Metody numeryczne II. Układy równań liniowych

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK
http://fizyka.umk.pl/~osokolov/MNII/

Układ równań liniowych

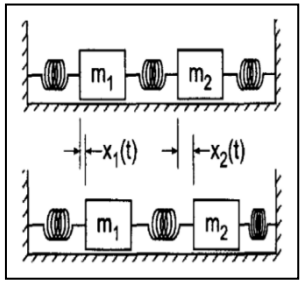
Układem równań liniowych nazywamy układ postaci:

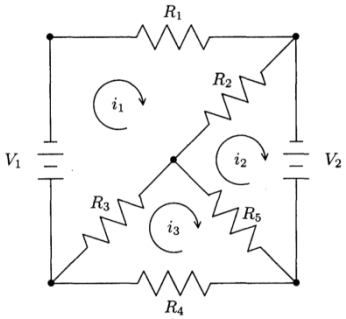
$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

a - są to współczynniki równania (dane)
b - wyrazy wolne (dane)
x - niewiadome zmienne (szukane)

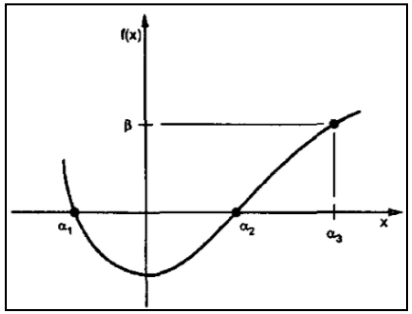
$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Przykłady zastosowań

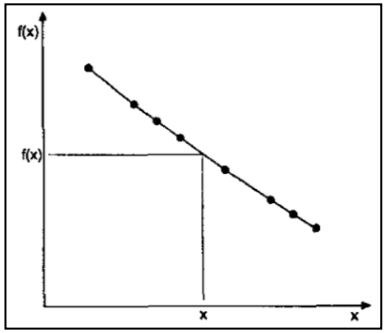




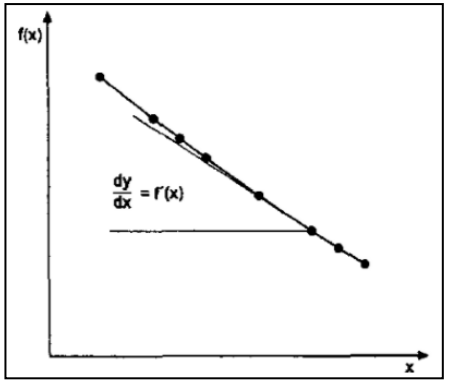
Układy mechaniczne/ elektryczne



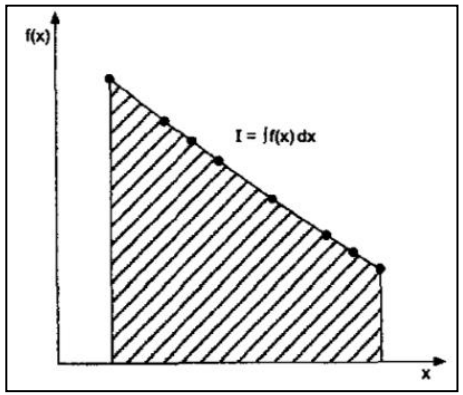
Równania nieliniowe



Aproksymacja/ interpolacja



Różniczkowanie numeryczne

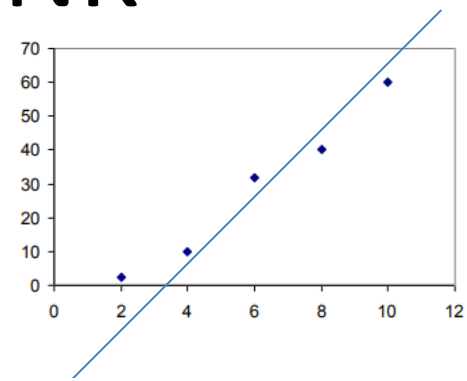


Całkowanie numeryczne

Num_Methods_Hoffmann.pdf

Przykład - MNK

i	x_i	y_i
1	2	2,5
2	4	10
3	6	32
4	8	40
5	10	60



$$p_1(x) = a_0 + a_1 x = y(x)$$

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \longrightarrow \text{minimum}$$

$$\frac{\partial S(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial S(a_0, a_1,)}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}}$$

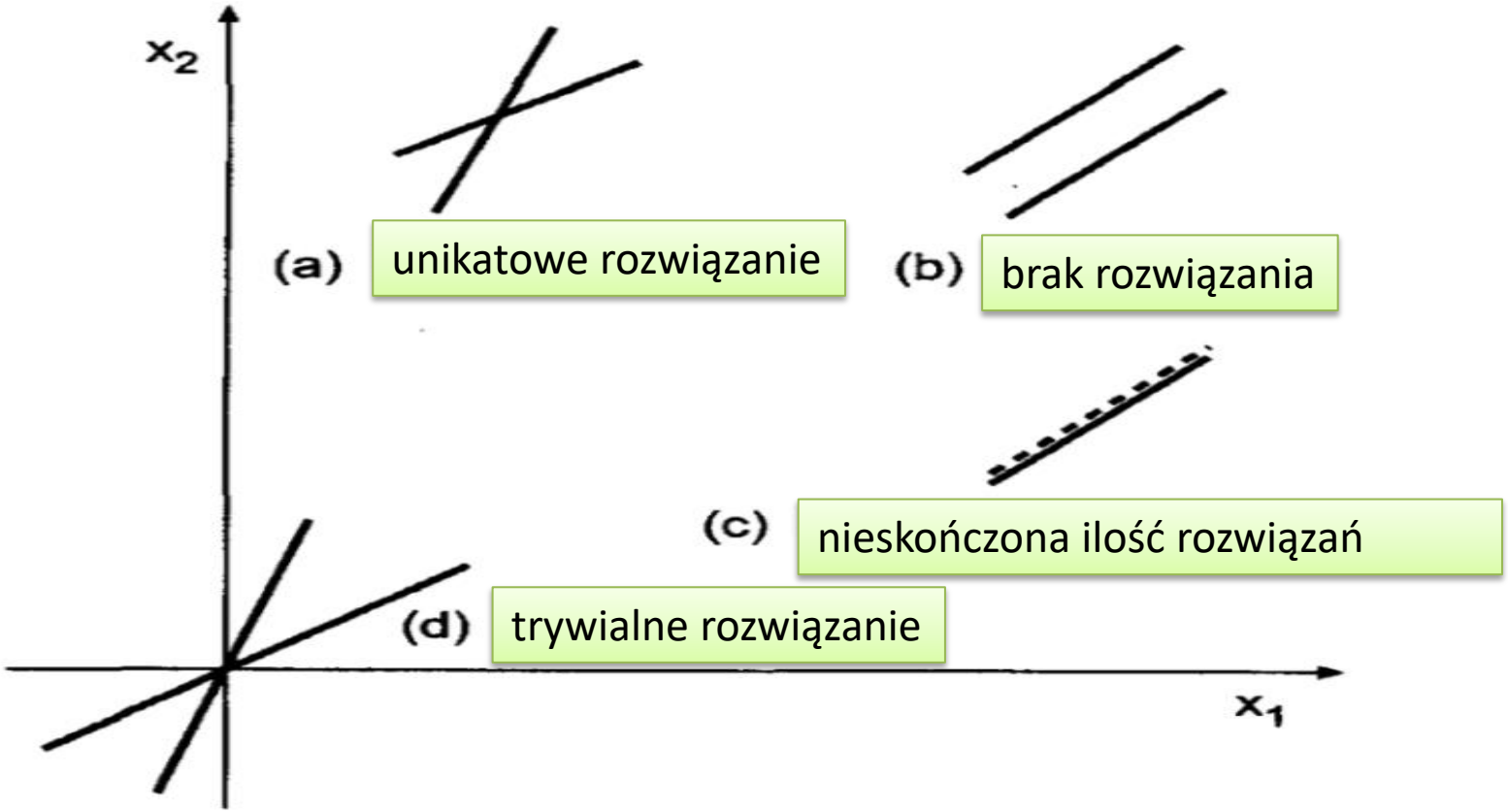
Możliwe rozwiązywania układu

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

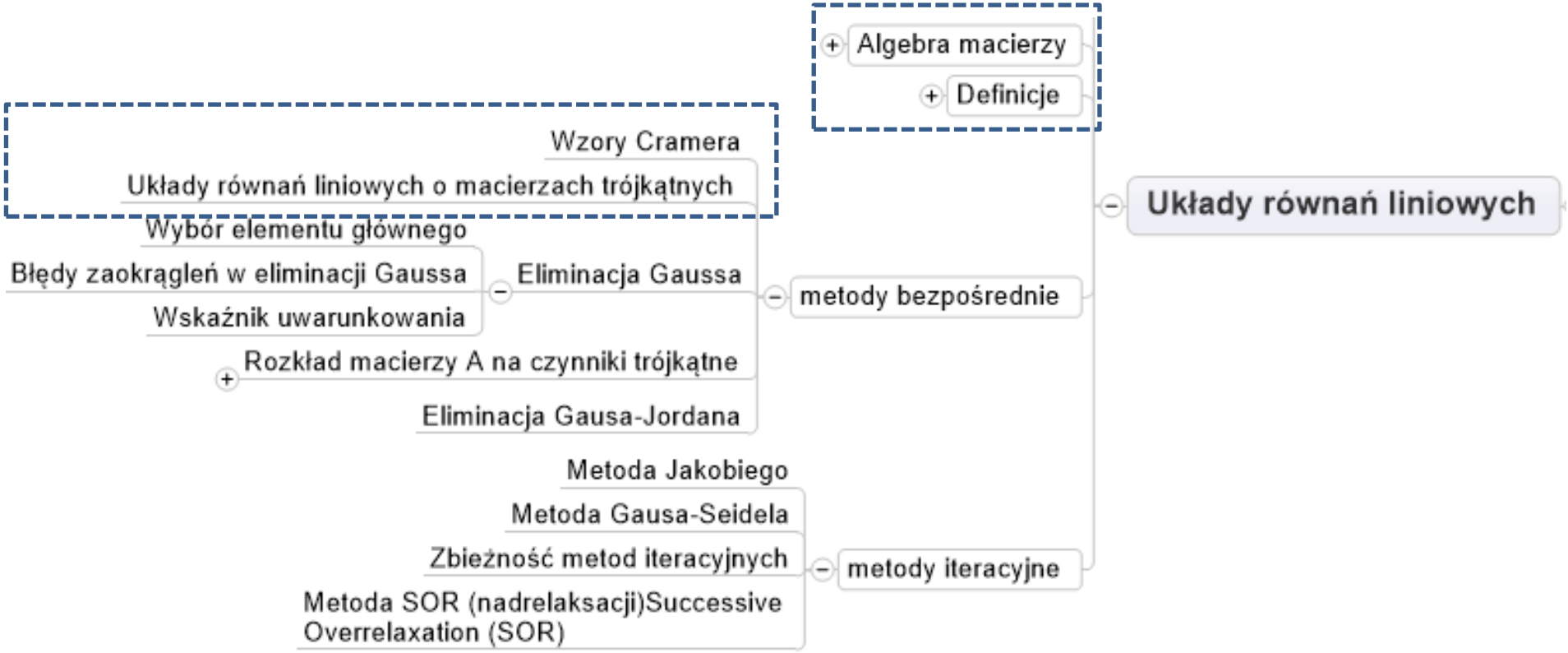
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



Rodzaje metod rozwiązywania układów równań liniowych

metody bezpośrednie - dają rozwiązanie za skończoną liczbę kroków; wykorzystują dekompozycję Gaussa, Choleskiego itd. Podstawowa niedogodność stosowania metod bezpośrednich dla macierzy rzadkich to pojawianie się nowych niezerowych elementów w macierzy w trakcie obliczeń *(ang. fill-in)*;
metody iteracyjne - polegają na iteracyjnym ulepszaniu przybliżonego rozwiązania do momentu osiągnięcia zadawalającej dokładności.

Niektóre metody rozwiązywania układów równań liniowych



Definicje

Macierz jest prostokątnym układem elementów

Macierz kwadratowa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna U

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna L

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Definicje (cd.)

Trójdiagonalna macierz T jest macierzą kwadratową, w której wszystkie elementy nie na głównej przekątnej i dwóch przekątnych otaczających główną przekątną są równe zeru.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Macierz wstęgowa lub pasmowa – kwadratowa macierz, której wszystkie elementy są zerowe poza diagonalą i wstęgą wokół niej.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Definicje (cd.)

Macierz transponowana (przestawiona) macierzy A to macierz, która powstaje z danej poprzez zamianę jej wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

Dla macierzy $A = (a_{ij})$:

$$A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Macierz rzadka – macierz, w której większość elementów ma wartość zero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz dominująca to macierz, której wartości bezwzględne elementów na głównej przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{10} & 2 & 0 & -1 \\ 1 & \mathbf{8} & 2 & 2 \\ 3 & -2 & \mathbf{-14} & 1 \\ 0 & -1 & 4 & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Definicje (cd.)

Rząd macierzy - maksymalna liczba **liniowo niezależnych** wektorów tworzących kolumny danej macierzy.
Liniowa niezależność – własność algebraiczna rodziny wektorów mówiąca, że żaden z nich nie może być zapisany jako kombinacja liniowa skończenie wielu innych wektorów ze zbioru.

Wyznacznik macierzy (Metoda Laplace'a)

Jeśli macierz jest stopnia n=1 (macierz jednoelementowa) to jej wyznacznik **detA=a**, gdzie **a** jest wartością elementu macierzy.
Jeśli macierz ma stopień n>1 to jej wyznacznik jest obliczany według następującego wzoru:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot detA_{ij}$$

gdzie
i- jest ustalone, jest to **numer wiersza** względem którego rozwijamy dany wyznacznik
A_{ij} - to dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} (czyli **wyznacznik** powstały przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny w macierzy **A pomnożony przez** $(-1)^{i+j}$)

Algebra macierzy

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\left[a_{i,j}\right]+\left[b_{i,j}\right]=\left[a_{i,j}+b_{i,j}\right]=\left[c_{i,j}\right]=\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\left[a_{i,j}\right]-\left[b_{i,j}\right]=\left[a_{i,j}-b_{i,j}\right]=\left[c_{i,j}\right]=\mathbf{C}$$

$$\mathbf{AB}=\left[a_{i,j}\right]\left[b_{i,j}\right]=\left[c_{i,j}\right]=\mathbf{C}c_{i,j}=\sum_{k=1}^{m}a_{i,k}b_{k,j}$$

$$(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r)$$

Łączność

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

Przemienność

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

Algebra macierzy (cd.)

Odwracanie macierzy

dla kwadratowej macierzy

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \\ &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n \end{aligned}}$$

Rząd macierzy (**rank**) – maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów tworzących kolumny danej macierzy.

Potęgowanie macierzy

$$\boldsymbol{A}^r = \underbrace{AAA\ldots A}_{r \text{ razy}},$$

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{A}^q = \boldsymbol{A}^{p+q}$$

Wielomian macierzy

$$P(\boldsymbol{A}) = \alpha_0\boldsymbol{I} + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_2\boldsymbol{A}^2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{A}^k$$

Faktoryzacja macierzy

reprezentacja macierzy
jako iloczyn dwóch macierzy

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

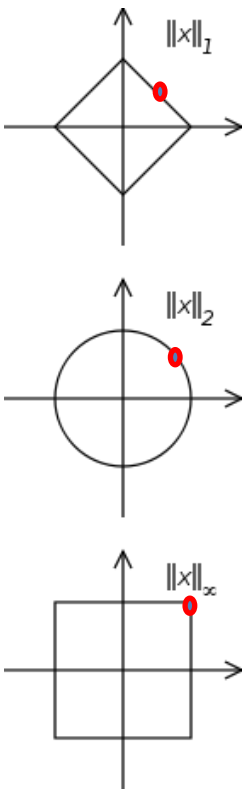
Normy wektora i macierzy

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

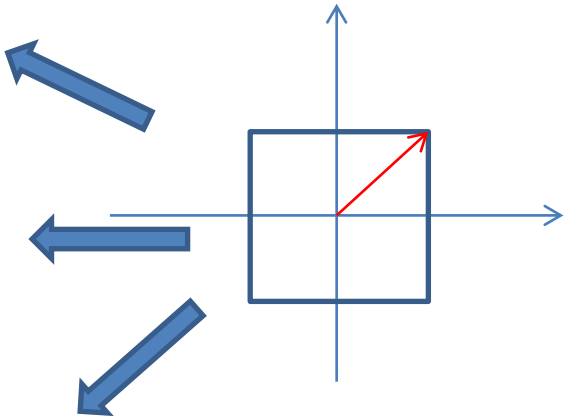
$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$\{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\}$, for $p = 1, 2, \infty$



Transformacja kwadratu



$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Właściwości norm macierzy

$\| \mathbf{AB} \| \,,\, \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{B} \|$ Dla kwadratowych macierzy

$$\| A \| = \sup \left\{ \| Ax \| : x \in K^n \text{ gdy } \| x \| = 1 \right\} = \sup \left\{ \frac{\| Ax \|}{\| x \|} : x \in K^n \text{ with } x \neq 0 \right\}$$

$$\| A \|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|_p}{\| x \|_p}$$

Operacje na macierzach w Matlabie

Do generacji niektórych specjalnych macierzy służą funkcje:

`zeros(n)`	generuje macierz zerową o wymiarach $n \times n$
`zeros(n,m)`	generuje macierz zerową o wymiarach $n \times m$
`ones(n)`	generuje macierz wypełnioną jedynkami o wymiarach $n \times n$
`ones(n,m)`	generuje macierz wypełnioną jedynkami o wymiarach $n \times m$
`eye(n)`	generuje macierz o wymiarach $n \times n$ wypełnioną zerami, w której na głównej przekątnej są jedynki
`eye(n,m)`	generuje macierz wypełnioną zerami w której na głównej przekątnej są jedynki o wymiarach $n \times m$
`magic(n)`	generuje macierz o wymiarach $n \times n$ o własnościach kwadratu magicznego
`pascal(n)`	generuje macierz o wymiarach $n \times n$ której elementy są liczbami dodatnimi całkowitymi będącymi współczynnikami w trójkącie Pascala
`poissrnd(k,n,m)`	generuje macierz o wymiarach $n \times m$ liczb losowych z rozkładu Poissona z parametrem k
`rand(n)`	generuje macierz o wymiarach $n \times n$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi o rozkładzie jednostajnym
`rand(n,m)`	generuje macierz o wymiarach $n \times m$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi o rozkładzie jednostajnym
`randn(n)`	generuje macierz o wymiarach $n \times n$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi o rozkładzie normalnym
`randn(n,m)`	generuje macierz o wymiarach $n \times m$ wypełnioną liczbami pseudolosowymi o rozkładzie normalnym
`linspace(x1,x2,n)`	generuje wektor od x1 do x2 podzielony na n równych części

Operacje na macierzach w Matlabie

Tablica 3.1. Operacje macierzowe i tablicowe

Działanie	Zapis	Objaśnienia
Zmiana znaku	`-A`	znak wszystkich elementów macierzy zmieniany jest na przeciwny.
Dodawanie	`A+B`	dodawane są skalary albo odpowiadające sobie elementy macierzy, macierze muszą mieć te same rozmiary.
Odejmowanie	`A-B`	jw. ale dotyczy odejmowania.
Mnożenie tablicowe	`A.*B`	jw. ale dotyczy mnożenia.
Dzielenie tablicowe	`A./B`	jw. ale dotyczy dzielenia.
Potęgowanie tablicowe	`A.^n`	jw. ale dotyczy potęgowania.
Mnożenie macierzowe	`A*B`	macierz B musi mieć tyle kolumn ile wierszy ma macierz A, wynik spełnia zależność $C_{w,k} = \sum_{i=1}^{nA} A_{w,i} \cdot B_{1,k}$ gdzie nA – liczba kolumn macierzy A.
Dzielenie macierzowe	`A/B`	odpowiada wyrażeniu $B*A^{-1}$.
Dzielenie lewostronne macierzy	`A\B`	odpowiada rozwiązaniu równania macierzowego A*x = B, gdzie x to wynik tej operacji.
Potęgowanie macierzowe	`A^n`	n jest liczbą całkowitą, wykonywane jest kolejne n mnożeń macierzy A przez nią samą. A^{-1} jest równoważne odwrotności macierzy A.
Transpozycja	`A'`	zamiana wierszy na kolumny.
Mnożenie skalarne wektorów	`dot(A,B)`	Produkt skalarny wektorów (tylko trójelementowych)
Mnożenie wektorowe wektorów	`cross(A,B)`	Produkt wektorowy wektorów (tylko trójelementowych)

Operacje na macierzach w Matlabie

`det(A)`	wyznacznik macierzy A
`norm(A)`	normy wektora i macierzy A
`cond(A)`	wskaźnik uwarunkowania macierzy
`rcond(A)`	estymator odwrotności uwarunkowania macierzy
`rank(A)`	rząd macierzy A
`size(A)`	rozmiar macierzy A
`length(A)`	długość macierzy A
`exist('nazwa')`	ustala, czy zmienna o danej nazwie istnieje jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`isempty(A)`	sprawdza, czy macierz A jest macierzą pustą jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`issparse(A)`	sprawdza, czy macierz A jest macierzą rzadką jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`isstr(A)`	sprawdza, czy elementy macierzy A są łańcuchami tekstowymi jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`isglobal(A)`	sprawdza, czy zmienna A jest zmienną globalną jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`any(A)`	sprawdza, który element macierzy A jest niezerowy jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`all(A)`	sprawdza, który element macierzy A jest zerowy jeśli tak to zwraca 1, jeśli nie to 0
`find(A)`	sprawdza i zwraca numery indeksów niezerowych elementów macierzy A

0704

Metoda Cramera

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}^j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Ax=b

Gabriel Cramer (ur. 31 lipca 1704 w Genewie, zm. 4 stycznia 1752) – szwajcarski matematyk i fizyk, uczeń Johanna Bernoulliego (opublikował jego dzieła), profesor uniwersytetu w Genewie.

A^j - wyznacznik z macierzy, która powstaje z macierzy A , przez zastąpienie kolumny współczynników niewiadomej ***x_j*** przez kolumnę wyrazów wolnych **B**

det(A)≠0

Ilość operacji mnożenia i dodawania

$$\boxed{N = (n-1)(n+1)!}$$

$$n = 10 \quad N = 360{,}000{,}000$$

$$n = 100,\ N = 10^{157}$$

Przykład

$$\boxed{\begin{aligned} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 &= 20 \end{aligned}}$$

wyznaczniki

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 300{,}000$$

$$\det(\mathbf{A}^1) = \begin{vmatrix} 20 & -20 & -20 \\ 20 & 40 & -20 \\ 20 & -20 & 130 \end{vmatrix} = 180{,}000$$

$$\det(\mathbf{A}^2) = 300{,}000$$

$$\det(\mathbf{A}^3) = 120{,}000$$

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A}^1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{180{,}000}{300{,}000} = 0.60$$

$$x_2 = \frac{300{,}000}{300{,}000} = 1.00$$

$$x_3 = \frac{120{,}000}{300{,}000} = 0.40$$

```
A3 =

  80.  -20.   20.
 -20.   40.   20.
 -20.  -20.   20.
```

```
A =

  80.  -20.  -20.
 -20.   40.  -20.
 -20.  -20.   130.00001
```

```
A1 =

  20.  -20.  -20.
  20.   40.  -20.
  20.  -20.   130.00001
```

```
A2 =

  80.   20.  -20.
 -20.   20.  -20.
 -20.   20.   130.00001
```

```
det(A)
 ans =

   300000.03
```

```
det(A1)
 ans =

   180000.01
```

```
det(A2)
 ans =

   300000.02
```

```
det(A3)
 ans =

   120000.
```

7

180000.015625

300000.03125

120000

IEEE-754

float

```
x1=    0.5999999642
x2=    1.0000000000
x3=    0.3999999464
```

double

```
x1=    0.5999999733
x2=    0.9999999667
x3=    0.3999999600
```

```c
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>


int main(int argc, char **argv) {
    float A1,A2,A3,A,x1,x2,x3;
    A=300000.03;
    A1=180000.01;
    A2=300000.02;
    A3=120000.00;
    x1=A1/A;
    x2=A2/A;
    x3=A3/A;

    printf("x1=%15.10f \n",x1);
    printf("x2=%15.10f \n",x2);
    printf("x3=%15.10f \n",x3);
    float B1,B2,B3,B,y1,y2,y3;
    B=300000.03125;
    B1=180000.015625;
    B2=300000.03125;
    B3=120000.00;
    y1=B1/B;
    y2=B2/B;
    y3=B3/B;
    printf("y1=%15.10f \n",y1);
    printf("y2=%15.10f \n",y2);
    printf("y3=%15.10f \n",y3);

    return EXIT_SUCCESS;
}
```

```
x1=    0.5999999642
x2=    1.0000000000
x3=    0.3999999464
y1=    0.5999999642
y2=    1.0000000000
y3=    0.3999999464
```

Przykład

```
x1=-10:10;
b1=4;
b2=7;
y1=1/3.*(b1-2.*x1);
%x2 dla 1 rownania
y2=1/4.*(b2-
5.*x1);%x2 dla 2
rownania
plot(x1,y1);
hold on;
plot(x1,y2,'r');
```

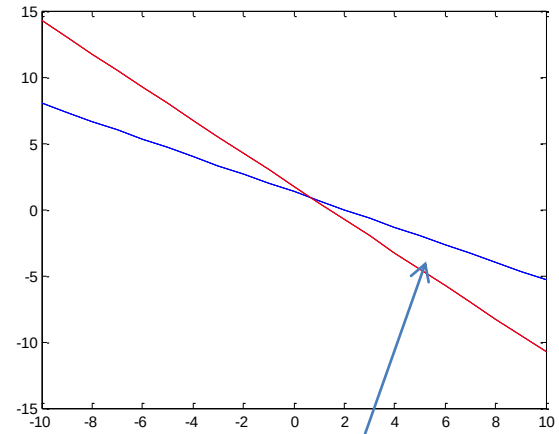
url1.m

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} b_1 & 3 \\ b_2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}(4b_1 - 3b_2)$$

$$x_2 = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & b_1 \\ 5 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}(-5b_1 + 2b_2)$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = -7$$



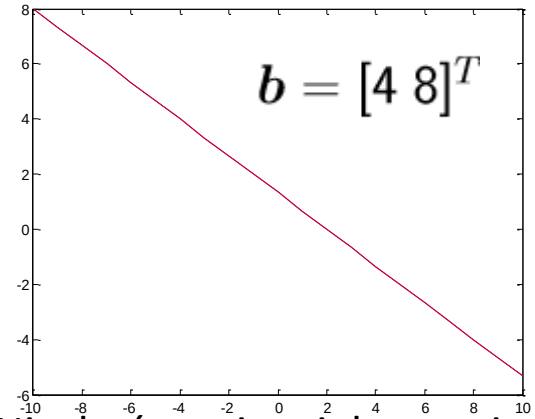
rozwiązanie istnieje dla każdego wektora b.

Definiuje kąt

Przykład (cd.)

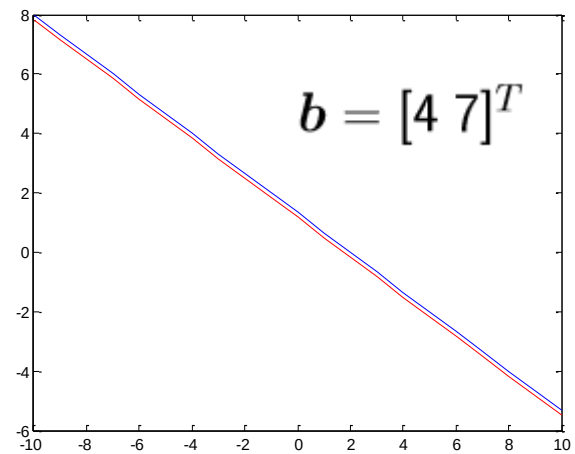
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 = b_2 - 2b_1 \end{cases}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0$$



Nieskończenie wiele rozwiązań

```
x1=-10:10;
b1=4;
b2=7;
y1=1/3.*(b1-2.*x1); %x2 dla 1 rownania
y2=1/6.*(b2-4.*x1);%x2 dla 2 rownania
plot(x1,y1);
hold on;
plot(x1,y2,'r');
```



Brak rozwiązań

url2.m

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy **A** w równaniu Ax = b

jest charakterystyczną własnością macierzy informującą o tym ***jakie wzmocnienie będzie miała zmiana normy macierzy A na normę rozwiązania x.***

Wskaźnik uwarunkowania macierzy definiuje się bardziej precyzyjnie jako maksymalny **stosunek błędu względnego wektora rozwiązania x do błędu względnego b:** $\tilde{b} = b + e$

Załóżmy, że **e** jest błędem **b**. Stąd błąd w rozwiązaniu $A^{-1}b$ wynosi $A^{-1}e$. Stąd stosunek relatywnego błędu rozwiązania do relatywnego błędu w **b** wynosi:

$$\begin{matrix} x, & f(x) \\ \tilde{x}, & f(\tilde{x}) \end{matrix}$$

Notacja:
x->b, ***f(x)***->$A^{-1}x$

$$w = \frac{|\delta_f|}{|\delta_x|} = \frac{|(f(x) - f(\tilde{x}))/f(x)|}{|(x - \tilde{x})/x|}$$

$$\frac{\|A^{-1}e\|/\|A^{-1}b\|}{\|e\|/\|b\|}.$$

Maksymalna wartość

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

Przykład

```
A=[1 10;100 1001]
A =
     1    10
   100  1001
>> cond(A)
ans =
  1.0121e+06
```

$$\begin{cases} u + 10v = 11 \\ 100u + 1001v = 1101 \end{cases} \Longrightarrow [u,v]= \{1;1\}.$$

```
>> b=[11 1101]'
b =
    11
  1101
>> e=[0.01 0]'
e =
   0.0100
        0
>> a1=A^-1*b
a1 =
   1.0000
   1.0000
>> a2=A^-1*e
a2 =
  10.0100
  -1.0000
>> norm(a2)/norm(e)*norm(b)/norm(a1)
ans =
  7.8322e+05
```

$$\begin{cases} u + 10v = 11 \quad +0.01 \\ 100u + 1001v = 1101 \end{cases} \Longrightarrow [u,v]= \{11{,}01;\ 0{,}00\}$$

$$\begin{aligned} \max_{e,b\neq 0}\left\{\frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|}\frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|}\right\} &= \max_{e\neq 0}\left\{\frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|}\right\}\max_{b\neq 0}\left\{\frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|}\right\} \\ &= \max_{e\neq 0}\left\{\frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|}\right\}\max_{x\neq 0}\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\} \\ &= \|A^{-1}\|\ \|A\|. \end{aligned}$$

Odwracanie macierzy za pomocą reguły Cramera

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} to dopełnienia algebraiczne kolejnych elementów macierzy A

Obliczenie macierzy odwrotnej jak rozwiązanie równania $A^{-1}*A=I$

$A^{-1}*A=I$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 a_1 + b_2 a_3 = 1 \\ b_1 a_2 + b_2 a_4 = 0 \\ b_3 a_1 + b_4 a_3 = 0 \\ b_3 a_2 + b_4 a_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 a_1 + b_2 a_3 = 1 (*a_4) \\ b_1 a_2 + b_2 a_4 = 0 (*a_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 a_1 a_4 + b_2 a_3 a_4 = a_4 \\ b_1 a_2 a_3 + b_2 a_4 a_3 = 0 \end{cases}$$

$$b_1 \left(a_1 a_4 - a_2 a_3 \right) = a_4$$

$$b_1 = \frac{\det(A_{11})}{\det(A)}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-12) = -26$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -2 & -8 & -4 \\ -12 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{26} & \frac{1}{26} & \frac{7}{26} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy za pomocą metody Cramera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1$$

Odpowiedź

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Det(A)=1*4-2*3=-2$

$Det(A_{11})=-(1)^{1+1}*4=4$

$Det(A_{12})=-(1)^{1+2}*3=-3$

$Det(A_{21})=-(1)^{2+1}*2=-2$

$Det(A_{22})=-(1)^{2+2}*1=1$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \det(A_{12}) \\ \det(A_{21}) & \det(A_{22}) \end{pmatrix}' / \det(A)$$

$$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1$$

$$\boxed{\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}$$

Odpowiedź

```
-> A=[1 2;3 4]
 A  =
   1.   2.
   3.   4.
--> A^-1
 ans  =
  -2.    1.
   1.5  -0.5
--> norm(A,1)
 ans  =
   6.
--> norm(A^-1,1)
 ans  =
   3.5
```

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

```
-> cond(A,1)
 ans  =

   21.


--> 6*3.5
 ans  =

   21.
```

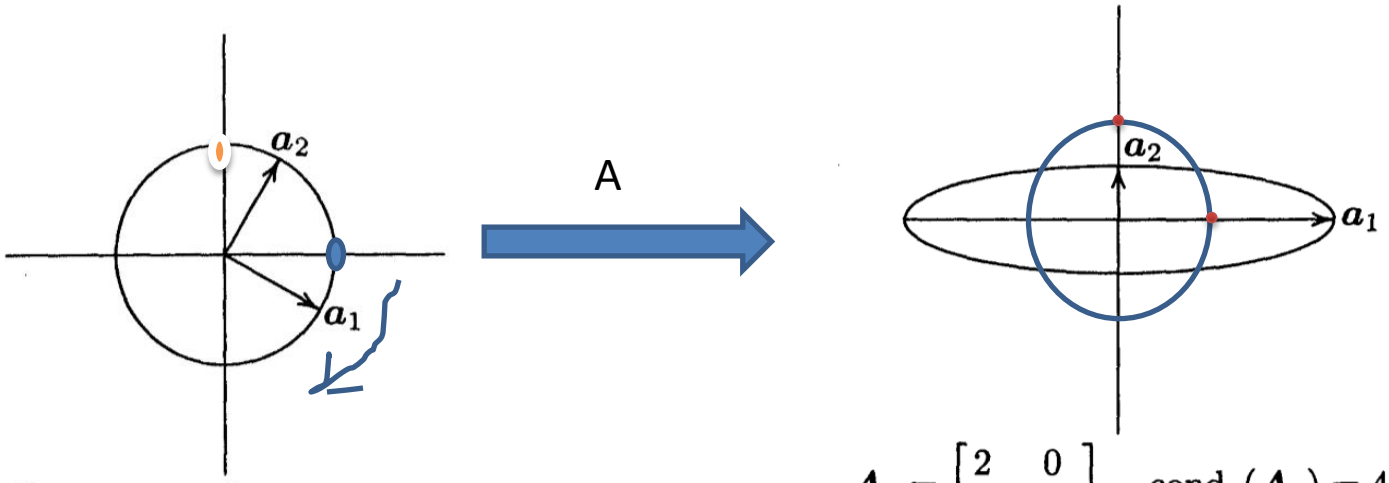
Interpretacja geometryczna

Zniekształcenie przestrzeni

A**X**→**Y**

Stosunek maksymalnego **rozciągnięcia** do maksymalnej **kompresji**

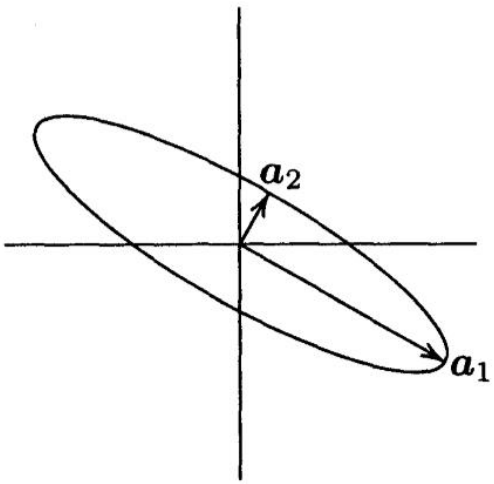
$$\|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \left(\max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) \cdot \left(\min_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)^{-1}$$



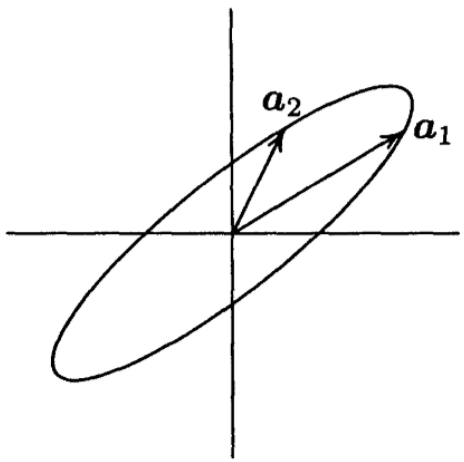
$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0.5 \\ -0.5 & 0.87 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}_1) = 1$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}_2) = 4$$

Zniekształcenie przestrzeni (c.d.)



$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.73 & 0.25 \\ -1 & 0.43 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(A_3) = 4$$



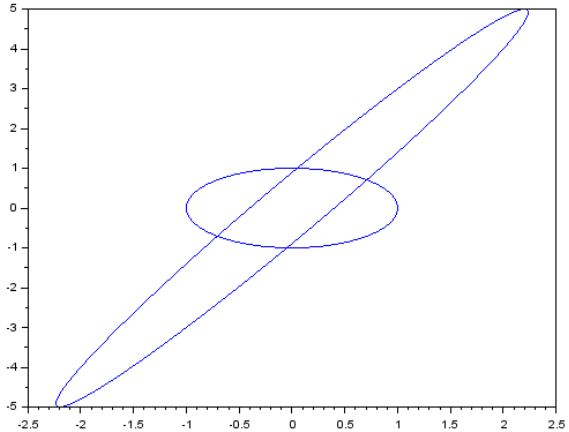
$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.52 & 0.91 \\ 0.47 & 0.94 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(A_4) = 4$$

Ortogonalne kolumny

condMatrixOS.m

A =

1. 2.
3. 4.




```
L=linspace(0,2*pi,100);
X=cos(L);
Y=sin(L);
plot(X,Y);
hold on;
A=[1 2;2 3.999];
%A=[1 2;3 5.99999];
A=[10 2;0.30 0.40];
cond(A,1)
B=A*[X; Y];
plot(B(1,:),B(2,:));
maxB=max(max(B));
%axis([XMIN XMAX YMIN YMAX]);
axis([-maxB maxB -maxB maxB ]);
```

Właściwości wskaźnika uwarunkowania macierzy

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 1$$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{I}) = 1$$

$$\mathrm{cond}(\gamma \boldsymbol{A}) = \mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$$

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_i),\ \mathrm{cond}(\boldsymbol{D}) = (\max |d_i|)/(\min |d_i|)}$$

Przykład

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[2 -1 1;1 0 1;3 -1 4]
A =
    2   -1    1
    1    0    1
    3   -1    4
>> A^-1
ans =
    0.5000    1.5000   -0.5000
   -0.5000    2.5000   -0.5000
   -0.5000   -0.5000    0.5000
```

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 6$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 8$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = 4.5$$

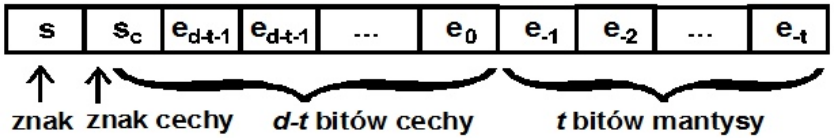
$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 3.5$$

$$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = 6 \cdot 4.5 = 27$$

$$\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 8 \cdot 3.5 = 28$$

Błędy reprezentacji

$$rd(x) = s \cdot m_t \cdot 2^c$$



$$m = \sum_{i=1}^{\infty} e_{-i} \cdot 2^{-i} \quad \left(e_{-1} = 1; e_{-i} = 0 \text{ lub } 1 \text{ dla } i > 1\right)$$

$$m_t = \sum_{i=1}^{t} e_{-i} \cdot 2^{-i} + e_{-(t+1)} \cdot 2^{-t}$$

Błąd bezwzględny reprezentacji $\varepsilon = rd(x) - x$

Błąd względny reprezentacji ε $\varepsilon = \left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq 2^{-t}$

$$|\varepsilon| \leq 2^{-t} \qquad rd(x) = x \cdot (1 + \varepsilon)$$

Maszynowy epsilon

IEEE 754 Converter (JavaScript), V0.22

	Sign	Exponent	Mantissa
Value:	+1	2^0	1.0
Encoded as:	0	127	0
Binary:	☐	☐ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑	☐ ☐

Decimal representation	1.0
Value actually stored in float:	1
Error due to conversion:	
Binary Representation	00111111100000000000000000000000
Hexadecimal Representation	0x3f800000

+1

-1

IEEE 754 Converter (JavaScript), V0.22

	Sign	Exponent	Mantissa
Value:	+1	2^0	1.0000001192092896
Encoded as:	0	127	1
Binary:	☐	☐ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑ ☑	☐ ☑

Decimal representation	1.00000011921
Value actually stored in float:	1.00000011920928955078125
Error due to conversion:	
Binary Representation	00111111100000000000000000000001
Hexadecimal Representation	0x3f800001

+1

-1

Przykład

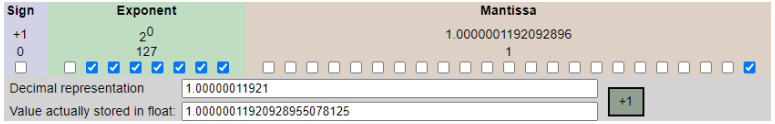
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}. \qquad \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = 21$$

Załóżmy dodatkowo, że mamy do czynienia z maszyną, która przechowuje liczby rzeczywiste używając 24 bitowej mantysy, wtedy **epsilon maszynowy** wynosi

$$\varepsilon_{masz} = 2^{1-24} = 0.119209 \cdot 10^{-6}$$

https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

```
>> 21*0.119209*10^-6
ans =
   2.5034e-06
```



Po pomnożeniu tych wartości możemy oszacować do ilu miejsc po przecinku otrzymany wynik będzie istotny:

$$|\tilde{x} - x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-t}$$

Obliczając **m**, możemy wnioskować, że w tym przypadku **dokładność wyniesie 6 miejsc po przecinku**

Przykład (cd.)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

35988*0.119209*10^-6 = 0.0043<1/2*10-4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7.999 \end{bmatrix}; cond(\mathbf{A}) = 35988.$$

```
>> A=[1 2 ;2 3.999]
A =
   1.0000    2.0000
   2.0000    3.9990
>> B=[4 7.999]'
B =
   4.0000
   7.9990
>> A^-1*B
ans =
    2
    1
```

```
B=[4 7.99]'
>> A^-1*B
ans =
        -15.9999999999938
         9.99999999999691
```

```
B=[4 7.9]'
>> A^-1*B
ans =
        -195.999999999942
         99.9999999999708
```

```
>> B=[4 8]'
B =
    4
    8
>> A^-1*B
ans =
    4
    0
```

Przykład(cd)

A=[1 2 ;2 3.99]

```
cond(A)
ans =
        2492.00959871794
```

```
B=[4 7.999]'
```

```
3.79999999999993
        0.100000000000036
```

```
B=[4 7.99]'
```

```
2
                    1
```

```
B=[4 7.9]'
```

```
-16.0000000000004
        10.0000000000002
```

Ocena wskaźnika uwarunkowania macierzy na podstawie równania Az=y

$$\boxed{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$$

$$\|\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\frac{\|\boldsymbol{z}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

Przykład

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.457 & 0.330 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z} = [-7780,\ 10780]^T \qquad \boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} = [0,\ 1.5]^T$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \approx \frac{\|\boldsymbol{z}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|_1} \approx 1.238 \times 10^4$$

Oszacowane A^{-1}

$$\mathrm{cond}_1(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_1 \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 \approx 1.370 \times 1.238 \times 10^4 = 1.696 \times 10^4$$

Ocena błędów

$$\boxed{A\hat{x} = b + \Delta b}$$

$$\boxed{Ax = b} \quad \boxed{(A + E)\hat{x} = b}$$

$$\boxed{(A + E)\hat{x} = b + \Delta b}$$

Ocena błędu rozwiązania układu równań liniowych

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}}$$

Błąd w funkcji

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\,\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{b}}$$

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}}$$

$$\boxed{\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|}$$

i	x_i	y_i
1	2	2,5
2	4	10
3	6	32
4	8	40
5	10	60

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{b}\| / \|\boldsymbol{A}\|}$$

$$\boxed{\|\Delta\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\boldsymbol{b}\|}$$

Ocena błędu rozwiązania układu równań liniowych (cd)

$$\|\Delta \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\Delta \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \boldsymbol{b}\|$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$$

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \boldsymbol{b}\| \frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Faktor wzmocnienia błędu względnego

Ocena błędu rozwiązania układu równań liniowych (c.d.)

$$\boxed{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}}$$

Błąd w argumentach

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{E}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}$$

i	x_i	y_i
1	2	2,5
2	4	10
3	6	32
4	8	40
5	10	60

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ocena błędu rozwiązania układu równań liniowych (c.d.)

Błąd w argumentach oraz funkcji

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

i	x_i	y_i
1	2	2,5
2	4	10
3	6	32
4	8	40
5	10	60

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b}$$

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \left(\frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\boldsymbol{E}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \right)$$

Dowód

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(A+E\right)\widehat{x}=b+\Delta b,\\&Ax=b,\\&\widehat{x}=x+\Delta x\end{aligned}}$$

$$\left(A+E\right)\left(x+\Delta x\right)=b+\Delta b,$$

$$Ax+A\Delta x+Ex+E\Delta x=b+\Delta b$$

$$Ax=b$$

$$A\Delta x+Ex+\boxed{E\Delta x}=\Delta b,$$

$$A\Delta x+Ex\approx\Delta b,$$

$$\Delta x\approx A^{-1}\left(\Delta b-Ex\right)$$

$$\left\|\Delta x\right\|\leq\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left(\left\|\Delta b\right\|-\left\|E\right\|\cdot\left\|x\right\|\right)$$

Dowód (cd)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{\|x\|} \cdot \left(\|\Delta b\| - \|E\| \cdot \|x\| \right)$$

$$\boxed{x = A^{-1} b}$$

$$\boxed{\|x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} - \frac{\|E\|}{\|A\|} \right)$$

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond\left(A\right) \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} - \frac{\|E\|}{\|A\|} \right)}$$

Wartość rezydualna (resztkowa)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$\|\Delta \boldsymbol{x}\| = \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b})\| = \| - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{r}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{r}\|$$

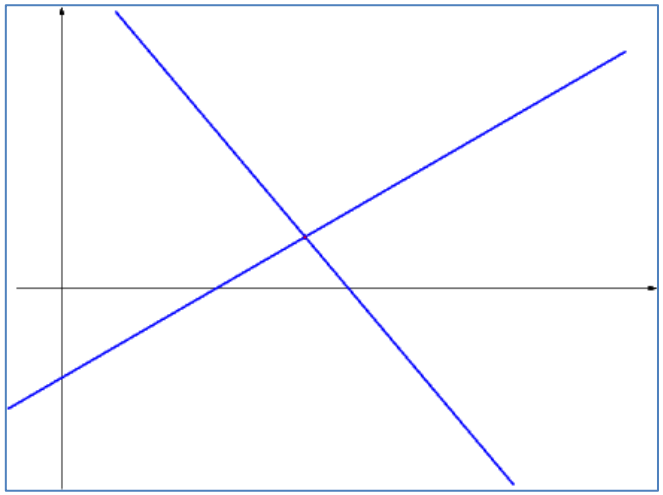
$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|} \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\hat{\boldsymbol{x}}\|}$$

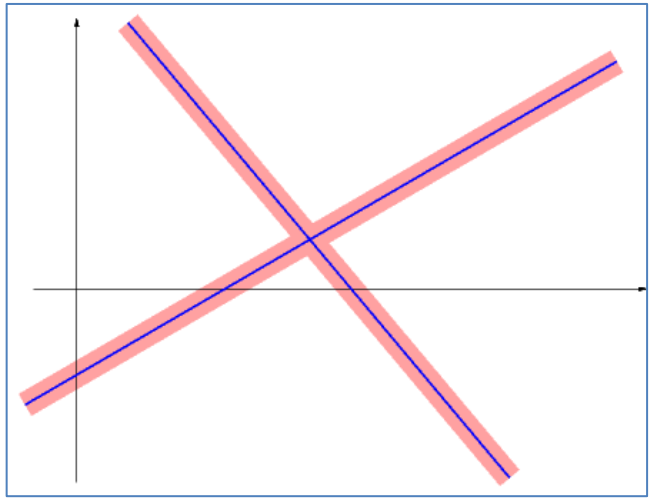
Wizualizacja uwarunkowania układu równań liniowych

Rozwiązanie układu dwóch równań liniowych

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

Jest to punkt przecięcia dwóch prostych wyznaczonych przez dane współczynniki i wyrazy prawej strony



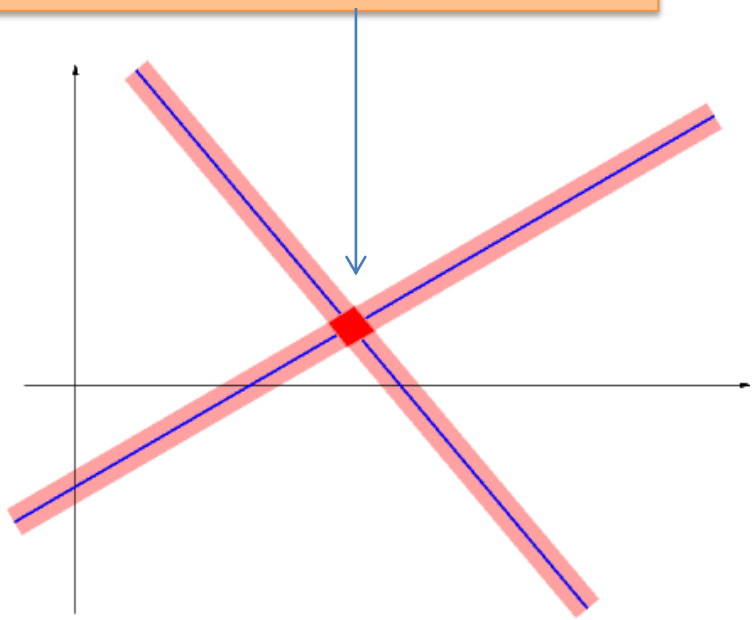


Wizualizacja uwarunkowania układu równań liniowych (cd)

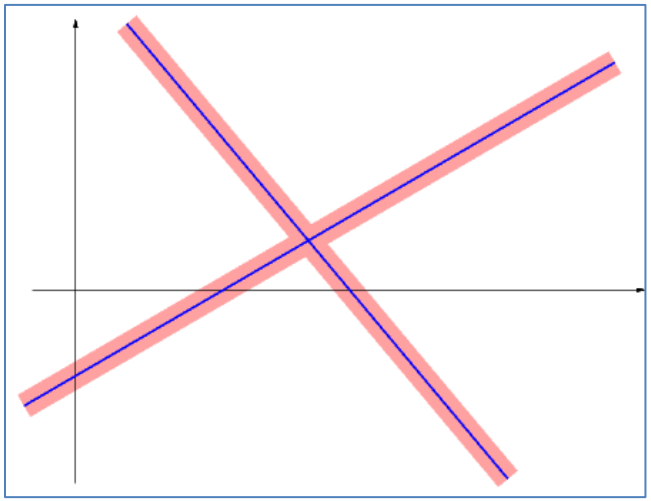
Rozwiązanie układu dwóch równań liniowych

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

Obszar, gdzie mogą znaleźć się rozwiązania zaburzonego układu

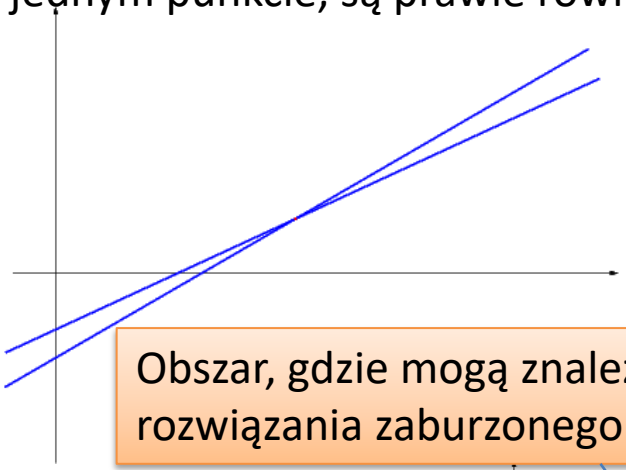


zaburzymy prawą stronę takiego układu

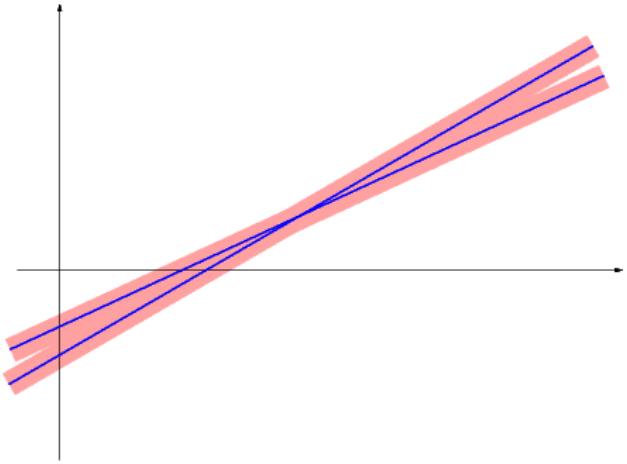


Wizualizacja uwarunkowania układu równań liniowych (cd)

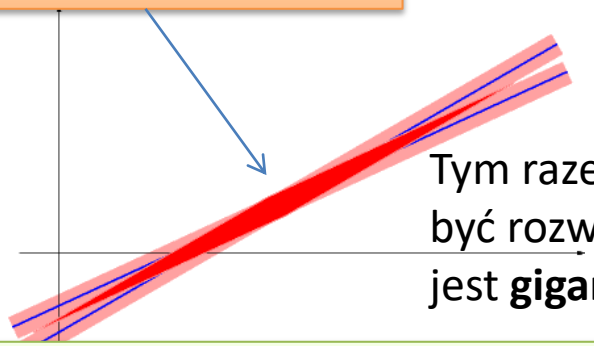
Proste, choć wciąż przecinają się dokładnie w jednym punkcie, są prawie równoległe



zaburzymy prawą stronę



Obszar, gdzie mogą znaleźć się rozwiązania zaburzonego układu



Tym razem obszar niepewności, gdzie mogą być rozwiązania naszego zaburzonego układu, jest **gigantyczny**

Gdy zamiast prawej strony, zaburzymy wyrazy macierzy układu, może nawet okazać się, że dostaniemy **układ równań sprzecznych**

Przykład

```
>> A=[1 2.9;1 3];
c=cond(A);
b=[4.0 6.0]';
x=A^-1*b;
disp([c x']);
        194.094847879729        -54        20
```

```
>> A=[1 2.9;1 3];
c=cond(A);
b=[4.1 6.0]';
x=A^-1*b;
disp([c x']);
        194.094847879729        -51        19
```

```
>> A=[1 2.9;1 3];
c=cond(A);
b=[4.1 5.9]';
x=A^-1*b;
disp([c x']);
        194.094847879729        -48.1        18
```

x1 x2

Eps=0.119209*10^-6

Macierz Hilberta

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

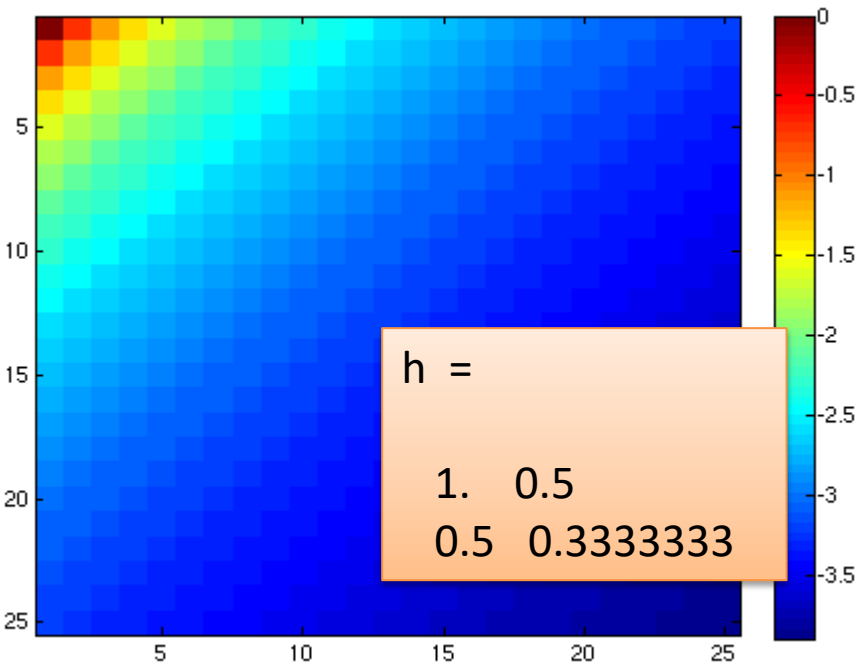
$$\boxed{\mathrm{cond}(H_N) = O\left(\frac{e^{3.5255N}}{\sqrt{N}}\right)}$$

Macierz Hilberta

$$H_N = (h_{ij})_{i,j=1}^{N}$$

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

H = hilb(n)



h =

1. 0.5
0.5 0.3333333

cond(hilb(5)) ans = 4.7661e+05
cond(hilb(10)) ans = 1.6025e+13
cond(hilb(15)) ans = 3.7689e+17
cond(hilb(20)) ans = 7.1209e+19

N	Cond(H)
2	19.28147
3	524.05678
4	15513.739
5	476607.25
6	14951059

Przykład

```
H = hilb(20);
cond(H) =   2.1065e+18
H*inv(H)
```

1.0000	-0.0000	-0.0003	0.0044	0.0212	-0.2436	0.4383	-0.6683	-0.4409	0.6464	-0.9986	-0.4477	8.3067
0.4314	1.0000	-0.0002	0.0003	0.0528	-0.0284	0.9397	0.6603	-0.1158	1.3085	-0.5132	0.2835	0.5888
0.7987	-0.8048	0.9997	-0.0041	0.1027	0.1222	0.5629	-0.1333	0.5837	1.0126	-0.9596	0.1601	-0.3606
1.0486	-1.6648	0.4041	0.9885	0.0958	-0.1427	1.3149	0.2797	-0.1724	0.8018	-0.1066	0.3468	5.6058
1.2164	-2.4406	1.0946	-0.1853	1.1204	-0.1147	1.2598	-0.9847	0.2424	-0.0230	0.5197	0.8731	3.8277
1.3286	-3.1054	1.9447	-0.5911	0.1962	0.8550	1.2190	-1.0755	0.2927	1.1158	0.2254	0.9657	3.0420
1.4027	-3.6617	2.8529	-1.1814	0.3594	-0.2091	2.4910	-0.4949	0.6416	0.4732	0.2943	-0.5944	4.9283
1.4501	-4.1206	3.7522	-1.8860	0.5367	0.0995	0.2101	1.4302	-1.0067	1.5837	-1.5936	3.3039	-0.4865
1.4784	-4.4954	4.6045	-2.6478	0.8130	0.1115	0.0798	0.1202	1.1006	0.0361	-0.2599	3.4626	-0.4334
1.4930	-4.7986	5.3893	-3.4322	1.1685	-0.0259	0.4050	-0.0399	1.2269	0.7081	0.0601	0.9479	3.7747
1.4975	-5.0417	6.0972	-4.1834	1.4561	0.0771	0.5520	0.5281	-0.6765	-0.0921	0.7289	3.0746	-0.6345
1.4946	-5.2346	6.7274	-4.9048	1.7749	-0.0877	0.2437	0.2317	-0.2408	0.4926	-0.4823	1.3380	0.1269
1.4863	-5.3854	7.2827	-5.5776	2.1172	-0.0469	0.6250	-0.6250	0.3750	0.4063	0.1250	-0.2500	3.5000
1.4740	-5.5013	7.7675	-6.1883	2.4591	-0.2935	1.0419	-0.5056	0.8891	0.4459	0.1519	-2.2266	4.4263
1.4587	-5.5879	8.1875	-6.7353	2.6649	0.0763	-0.5718	0.7748	-0.3322	-0.2596	0.1983	1.3305	-3.3098
1.4413	-5.6503	8.5498	-7.2342	2.8995	0.1174	-0.3016	0.6791	-0.1797	-0.2424	-0.0763	2.7332	-1.0450
1.4224	-5.6923	8.8599	-7.6797	3.1250	-0.2500	-1.0000	0	0.2500	0	0	0	0
1.4025	-5.7173	9.1240	-8.0781	3.3125	0.2500	0	-2.0000	-0.2500	0	-0.5000	4.0000	-2.0000
1.3818	-5.7282	9.3447	-8.4297	3.5000	0	0	0	0.5000	0	0.5000	2.0000	0
1.3608	-5.7273	9.5308	-8.7422	3.5625	-0.7500	-1.5000	0	0.7500	0	0	6.0000	0

...

Przykład

```
>> n=6;x=hilb(n)^-1*[1 1 1 1 1 1]'

x =

   -6.00000000042746
    210.000000012747
   -1680.00000008801
    5040.00000023213
   -6300.00000025821
    2772.00000010268
```

```
>> n=6;x=hilb(n)^-1*[1 1 1 1 1 1.1]'

x =

   -283.200000012066
    8526.0000003624
   -59892.0000025162
    160272.000006648
   -180936.000007413
    72626.4000029423
```

Macierz osobliwa

Macierz $\boldsymbol{A}$ jest osobliwa, jeśli

- nie posiada macierzy odwrotnej, tj. nie istnieje $\boldsymbol{M}$ taka, że $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{MA} = \boldsymbol{I}$
- $\det(\boldsymbol{A}) = 0$[9]
- $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$, tj. maksymalna liczba liczba liniowo niezależnych wierszy lub kolumn jest mniejsza niż n

  $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n \iff \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$
- $\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{o}$ dla jakiegś $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{o} = [0 \ldots 0]^T$

Jeśli macierz $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwa, to istnieje $\boldsymbol{A}^{-1}$ i $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ dla dowolnego wektora $\boldsymbol{b}$; $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$.

Jeśli $\det(\boldsymbol{A}) = 0$, to układ równań może nie mieć rozwiązań (układ sprzeczny) lub mieć wiele rozwiązań (jeśli $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem, to $\boldsymbol{x} + \gamma\boldsymbol{z}$ też jest rozwiązaniem dla dowolnego skalara γ).

[9] Dla $n = 1$, $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}$. Dla $n > 1$, $\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{in}\det(\boldsymbol{A}_{in})$, gdzie $\boldsymbol{A}_{in}$ powstaje z $\boldsymbol{A}$ po wykreśleniu i-tego wiersza i n-tej kolumny.

Przykład 1: $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} b_1 & 3 \\ b_2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}(4b_1 - 3b_2)$$

$$x_2 = -\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & b_1 \\ 5 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}(-5b_1 + 2b_2)$$

$\det(\boldsymbol{A}) = -7$: rozwiązanie istnieje dla każdego wektora $\boldsymbol{b}$.

Proste

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{b_1}{3} \qquad x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{b_2}{4}$$

przecinają się w jednym punkcie.

Przykład 2: $\det(\boldsymbol{A}) = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 = b_2 - 2b_1 \end{cases}$$

Jeśli $\boldsymbol{b} = [4\ 7]^T$, to sprzeczność, bo $0 \neq -1$. Brak rozwiązań!

Jeśli $\boldsymbol{b} = [4\ 8]^T$, to $\boldsymbol{x} = [\gamma \quad (4-2\gamma)/3]^T$. Nieskończenie wiele rozwiązań.

Układy równań liniowych o macierzach trójkątnych

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

```
for j = n to 1
    if u_jj = 0 then stop
    x_j = b_j / u_jj
    for i = 1 to j - 1
        b_i = b_i - u_ij x_j
    end
end
```

Złożoność algorytmu - n^2

$$N = (n-1)(n+1)!$$

$$x_n = b_n / u_{nn}, \qquad x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Układy równań liniowych o macierzach trójkątnych (cd.)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{b}}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

```
for j = 1 to n
    if ℓ_jj = 0 then stop
    x_j = b_j / ℓ_jj
    for i = j + 1 to n
        b_i = b_i − ℓ_ij x_j
    end
end
```

$$x_1 = b_1/\ell_{11}, \qquad x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} x_j \right) / \ell_{ii}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
for j = 1 to n
    if ℓ_jj = 0 then stop
    x_j = b_j / ℓ_jj
    for i = j + 1 to n
        b_i = b_i − ℓ_ij x_j
    end
end
```

$$x_3 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 3$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = -1$$

Eliminacja Gaussa

ur. 30 kwietnia 1777 w Brunszwiku, zm. 23 lutego 1855 w Getyndze) – niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta.

Układ równań liniowych można przekształcić w **układ równoważny** dodając do dowolnego równania kombinację liniową innych równań.

Jeśli **det(A) ≠ 0**, to można przekształcić macierz układu w **macierz trójkątną górną.**

Przykład

$$x_1 = [20 - (-20)x_2 - (-20)x_3]/80$$

$$x_2 = [25 - (-25)x_3]/35$$

$$\frac{750}{7}x_3 = \frac{300}{7}$$

$$\begin{aligned} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 &= 20 \\ 35x_2 - 25x_3 &= 25 \\ \frac{750}{7}x_3 &= \frac{300}{7} \end{aligned}$$

Macierz eliminująca

$$\boldsymbol{a} = [\,a_1 \quad a_2\,]^T. \text{ If } a_1 \neq 0, \text{ then } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_2/a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IDEA

$a_k \neq 0$

$$\boxed{M_k}\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -m_{k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -m_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \overset{A}{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} = \overset{A'}{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{m_i = a_i/a_k}, \; i = \overbrace{k+1}, \ldots, n$$

M_k tworzy wektor a z wyzerowanymi elementami **k+1,…,n**

Przykład

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_2 & 1 & 0 \\ -m_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = \frac{a_2}{a_1}$$

$$m_1 = \frac{a_3}{a_1}$$

$$\begin{aligned} 80x_1 - 20x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 + 40x_2 - 20x_3 &= 20 \\ -20x_1 - 20x_2 + 130x_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$M_1 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_3}{a_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierz eliminująca (cd)

$$\boxed{M_k = I - me_k^T}$$

e_k =(0 0 0… 1 …0 0 0)^T - k-ta kolumna macierzy jednostkowej

$$\boxed{m = [0, \ldots, 0, m_{k+1}, \ldots, m_n]^T}$$

$$\boxed{M_k^{-1} = I + me_k^T = L_k}$$

Dla $M_j,\ j > k$

$$M_k M_j = I - me_k^T - te_j^T + \cancel{me_k^T te_j^T} = I - me_k^T - te_j^T$$

Przykład

$$M_1 = I - \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} (1\,0\,0) = I - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_2 & 1 & 0 \\ -m_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} = I + \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} (1\,0\,0) = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_2 & 1 & 0 \\ m_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_2 & 1 & 0 \\ -m_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_2 & 1 & 0 \\ m_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Przykład

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T \qquad m_i = a_i/a_k,\ i = k+1, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0.5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa

Niech $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}$.

Eliminację Gaussa wykonuje się w $n-1$ krokach:

1: $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$

$\vdots$

k: $\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{b}_k,\ \boldsymbol{A}_{k+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{k+1}$

$\vdots$

n-1: $\boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1},\ \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_n$

Wynikowy układ równań o macierzy trójkątnej górnej rozwiązuje się poprzez podstawianie wstecz

$$\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} = \boxed{\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_n}$$

Zadanie

Przekształcić układ równań liniowych 2 rzędu w układ równoważny za pomocą algorytmu eliminacji Gaussa i macierzy eliminujących

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&1: && \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \\
&\vdots \\
&k: && \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{b}_k,\ \boldsymbol{A}_{k+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{k+1} \\
&\vdots \\
&n\text{-}1: && \boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1},\ \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_n
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M}_k = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -m_{k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -m_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_i = a_i / a_k,\ i = k+1, \ldots, n$$

Rozwiązanie

$$A_1 = \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} a_{12} \; a_{22} \right] \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 A_1 = A_2 \qquad\qquad M_1 B_1 = B_2$$

$$M_1 A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \underbrace{-a_{21} + a_{21}}_{0} & -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} + a_{22} \end{pmatrix} \qquad M_1 B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (metoda 2)

$$\boxed{M_k = I - me_k^T}$$

$$\boxed{m = [0, \ldots, 0, m_{k+1}, \ldots, m_n]^T}$$

$$M_1 = I - me_1^T$$

$$e_1 = (1 \;\; 0)^T$$

$$m = \begin{bmatrix} 0 & m_2 \end{bmatrix}^T \quad m_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & b \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}}$$

Wybór elementu głównego

Pierwszy krok: Sprowadzić macierz $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ do macierzy $(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}', \mathbf{b}') = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

tak, aby układy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ miały te same rozwiązania.

Jeśli $a_{11} \neq 0$, to wystarczy wyliczyć

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad b'_i = b_i - b_1\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \qquad i = 2, \dots, n, \;\; j = 1, \dots, n.$$

W praktyce tzw. *wybór elementu głównego* o maksymalnym module:

- w kolumnie – konieczna zamiana odpowiednich wierszy
- w całej macierzy – konieczna zamiana odpowiednich wierszy i kolumn

Rozwiązanie pozostaje niezmienione z dokładnością do permutacji zmiennych.

Kolejne kroki: To samo co w pierwszym dla macierzy $(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$ z poprzedniego kroku, bez pierwszego wiersza i pierwszej kolumny.

Algorytm Eliminacji Gaussa

permutacja

M_k

$M_k * A_k$

```
for k = 1 to n − 1
    if a_kk = 0 then ~~stop~~
    for i = k + 1 to n
        m_ik = a_ik / a_kk
    end
    for j = k + 1 to n
        for i = k + 1 to n
            a_ij = a_ij − m_ik a_kj
        end
    end
end
```

```
function y=Mk(A,k);
%maceirz M do eleminacji Gaussa
[Nw Nk]=size(A);
if Nw ~= Nk
   error('macierz nie jest kwardatowa');
end;
if (k<1)+(k>Nk)
   error('numer kolumny poza zakresem');
end;
a=A(:,k);
M=eye(Nw,Nk);
for i=k+1:Nw
   mi=a(i)/a(k);
   M(i,k)=-mi;
end;
y=M;
```

Przykład

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3, \\
4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6, \\
4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 10,
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.
$$

Przykład (cd.)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}}$$

$M_1A*x=M_1B$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Przykład (cd.)

$$M_2M_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$M_2M_1A*x=M_2M_1B$

$$M_2M_1b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Inna metoda

$$M_k = I - me_k^T$$

$$M_kM_j = I - me_k^T - te_j^T + me_k^Tte_j^T = I - me_k^T - te_j^T$$

Przykład (cd.)

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład macierzy A na czynniki trójkątne

Skoro $$\boldsymbol{M}_{n-1} \dots \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}$$

więc mamy

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_1^{-1} \dots \boldsymbol{M}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}_1 \dots \boldsymbol{L}_{n-1} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

Przykład

$$M_k^{-1} = L_k$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_k &= I - me_k^T \\ M_k^{-1} &= I + me_k^T \end{aligned}}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

Wybór elementów głównych

W każdym kroku element główny musi być różny od zera

Wybór elementów głównych **nie jest potrzebny**, jeśli

* macierz A ma **dominującą główną przekątną**

* macierz A **symetryczna i dodatnio określona** $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$

Jeśli współczynniki układu równań różnią się od siebie o wiele rzędów wielkości, to układ taki trzeba przed eliminacją **poddać normalizacji,** tj. **każde równanie j** musi zostać przeskalowane czynnikiem
$\mathbf{1/\max_j |a_{ij}|}$, i = 1,...,n.

Przykład macierzy symetrycznej i dodatnio określonej

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = [a \quad b \quad c]^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{X} &= [2a - b \quad -a + 2b - c \quad -b + 2c][a \quad b \quad c]^{\mathrm{T}} \\ &= [2a^2 - ab - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2\,], \end{aligned}$$

$$P(\mathbf{x}) = 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2bc + 2c^2 = a^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + c^2$$

Dla macierzy symetrycznej i dodatnio określonej

(a) $a_{i,j}^2 < a_{i,i}a_{j,j}$ dla każdego $i \neq j,\ i,j = 1, ..., n$
(b) $\max\{|a_{i,j}|\} = \max\{a_{1,1}, ..., a_{n,n}\}$

Twierdzenie Gerszgorina

Permutacja macierzy

```
A =
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
```

```
P =
   0   0   1
   1   0   0
   0   1   0
```

1 wiersz będzie 2m

```
>> P*A
   7   8   9
   1   2   3
   4   5   6
```

```
P =
   0   0   1
   1   0   0
   0   1   0

>> A*P
   2   3   1
   5   6   4
   8   9   7
```

1 kolumna będzie 3ą

```
P^n
   1.  0.  0.
   0.  1.  0.
   0.  0.  1.
```

n – wymiar P

P*A – zmieniamy wiersze
A*P – zmieniamy kolumny

Zadanie

1. Dla macierzy A znaleźć macierz permutacji P

A =

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

$\xrightarrow{P}$

B=

4.	5.	6.
7.	8.	9.
1.	2.	3.

A =

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

$\xrightarrow{P}$

C=

3.	1.	2.
6.	4.	5.
9.	7.	8.

2. Sprawdzić działanie permutacji P, P*P, P*P*P na macierz A

Odpowiedź

A =

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

B=P*A

B=

4.	5.	6.
7.	8.	9.
1.	2.	3.

P =

0.	1.	0.
0.	0.	1.
1.	0.	0.

A =

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.

C=A*P

C=

3.	1.	2.
6.	4.	5.
9.	7.	8.

Permutacja

$$MA = U \qquad M = \underbrace{M_{n-1}P_{n-1}} \cdots \underbrace{M_1 P_1}$$

$$L = M^{-1}$$ nie jest trójkątna dolna

Alternatywa

$$P = P_{n-1} \cdots P_1$$

$$\boxed{PA = LU}$$

$$Ax = b$$

$$Ly = Pb$$

$$Ux = y$$

Algorytm eliminacji z permutacją

P_k

M_k

$M_k * A_k$

```
for k = 1 to n − 1
    Find index p such that
        |a_pk| ≥ |a_ik| for k ≤ i ≤ n
    if p ≠ k then
        interchange rows k and p
    if a_kk = 0 then
        continue with next k
    for i = k + 1 to n
        m_ik = a_ik / a_kk
    end
    for j = k + 1 to n
        for i = k + 1 to n
            a_ij = a_ij − m_ik a_kj
        end
    end
end
```

Przykład

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$$

P*A – zmieniamy wiersze

A*P – zmieniamy kolumny

Przykład (cd.)

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Przykład (cd.)

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1} = (\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{P}_1)^{-1} = \boldsymbol{P}_1^T\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{P}_2^T\boldsymbol{L}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nie jest trójkątną dolną

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{LU}$$

Przykład (cd.)

Alternatywa

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{LU}$$

Eliminacja Gausa-Jordana

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -m_{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -m_{k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -m_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$m_i = a_i / a_k, \; i = 1, \ldots, n.$$

Wilhelm Jordan (1 March 1842, Ellwangen, Württemberg – 17 April 1899, Hanover) was a German geodesist who conducted surveys in Germany and Africa and founded the German geodesy journal.

Cel

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= b_1^{(n)} \\ x_2 \qquad\qquad &= b_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

vs.

$$M_k \, a = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -m_{k+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -m_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Cel

$$A_n x = U x = b_n$$

Eliminacja Gausa-Jordana (cd.)

Układ równań postaci $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(1)}$, tzn.

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}
\end{aligned}
$$

przekształcamy następująco. Pierwsze równanie dzielimy obustronnie przez $a_{11}^{(1)}$, a następnie od i-tego wiersza, $i = 2, 3, \ldots, n$, odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez $a_{i1}^{(1)}$, otrzymując układ $\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(2)}$, tzn.

Eliminacja Gausa-Jordana (cd.)

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)} x_n &= b_1^{(2)} \\
a_{22}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n &= b_2^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n2}^{(2)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)} x_n &= b_n^{(2)}
\end{aligned}
$$

Następnie drugie równanie dzielimy obustronnie przez $a_{22}^{(2)}$ i od i-tego wiersza, $i = 1, 3, 4, \ldots, n$, odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $a_{i2}^{(2)}$, otrzymując układ $\boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(3)}$, tzn.

Eliminacja Gausa-Jordana (cd.)

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{13}^{(3)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(3)} x_n &= b_1^{(3)} \\
x_2 + a_{23}^{(3)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(3)} x_n &= b_2^{(3)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n3}^{(3)} x_3 + \ldots + a_{nn}^{(3)} x_n &= b_n^{(3)}
\end{aligned}
$$

Po $(n-1)$ eliminacjach otrzymujemy układ postaci

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1^{(n)} \\
x_2 \qquad\qquad\qquad &= b_2^{(n)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= b_n^{(n)}
\end{aligned}
}
$$

Przekształceniami elementarnymi na wierszach macierzy nazywamy następujące działania:

1. mnożenie wszystkich elementów dowolnego wiersza przez liczbę $c \neq 0$;
2. zamiana miejscami (przestawienie) dwóch dowolnych wierszy macierzy;
3. dodawanie do wszystkich elementów dowolnego wiersza odpowiednich elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę $c \neq 0$.

Przykład

AX= b

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad b=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 31 \\ 2 \end{bmatrix} \quad / + drugi\ wiersz$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 31 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ / + wierszpierwszy \\ / - 3 \cdot wierszpierwszy \\ / - wierszpierwszy \end{array}$$

Przykład (cd.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ / - 3 \cdot wiersz\, czwarty \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & -10 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 37 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} / - 3 \cdot drugi\, wiersz \\ \\ / + 10 \cdot drugi\, wiersz \\ / - drugi\, wiersz \end{array}$$

Przykład (cd.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -35 & -35 \\ 0 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 121 & -117 \\ 0 & 0 & -15 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -101 \\ 37 \\ 371 \\ -45 \end{bmatrix}$$

$$/ + 8 \cdot czwarty\, wiersz$$

$$/ : (-15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -35 & -35 \\ 0 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -101 \\ 37 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} / + 35 \cdot wiersz\, trzeci \\ -12 \cdot wiersz\, trzeci \\ \\ / - wiersz\, trzeci \end{matrix}$$

Przykład (cd.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -140 \\ 0 & 1 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 284 \\ -95 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$/ \ : \ (4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -140 \\ 0 & 1 & 0 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 284 \\ -95 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} / \ + \ 140 \cdot wiersz\ czwarty \\ / \ - \ 49 \cdot wiersz\ czwarty \\ / \ + \ 3 \cdot wiersz\ czwarty \\ \end{matrix}$$

Przykład (cd.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 5 \\ w = -2 \end{cases}$$

Obliczenie odwrotnej macierzy za pomocą macierzy jednostkowej (Metoda bezwyznacznikowa)

$$[A|\mathbf{I_n}] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [\mathbf{I_n}|A^{-1}]$$

```
> A=[1 2 1 0;3 4 0 1]

A =

     1     2     1     0
     3     4     0     1

>> rref(A)

ans =

    1.0000         0   -2.0000    1.0000
         0    1.0000    1.5000   -0.5000
```

Przykład

- Obliczyć macierz odwrotną $\boxed{[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]}$

$$\boxed{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład (cd.)

$$/ - \textit{czwarty wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ / - 5 \cdot \textit{pierwszy wiersz} \\ / - 2 \cdot \textit{pierwszy wiersz} \\ / - \textit{pierwszy wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & -5 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} / - \textit{trzeci wiersz} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Przykład (cd.)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ / - \textit{drugi wiersz} \\ / - \textit{drugi wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ / - 2 \cdot \textit{czwarty wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} / + \textit{trzeci wiersz} \\ / - 2 \cdot \textit{trzeci wiersz} \\ \\ / - \textit{trzeci wiersz} \end{array}$$

Przykład (cd.)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} / + \textit{czwarty wiersz} \\ / - 3 \cdot \textit{czwarty wiersz} \\ / + \textit{czwarty wiersz} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -12 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mat_inv2.m

```
function b = mat_inv2(a)
% Find dimensions of input matrix
[r,c] = size(a);

% If input matrix is not square, stop function
if r ~= c
    disp('Only Square Matrices, please')
    b = [];
    return
end

% Target identity matrix to be transformed into the output
% inverse matrix
b = eye(r);

%The following code actually performs the matrix inversion by working
% on each element of the input
for j = 1 : r
    for i = j : r
        if a(i,j) ~= 0
            for k = 1 : r
                s = a(j,k); a(j,k) = a(i,k); a(i,k) = s;
                s = b(j,k); b(j,k) = b(i,k); b(i,k) = s;
            end
            t = 1/a(j,j);
            for k = 1 : r
                a(j,k) = t * a(j,k);
                b(j,k) = t * b(j,k);
            end
            for L = 1 : r
                if L ~= j
                    t = -a(L,j);
                    for k = 1 : r
                        a(L,k) = a(L,k) + t * a(j,k);
                        b(L,k) = b(L,k) + t * b(j,k);
                    end
                end
            end
        end
        break
    end
    % Display warning if a row full of zeros is found
    if a(i,j) == 0
        disp('Warning: Singular Matrix')
        b = 'error';
        return
    end
end
% Show the evolution of the input matrix, so that we can
% confirm that it became an identity matrix.
a
```

```
>> A

A =

     1     1     1
     2     3     5
     4     0     5

>> mat_inv2(A)

a =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1


ans =

    1.1538   -0.3846    0.1538
    0.7692    0.0769   -0.2308
   -0.9231    0.3077    0.0769
```

Rozkład LU

Eliminacja Gaussa: rozkład LU

Tw. Niech $\boldsymbol{A}$ będzie macierzą $n \times n$. Niech $\boldsymbol{A}_k$ oznacza macierz utworzoną z elementów początkowych k wierszy i kolumn macierzy $\boldsymbol{A}$. Jeśli $\boxed{\det(\boldsymbol{A}_k) \neq 0, \text{ dla } k = 1, \ldots n}$ to istnieje $\boxed{\text{jedyny rozkład } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}}$ na czynniki trójkątne takie, że macierz $\boldsymbol{L} = [m_{ij}]$ jest macierzą trójkątną dolną z $m_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots n$, a macierz $\boldsymbol{U}$ jest macierzą trójkątną górną.

Równość $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ oznacza

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{r} m_{ip} u_{pj}, \quad r = \min(i, j), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Jeśli $m_{ii} = 1$, to jest to układ n^2 równań na n^2 niewiadomych będących elementami macierzy $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{U}$.

Schematy zwarte

- Głównie dla celu obliczeń ręcznych – mniej wyników pośrednich.
- Eliminacja Gaussa w k-tym kroku wyznacza k-tą kolumnę $\mathbf{L}$ i k-ty wiersz $\mathbf{R}$.
- $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ jest równoważne układowi n^2 równań z $n(n+1)$ niewiadomymi:

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{\min(i,j)} l_{ip} r_{pj}.$$

W k-tym kroku:

$$a_{kj} = \sum_{p=1}^{k} l_{kp} r_{pj}, \quad j \geqslant k, \qquad a_{ik} = \sum_{p=1}^{k} l_{ip} r_{pk}, \quad i > k.$$

Metoda Doolittle'a: $l_{kk} = 1, \quad k = 1, \ldots, n$

$$\underset{n*n}{\mathbf{A}} = \underset{n*n}{\mathbf{L}} * \underset{n*n}{\mathbf{U}}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$r_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} r_{pj}, \quad j = k, \ldots, n,$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} r_{pk}}{r_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Metoda Crouta: $r_{kk} = 1, \quad k = 1, \ldots, n$

$$\underset{n*n}{\mathbf{A}} = \underset{n*n}{\mathbf{L}} * \underset{n*n}{\mathbf{U}}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} r_{pk}, \quad i = k, \ldots, n,$$

$$r_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} r_{pj}}{l_{kk}}, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Układ równań. Metoda Doolittle'a

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$l_{ii} = 1$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$$\mathbf{L}\boxed{\mathbf{Ux}} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{LUx} = \mathbf{IUx} = \mathbf{Ux} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

Zdefiniujemy wektor $\mathbf{b}' = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{Lb}' = \mathbf{LL}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$$

Układ równań. Metoda Doolittle'a (cd.)

Krok 1. Niewiadomy jest wektor b'

$$\boxed{\mathbf{L}\mathbf{b}' = \mathbf{b}}$$

$$\boxed{b'_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} b'_k} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

Krok 2. Niewiadomy jest wektor x

$$\boxed{\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}'}$$

$$\boxed{x_i = b'_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{i,k} x_k / u_{i,i}} \qquad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)$$

Złożoność – n^2

Przykład

$$
\begin{aligned}
80x_1 - 20x_2 - 20x_3 &= \boxed{20} \\
-20x_1 + 40x_2 - 20x_3 &= \boxed{20} \\
-20x_1 - 20x_2 + 130x_3 &= \boxed{20}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
80x_1 - 20x_2 - \quad 20x_3 &= 20 \\
0x_1 + 35x_2 - \quad 25x_3 &= 25 \\
0x_1 + \quad 0x_2 + 750/7x_3 &= 300/7
\end{aligned}
$$

Przykład (cd.)

Eliminacja i obliczenie L i U

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 80 & -20 & -20 & 20 \\ -20 & 40 & -20 & 20 \\ -20 & -20 & 130 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - (-20/80)R_1 \\ R_3 - (-20/80)R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 80 & -20 & -20 & 20 \\ 0 & 35 & -25 & 25 \\ 0 & -25 & 125 & 25 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - (-25/35)R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 80 & -20 & -20 & 20 \\ 0 & 35 & -25 & 25 \\ 0 & 0 & 750/7 & 300/7 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = [20 - (-20)(1.00) - (-20)(0.40)]/80 \\ \quad = 0.60 \\ x_2 = [25 - (-25)(0.4)]/35 = 1.00 \\ x_3 = 300/750 = 0.40 \end{array}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd.)

$$\mathbf{b}_1^T = [20 \quad 20 \quad 20]$$

$$\boxed{\mathbf{Lb}' = \mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$b_1' = 20$$

$$b_2' = 20 - (-1/4)(20) = 25$$

$$b_3' = 20 - (-1/4)(20) - (-5/7)(25) = 300/7$$

$$\boxed{\mathbf{Ux} = \mathbf{b}'}$$

$$x_1^T = [0.60 \quad 1.00 \quad 0.40]$$

Przykład (cd.)

$$\boxed{\mathbf{b}_2^T = [20 \quad 10 \quad 20]}$$

$$\boxed{\mathbf{L}\mathbf{b}' = \mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1' = 20 \\ b_2' = 15 \\ b_3' = 250/7 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 250/7 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 2/3 \\ x_3 = 1/3 \end{matrix}$$

$$\boxed{\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}'}$$

Wyznaczanie macierzy odwrotnej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ -20 & 40 & -20 \\ -20 & -20 & 130 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$ X – 1 kolumna macierzy odwrotnej do A

$$\mathbf{b}_2^T = [0 \quad 1 \quad 0]$$ X – 2 kolumna macierzy odwrotnej do A

$$\mathbf{b}_3^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$ X – 3 kolumna macierzy odwrotnej do A

Wyznaczanie macierzy odwrotnej (cd.)

$$\mathbf{L}\mathbf{b}_1' = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -5/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{b}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1'$$

$$\begin{bmatrix} 80 & -20 & -20 \\ 0 & 35 & -25 \\ 0 & 0 & 750/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 3/7 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2/125 \\ 1/100 \\ 1/250 \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie macierzy odwrotnej (cd.)

$$\mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 2/125 & 1/100 & 1/250 \\ 1/100 & 1/30 & 1/150 \\ 1/250 & 1/150 & 7/750 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.016000 & 0.010000 & 0.004000 \\ 0.01000 & 0.033333 & 0.006667 \\ 0.004000 & 0.006667 & 0.009333 \end{bmatrix}$$