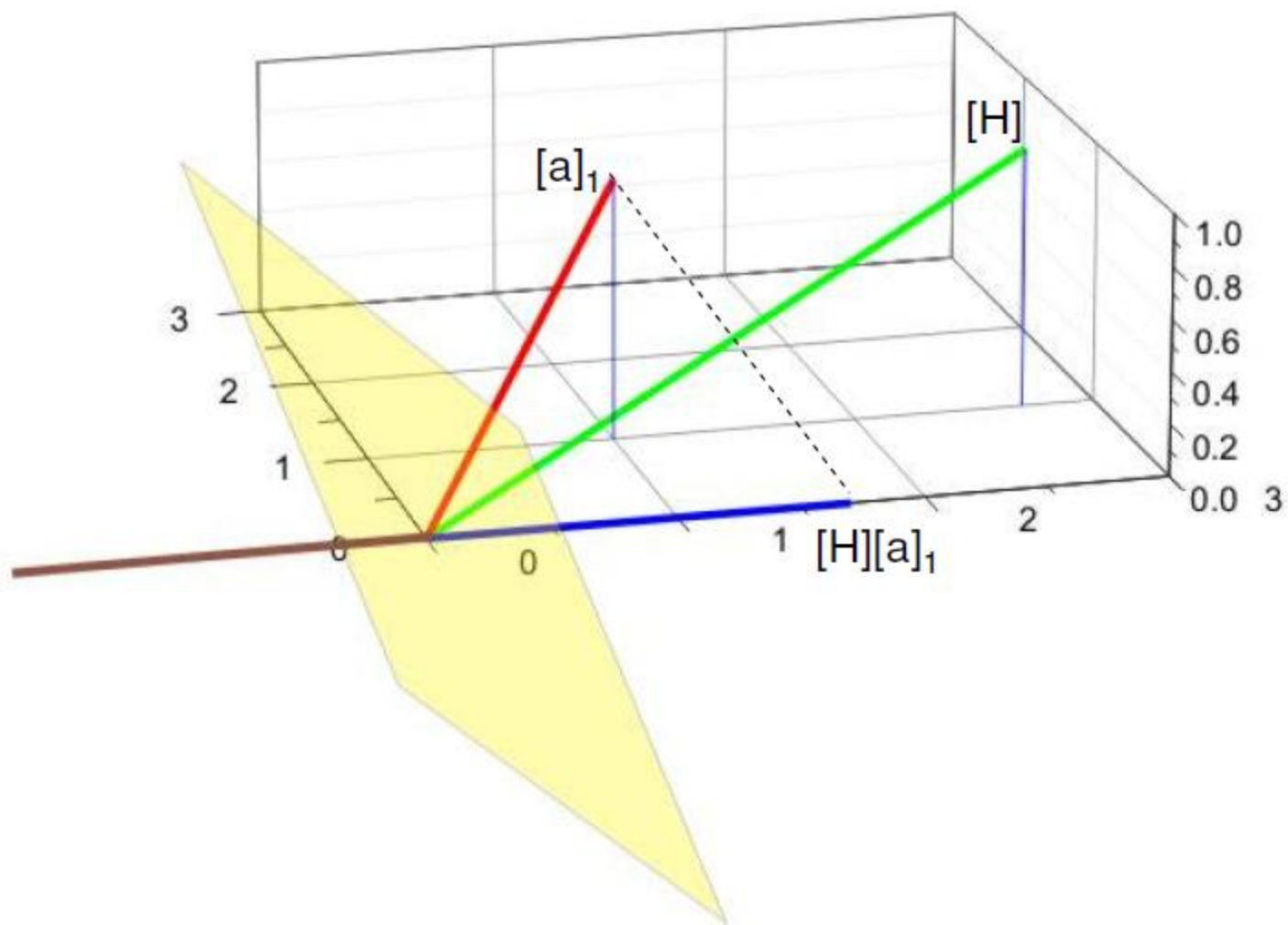
$$[v] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.73 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[v]^T [v] = [2.73 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2.73 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 9.46$$

$$[v][v]^T = \begin{bmatrix} 2.73 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [2.73 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 7.46 & 2.73 & 2.73 \\ 2.73 & 1 & 1 \\ 2.73 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v][v]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{9.46} \begin{bmatrix} 7.46 & 2.73 & 2.73 \\ 2.73 & 1 & 1 \\ 2.73 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.58 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & 0.79 & -0.21 \\ -0.58 & -0.21 & 0.79 \end{bmatrix}$$

$$[H][A] = \begin{bmatrix} -0.58 & -0.58 & -0.58 \\ -0.58 & 0.79 & -0.21 \\ -0.58 & -0.21 & 0.79 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.73 & -5.77 & -2.89 \\ 0 & 1.15 & 4.31 \\ 0 & 1.15 & 0.31 \end{bmatrix}$$



$$[H][A] = \begin{bmatrix} 1.73 & -5.77 & -2.89 \\ 0 & 1.15 & 4.31 \\ 0 & 1.15 & 0.31 \end{bmatrix}$$

$$[v] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.15 \\ 1.15 \end{bmatrix} + \sqrt{2.64} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.79 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

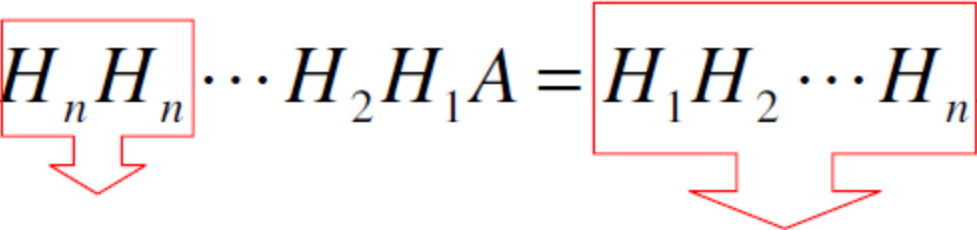
$$[v]^T[v] = [0 \quad 2.79 \quad 1.15] \begin{bmatrix} 0 \\ 2.79 \\ 1.15 \end{bmatrix} = 9.10$$

$$[v][v]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.79 \\ 1.15 \end{bmatrix} [0 \quad 2.79 \quad 1.15] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.77 & 3.22 \\ 0 & 3.22 & 1.33 \end{bmatrix}$$

$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T[v]} [v][v]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{9.10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.77 & 3.22 \\ 0 & 3.22 & 1.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.71 & -0.71 \\ 0 & -0.71 & 0.71 \end{bmatrix}$$

$$[H]_2[H]_1[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.71 & -0.71 \\ 0 & -0.71 & 0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.73 & -5.77 & -2.89 \\ 0 & 1.15 & 4.31 \\ 0 & 1.15 & 0.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.73 & -5.77 & -2.89 \\ 0 & -1.63 & -3.26 \\ 0 & 0 & -2.83 \end{bmatrix}$$

$$H_n \cdots H_2 H_1 A = R$$

$$H_1 H_2 \cdots \boxed{H_n H_n} \cdots H_2 H_1 A = \boxed{H_1 H_2 \cdots H_n} R$$


H jest symetryczna zatem

$$H_n = H_n^T$$

H jest ortogonalna zatem

$$H_n^T = H_n^{-1}$$

czyli $H_n H_n = I$

Ostatecznie: $A = QR$

Zatem rozłożyliśmy macierz A na macierz ortogonalną i macierz trójkątną.

```

[A]₁ = [A]
for k = 1..kmax
    [A]ₖ = [Q]ₖ [R]ₖ
    [A]ₖ₊₁ = [R]ₖ [Q]ₖ

```

← Zatem to właśnie zrobiliśmy.

A		R		Q
$\begin{pmatrix} 6.000 & 2.120 & 2.040 \\ 2.830 & 2.000 & -1.150 \\ 1.630 & 1.150 & -2.000 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} -1.730 & -5.770 & -2.890 \\ 0.000 & -1.630 & -3.270 \\ 0.000 & 0.000 & -2.830 \end{pmatrix}$	*	$\begin{pmatrix} -0.577 & -0.577 & -0.577 \\ 0.816 & -0.408 & -0.408 \\ 0.000 & -0.707 & 0.707 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7.430 & -0.642 & 0.759 \\ -0.233 & -0.429 & 2.870 \\ 0.276 & 0.507 & -1.000 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} -6.830 & -2.970 & -0.837 \\ 0.000 & -1.010 & 2.730 \\ 0.000 & 0.000 & -1.150 \end{pmatrix}$	*	$\begin{pmatrix} -0.878 & -0.414 & -0.239 \\ 0.478 & -0.761 & -0.439 \\ 0.000 & -0.500 & 0.866 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7.470 & -0.512 & 0.057 \\ 0.120 & -2.470 & -1.180 \\ -0.057 & 1.180 & 1.000 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} -7.440 & 0.609 & -0.631 \\ 0.000 & 0.694 & -2.650 \\ 0.000 & 0.000 & 1.550 \end{pmatrix}$	*	$\begin{pmatrix} -0.999 & 0.031 & -0.037 \\ -0.049 & -0.645 & 0.763 \\ 0.000 & 0.764 & 0.645 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7.460 & -0.653 & 0.214 \\ -0.032 & -1.820 & 2.530 \\ 0.003 & 0.169 & 0.354 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} -7.470 & 0.561 & -0.031 \\ 0.000 & 2.730 & 1.500 \\ 0.000 & 0.000 & 0.392 \end{pmatrix}$	*	$\begin{pmatrix} -1.000 & -0.016 & 0.008 \\ 0.018 & -0.902 & 0.431 \\ 0.000 & 0.431 & 0.902 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7.460 & -0.628 & -0.143 \\ 0.009 & -2.050 & -2.310 \\ -0.000 & 0.054 & 0.584 \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} -7.460 & 0.645 & -0.203 \\ 0.000 & 1.830 & -2.490 \\ 0.000 & 0.000 & 0.587 \end{pmatrix}$	*	$\begin{pmatrix} -1.000 & 0.004 & -0.000 \\ -0.004 & -0.996 & 0.093 \\ 0.000 & 0.093 & 0.996 \end{pmatrix}$

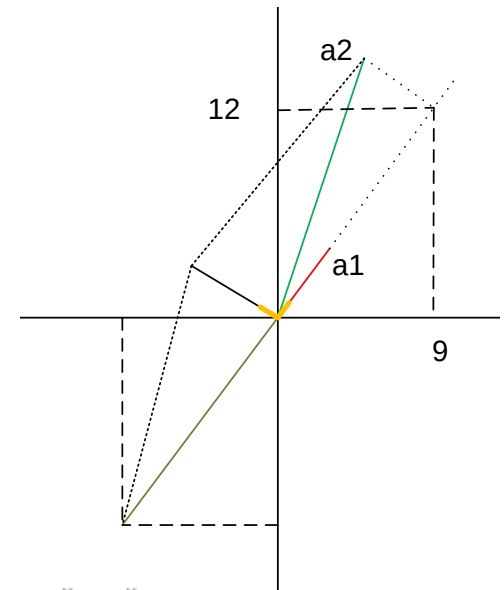
Rzeczywiste wartości własne: 7.464 ; -2 ; 0.535

Zadanie

Dokonać QR faktoryzację dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta



Ortogonalizacja Householdera

$$[v] = [a_i] + \|a_i\| [e]$$

$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v] [v]^T$$

Odpowiedź

(Ortogonalizacja Grama-Schmidta)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$q_1 = [3/5 \quad 4/5]'$$

$$a'_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 \quad q_2 = \frac{a'_2}{\|a'_2\|}$$

$$q_1' * a_2 = [3/5 \quad 4/5] * [5 \quad 15]' = 3 + 12 = 15$$

$$(q_1' * a_2) * q_1 = 15 * [3/5 \quad 4/5]' = [9 \quad 12]'$$

$$a_2' = a_2 - q_1' * a_2 * q_1 = [5 \quad 15]' - [9 \quad 12]' = [-4 \quad 3]'$$

$$q_2 = [-4/5 \quad 3/5]$$

$$q_1 * q_2 = 0$$

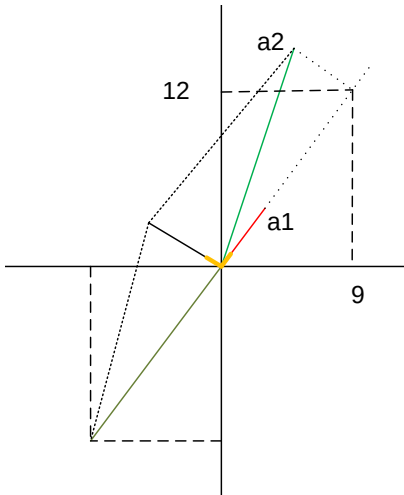
$$r_{i,i} = \|a'_i\| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$r_{11} = 5$$

$$r_{22} = 5$$

$$r_{i,j} = q_i^T a_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = i + 1, \dots, n)$$

$$r_{12} = [3/5 \quad 4/5] * [5 \quad 15]' = 15$$



$$Q = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź

(Ortogonalizacja Householdera)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = [3 \ 4]' + 5 * [1 \ 0]' = [8 \ 4]'$$

$$v_1' * v_1 = 80$$

$$v_1 * v_1' = \begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix}$$

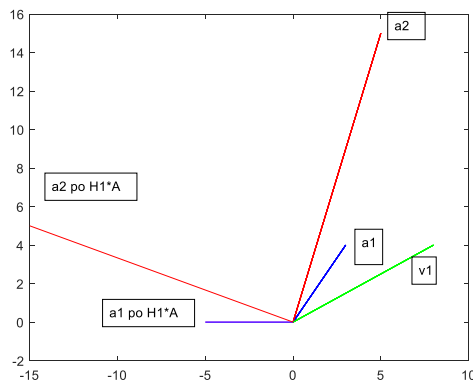
$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$[v] = [a_i] + \|a_i\| [e]$$

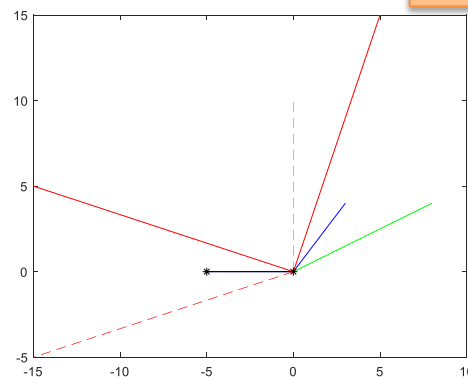
$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T [v]} [v][v]^T$$

$$A_1 = H_1 * A = \begin{bmatrix} -5.0000 & -15.0000 \\ -0.0000 & 5.0000 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \hat{H}_2 \end{bmatrix}$$



$$A_1 = H_1 * A$$



$$A_2 = H_2 * A_1$$

$$v_2 = [0 \ 5]' + 5 * [0 \ 1]' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = R = \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1 * H_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Obrot Givensa

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

cel



$$\cos \theta = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}},$$

$$\sin \theta = -\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}},$$

Transformacja Givensa

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rx jest obrotem wektora x na kąt θ

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos \theta & & -\sin \theta \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & \sin \theta & & & \cos \theta \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ten obrót wyzeruje komponent x_i ,
zmienia komponent x_j ,
a pozostałe komponenty się nie zmieniają.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Przykład

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \\ 0 & f_{42} & f_{43} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \\ 0 & 0 & g_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \\ 0 & f_{42} & f_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f'_{22} & f'_{23} \\ 0 & 0 & f'_{33} \\ 0 & f_{42} & f_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 & -s' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s' & 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f'_{22} & f'_{23} \\ 0 & 0 & f'_{33} \\ 0 & f_{42} & f_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f''_{22} & f''_{23} \\ 0 & 0 & f'_{33} \\ 0 & 0 & f''_{43} \end{pmatrix}$$

Przykład 2

```
>> x=[3 4 5]'
```

```
x =
```

```
3
```

```
4
```

```
5
```

```
>> planerot([3 4]')
```

```
0.6      0.8
```

```
-0.8     0.6
```

```
>> G12=[0.6 0.8 0;-0.8 0.6 0; 0 0 1]
```

```
G12 =
```

```
0.6      0.8
```

```
0
```

```
-0.8     0.6
```

```
0
```

```
0      0
```

```
1
```

```
>> G12*x
```

```
5
```

```
-4.44089209850063e-16
```

```
5
```

```
>> planerot([5 5]')
```

```
0.707106781186547    0.707106781186547
```

```
-0.707106781186547    0.707106781186547
```

```
>> g13=planerot([5 5]')
```

```
g13 =
```

```
0.707106781186547    0.707106781186547
```

```
-0.707106781186547    0.707106781186547
```

```
>> G13=[g13(1,1) 0 g13(1,2);0 1 0;g13(2,1) 0 g13(2,2)]
```

```
G13 =
```

```
0.707106781186547    0
```

```
0.707106781186547
```

```
0      1      0
```

```
-0.707106781186547    0
```

```
0.707106781186547
```

```
>> G13*G12*x
```

```
7.07106781186547
```

```
-4.44089209850063e-16
```

```
0
```

Przykład 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_{23}^T G_{13}^T G_{12}^T A = R$$

$$x_1 = 1 \text{ and } x_2 = 1$$

$$G_{12}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_{12}^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$G_{13}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$G_{23}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

```
A=[1 1;1 2;1 3];  
G12=[1/sqrt(2) 1/sqrt(2) 0;  
      -1/sqrt(2) 1/sqrt(2) 0;  
      0 0 1];  
G13=[sqrt(2)/sqrt(3) 0 1/sqrt(3);  
      0 1 0;  
      -1/sqrt(3) 0 sqrt(2)/sqrt(3)];  
G23=[1 0 0;  
      0 1/2 sqrt(3)/2;  
      0 -sqrt(3)/2 1/2];  
R=G23*G13*G12*A
```

R =

1.7321	3.4641
0.0000	1.4142
0	0

Zadanie

Zbudować macierz(y) Givensa G dla wektora $X=[3 \ 4 \ 5]'$

dla której $y = G \cdot x$ oraz $y(2) = 0, y(3)=0$.

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

z warunków $sa + cb = 0$ oraz $c^2 + s^2 = 1$ dostajemy:

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, s = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jaką transformację wybrać?

Ortogonalizacja Grama-Schmidta jest z natury niestabilna numerycznie. Podczas gdy zastosowanie rzutów ma atrakcyjną geometryczną analogię do ortogonalizacji, sama ortogonalizacja jest podatna na błędy liczbowe. Istotną zaletą jest jednak łatwość implementacji, co czyni ten algorytm użytecznym do użycia do prototypowania, jeśli nie jest dostępna wstępnie zbudowana biblioteka algebry liniowej.

Transformacja Householdera ma większą stabilność numeryczną niż metoda Grama-Schmidta

Procedura rotacji Givensa jest przydatna w sytuacjach, gdy tylko stosunkowo niewiele elementów poza przekątną musi zostać wyzerowanych, i jest łatwiejsza do zrównoleglenia niż przekształcenia Householdera.