Logika rozmyta

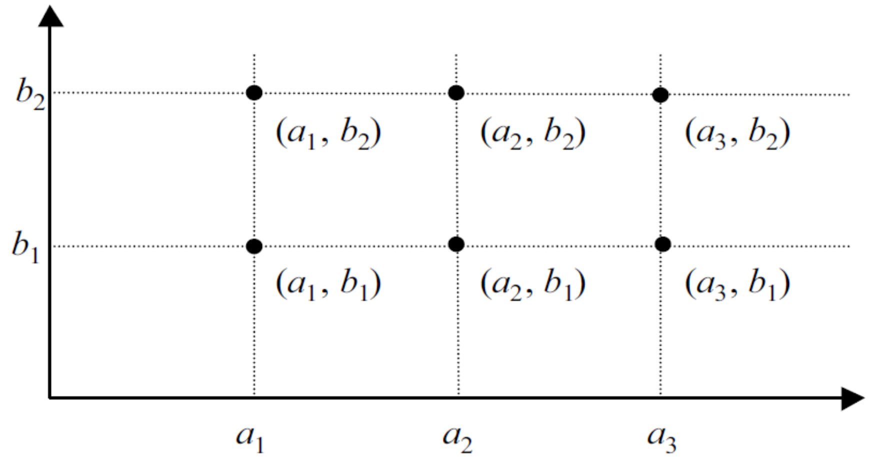
Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
UMK
http://fizyka.umk.pl/~osokolov/LR/

Relacje rozmyte

Niech A i B będą dwoma niepustymi zbiorami, zbiór iloczynów lub **iloczyn kartezjański** A x B jest zdefiniowany w następujący sposób

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$



Przykłady

$$A = \{a_1, a_2, a_3\},\ B = \{b_1, b_2\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

$$A \times A = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)\}$$

Przykład relacji zaufania

X_1 - zbiór obywateli,

$$X_1 = \{o_1, o_2, ..., o_5\},$$

X_2 - zbiór banków,

$$X_2 = \{b_1, b_2, ..., b_5\}.$$

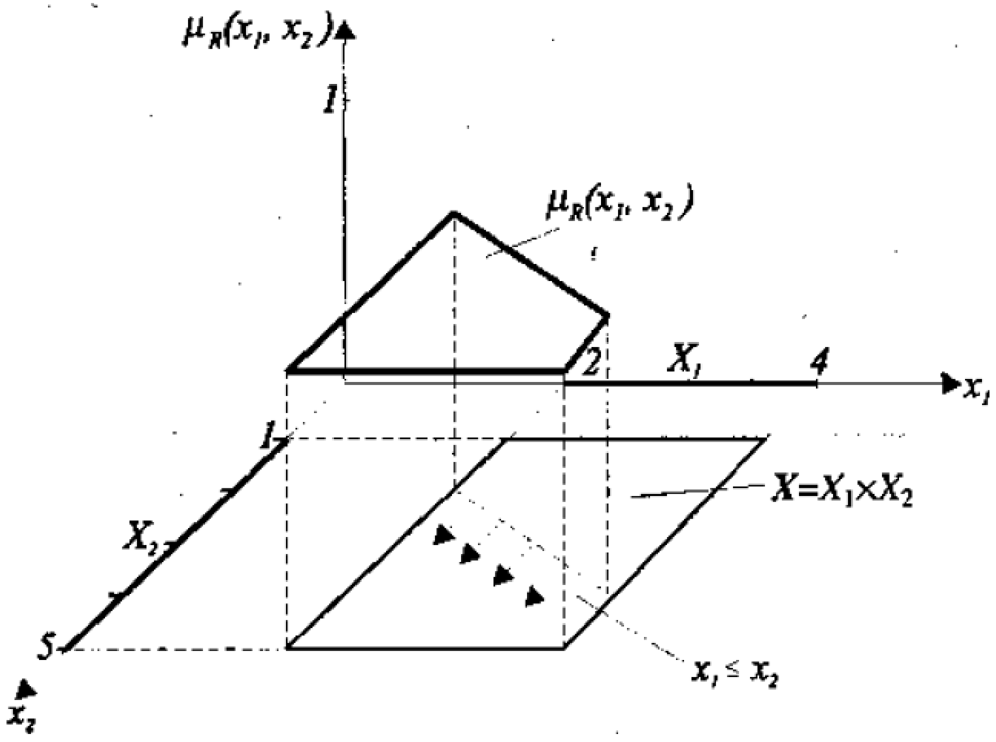
b_j \ o_i	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5
b_1	o_1, b_1	o_2, b_1	o_3, b_1	o_4, b_1	o_5, b_1
b_2	o_1, b_2	o_2, b_2	o_3, b_2	o_4, b_2	o_5, b_2
b_3	o_1, b_3	o_2, b_3	o_3, b_3	o_4, b_3	o_5, b_3
b_4	o_1, b_4	o_2, b_4	o_3, b_4	o_4, b_4	o_5, b_4
b_5	o_1, o_5	o_2, b_5	o_3, b_5	o_4, b_5	o_5, b_5

Relacja ‚mniejszy lub równy’

$$X_1 = \{x_1 : 2 \le x_1 \le 4\},$$
$$X_2 = \{x_2 : 1 \le x_2 \le 5\}.$$

$$\boldsymbol{R} = \{(x_1, x_2) : x_1 \le x_2\}$$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1



Relacje binarne

Jeśli A i B są dwoma zbiorami i istnieje **określona właściwość** między elementami **x elementu A** i **y elementu B**, właściwość tę można opisać za pomocą uporządkowanej pary (x, y). Zbiór takich par (x, y), x $\in$A i y $\in$ B, nazywamy **relacją R**.

$$R = \{ (x,y) \mid x \in A, y \in B \} \quad R \subseteq A \times B$$

Sposoby zapisu

$$(x, y) \in R$$

$$x\, R\, y$$

Relacja wielowymiarowa

$$x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ x_3 \in A_3,\ \ldots,\ x_n \in A_n$$

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in R$$

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$$

Dziedzina i zakres relacji

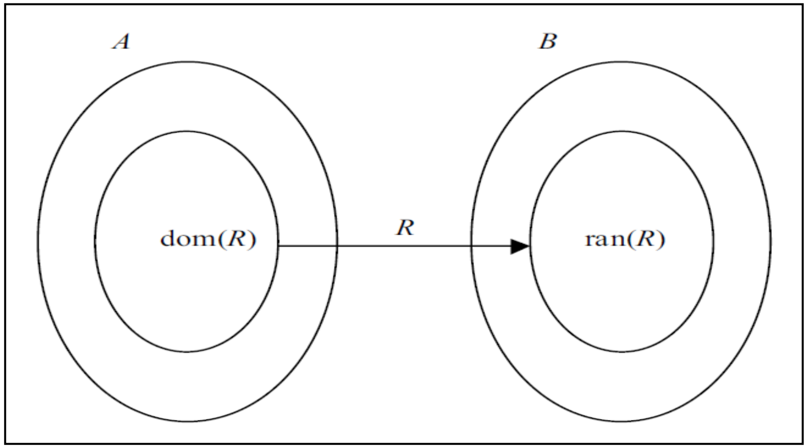
Domain $dom(R) = \{\, x \mid x \in A,\ (x, y) \in R \text{ for some } y \in B \,\}$

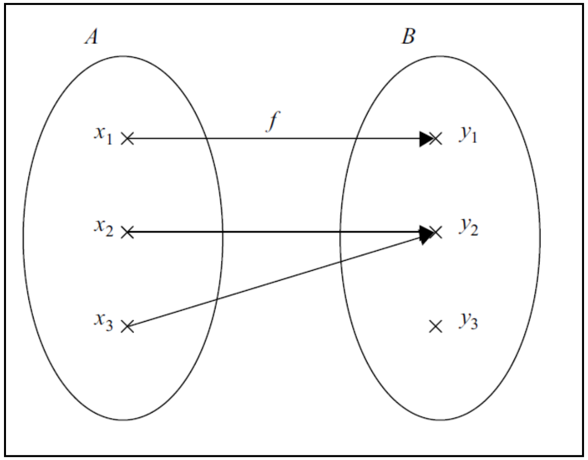
range $ran(R) = \{\, y \mid y \in B,\ (x, y) \in R \text{ for some } x \in A \,\}$

Jeśli wyrażamy to odwzorowanie jako ***f***, ***y*** nazywa się **obrazem** ***x***, który jest oznaczony jako ***f (x)***

$$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\} \text{ or } f : A \to B$$

$$ran(R) = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$





Charakterystyki relacji

Jeden do wielu $\quad \exists\, x \in A, \quad y_1, \quad y_2 \in B \quad (x, y_1) \in R, (x, y_2) \in R$

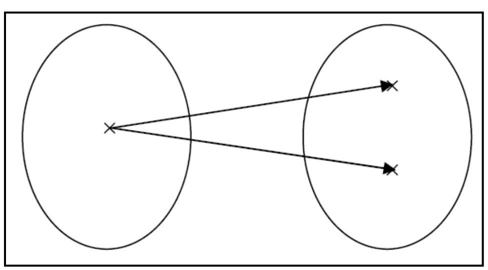
Wiele do jednego $\quad \forall\, y \in B, \exists\, x \in A, y = f(x) \qquad f(A) = B$

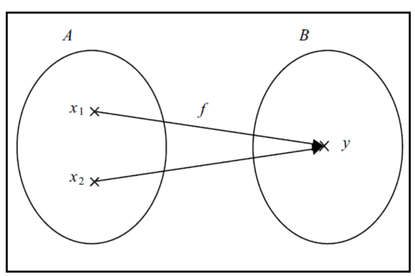
(suriekcja) $\quad \text{if } x1 \neq x2, f(x1) = f(x2)$ Jest możliwe

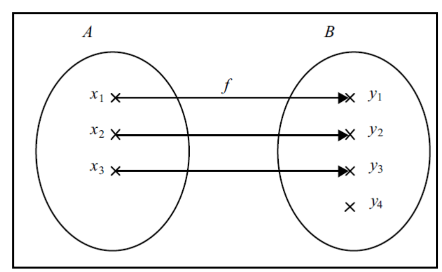
Jeden do jednego $\quad \text{if} \quad x_1 \neq x_2, \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

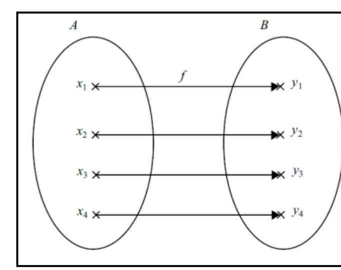
(Iniekcja)

Bijekcja= suriekcja+ Iniekcja







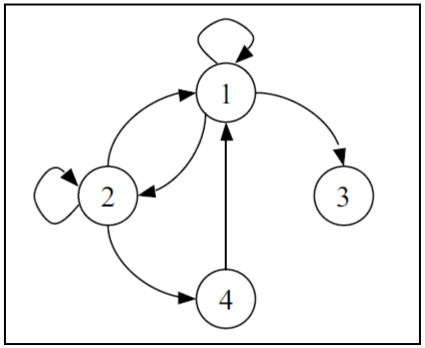


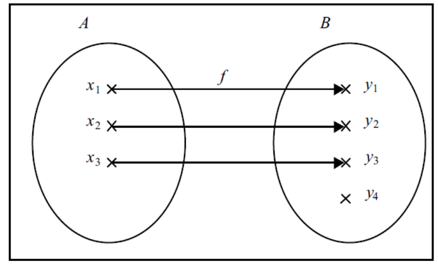
Metody reprezentacji relacji

Grafowa

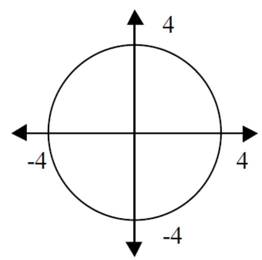
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

AxA





Wykres współrzędnych



$$x^2 + y^2 = 4$$

Macierzowa

$$M_R = (m_{ij})$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

R	b_1	b_2	b_3
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	1	0
a_4	0	0	1

Operacje na relacjach

suma

$T = R \cup S$ If $(x, y) \in R$ or $(x, y) \in S$, then $(x, y) \in T$

przecięcie

$T = R \cap S$ If $(x, y) \in R$ and $(x, y) \in S$, then $(x, y) \in T$.

negacja

$$\overline{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \notin R\}$$

odwrotna

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R, x \in A, y \in B\}$$

kompozycja

$$R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$$

$$T = S \bullet R \subseteq A \times C$$

$$T = \{(x, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

Relacje na jednym zbiorze

$$R \subseteq A \times A$$

Relacja zwrotna

$$x \in A \to (x, x) \in R \text{ or } \mu_R(x, x) = 1, \ \forall\, x \in A$$

Relacja symetryczna

$$(x, y) \in R \to (y, x) \in R \text{ or}$$
$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x), \ \forall\, x, y \in A$$

Relacja tranzytywna

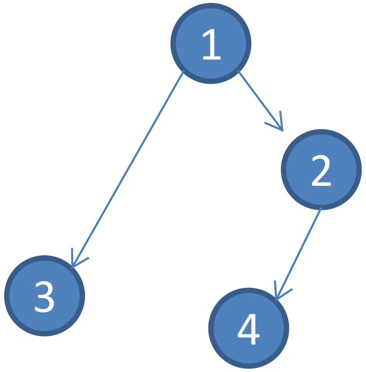
$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \to (x, z) \in R$$

Zamknięcie

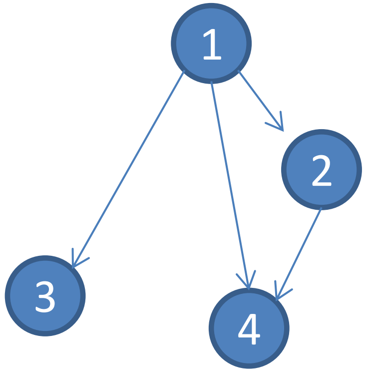
Gdy relacja R jest zdefiniowana w A, warunkiem zamknięcia są:
1) Zbiór A powinien spełniać określoną właściwość.
2) Przecięcie między podzbiorami A’ powinno spełniać zależność R.
Najmniejsza relacja R’ zawierająca określoną właściwość jest nazywana zamknięciem R.

Przykład

1 2
1 3
2 4



1 2
1 3
1 4
2 4
1 4



Relacje rozmyte vs binarne

Relacja binarna $\mu_R : A \times B \to \{0, 1\}$

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ iff } (x, y) \in R \\ 0 \text{ iff } (x, y) \notin R \end{cases}$$

Relacja rozmyta $\mu_R : A \times B \to [0, 1]$

$$\mathrm{R} = \{((x, y), \mu_R(x, y)) |\ \mu_R(x, y) \geq 0\ , \quad x \in A, \quad y \in B\}$$

Rozmyte relacje

- **Relacje klasyczne**

$\mathbf{R} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ def: $\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{iff } (x,y) \in R \\ 0 & \text{iff } (x,y) \notin R \end{cases}$

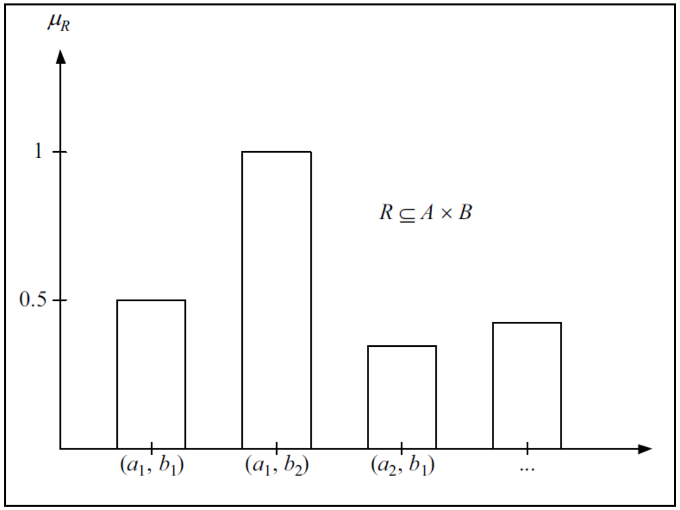
- **Relacje rozmyte**

$\mathbf{R} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ def: $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

$\mu_R(x,y)$ opisuje **stopień powiązania *x* i *y***

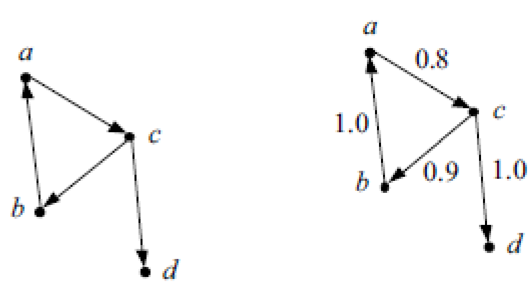
Inna interpretacja: stopień prawdziwości zdania x R y

Przykłady reprezentacji



A	a	b	c	d
a	0.0	0.0	0.8	0.0
b	1.0	0.0	0.0	0.0
c	0.0	0.9	0.0	1.0
d	0.0	0.0	0.0	0.0

$$\mu_R(a, c) = 0.8,\ \mu_R(b, a) = 1.0,\ \mu_R(c, b) = 0.9,\ \mu_R(c, d) = 1.0$$



Operacje na relacjach rozmytych. Suma

$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq A \times B$

$\forall\ (x, y) \in A \times B$

$$\begin{aligned} \mu_{R \cup S}(x, y) &= \mathrm{Max}\,[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)] \\ &= \mu_R(x, y) \vee \mu_S(x, y) \end{aligned}$$

max

$$\mu_{R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots \cup R_n}(x, y) = \bigvee_{R_i} \mu_{Ri}(x, y)$$

Dla macierzy $\qquad M_{R \cup S} = M_R + M_S$

Operacje na relacjach rozmytych. Przecięcie

$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq A \times B$

$$\mu_{R \cap S}(x) = \mathrm{Min}\,[\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)]$$
$$= \mu_R(x, y) \wedge \mu_S(x, y)$$

min

$$\mu_{R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \ldots \cap R_n}(x, y) = \bigwedge_{R_i} \mu_{Ri}(x, y)$$

Operacje na relacjach rozmytych. Negacja. Odwracanie

$R \subseteq A \times B \qquad S \subseteq A \times B$

$$\forall\ (x, y) \in A \times B \quad \mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R\,(x, y)$$

$$\mu_R^{-1}\,(y, x) = \mu_R\,(x, y)$$

Przykład

M_R	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.0	1.0	0.0

M_S	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.6	0.9	0.3

$M_{R\cup S}$	a	b	c
1	0.3	0.2	1.0
2	0.8	1.0	1.0
3	0.6	1.0	0.3

$M_{R\cap S}$	a	b	c
1	0.3	0.0	0.1
2	0.1	0.8	1.0
3	0.0	0.9	0.0

$M_{\overline{R}}$	a	b	c
1	0.7	0.8	0.0
2	0.2	0.0	0.0
3	1.0	0.0	1.0

Operacje na relacjach rozmytych. Kompozycja

$$R \subseteq A \times B,\ S \subseteq B \times C. \qquad S \bullet R \subseteq A \times C$$

$$\mu_{S\bullet R}(x, z) = \underset{y}{\mathrm{Max}}[\mathrm{Min}\,(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))]$$

$$= \underset{y}{\vee}[\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)]$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{S} \bullet \mathrm{R}} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}} \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$$

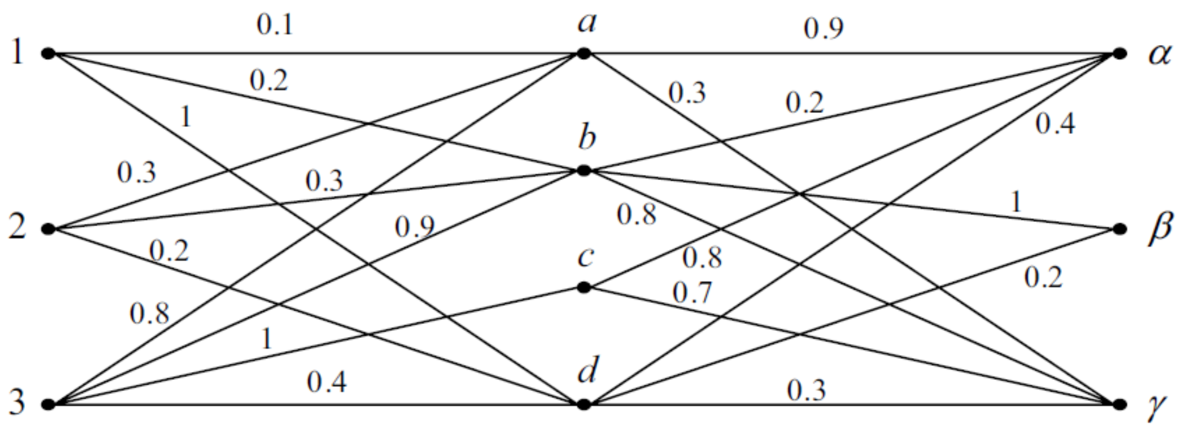
Przykład

R	a	b	c	d
1	0.1	0.2	0.0	1.0
2	0.3	0.3	0.0	0.2
3	0.8	0.9	1.0	0.4

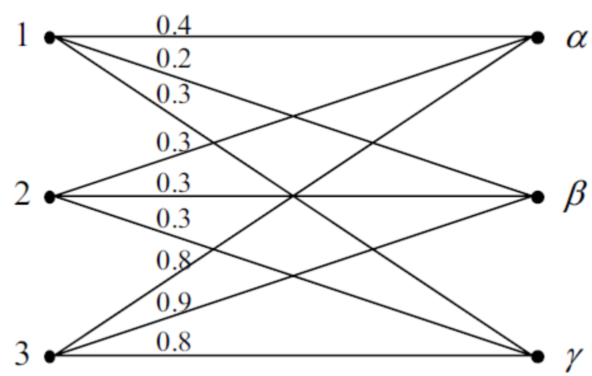
S	α	β	γ
a	0.9	0.0	0.3
b	0.2	1.0	0.8
c	0.8	0.0	0.7
d	0.4	0.2	0.3

S•R	α	β	γ
1	0.4	0.2	0.3
2	0.3	0.3	0.3
3	0.8	0.9	0.8

R S


1
2
3
a
b
c
d
α
β
γ
0.1
0.2
1
0.3
0.3
0.9
0.2
0.8
1
0.4
0.9
0.3
0.2
0.4
1
0.8
0.8
0.7
0.2
0.3

$S \bullet R$


1
2
3
α
β
γ
0.4
0.2
0.3
0.3
0.3
0.3
0.8
0.9
0.8

Kompozycja relacji

$$\forall x \in X \ \forall z \in Z \quad R \circ S(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z))$$

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) = (\mu_{R_1}(x_1, y_1) \wedge \mu_{R_2}(y_1, z_1)) \vee$$

$$\vee (\mu_{R_1}(x_1, y_2) \wedge \mu_{R_2}(y_2, z_1)) \vee (\mu_{R_1}(x_1, y_3) \wedge \mu_{R_2}(y_3, z_1)) =$$

$$= (0{,}1 \wedge 0{,}9) \vee (0{,}7 \wedge 0{,}3) \vee (0{,}4 \wedge 0{,}1) = 0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}3;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_3) = 0{,}1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Przykład. Ocena kompetencji

Przedmioty/ Kompetencje	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.6	0.3	0.7	0.8	0.9
x_2	0.5	0.3	0.8	0.9	0.5
x_3	0.4	0.4	0.3	0.5	0.9
x_4	0.8	0.9	0.3	0.5	0.3
x_5	0.6	0.9	0.6	0.5	0.5
x_6	0.3	0.2	0.9	0.6	0.5
x_7	0.6	0.6	0.4	0.6	0.4
x_8	0.7	0.6	0.7	0.7	0.4
x_9	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
x_{10}	0.4	0.4	0.7	0.8	0.5

Kompetencje
x_1 - tworzy system komputerowy
x_2 - administruje systemem komputerowym
x_3 - programuje w języku C++
x_4 - tworzy stronę WWW
x_5 - tworzy aplikacje multimedialne
x_6 - administruje systemem operacyjnym
x_7 - pracuje w zespole
x_8 - potrafi przygotować dokumentację projektu
x_9 - samokształcenie
x_{10} - jest odpowiedzialny

Absolwenci/ Przedmioty	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	0.9	0.8	0.3	0.6	0.3
y_2	0.9	0.7	0.5	0.5	0.8
y_3	0.3	0.8	0.6	0.9	0.3
y_4	0.7	0.7	0.9	0.5	0.5
y_5	0.9	0.6	0.9	0.7	0.4

Absolwenci/ Kompetencje	z_1 Nowak	z_2 Kowalski	z_3 Piotrowki	z_4 Jankowski	z_5 Gromadzki
x_1	0.9	0.7	0.9	0.7	0.5
x_2	0.7	0.8	0.9	0.8	0.5
x_3	0.9	0.6	0.9	0.7	0.5
x_4	0.9	0.8	0.5	0.6	0.8
x_5	0.9	0.7	0.6	0.6	0.8
x_6	0.6	0.8	0.6	0.9	0.5
x_7	0.6	0.7	0.7	0.7	0.6
x_8	0.7	0.6	0.7	0.7	0.4
x_9	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
x_{10}	0.7	0.7	0.8	0.7	0.5

α-cięcie relacji rozmytej

$$R \subseteq A \times B,$$

$$R_\alpha = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) \geq \alpha, \quad x \in A, y \in B\}$$

Przykład

$$M_R = \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 0.9 & 0.4 & 0.0 \\ & 0.2 & 1.0 & 0.4 \\ & 0.0 & 0.7 & 1.0 \\ & 0.4 & 0.2 & 0.0 \end{array}$$

$$\Lambda = \{0, 0.2, 0.4, 0.7, 0.9, 1.0\}$$

$$M_{R\,0.4} = \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad M_{R\,0.7} = \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad M_{R\,1.0} = \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dekompozycja relacji

$$R = \bigcup_{\alpha} \alpha R_{\alpha}$$

$$\mu_{\alpha R_{\alpha}}(x, y) = \alpha \bullet \mu_{R\alpha}(x, y)$$

$$M_R = 0.4 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cup 0.7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cup 0.9 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cup 1.0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Rzutowanie relacji

$$\mu_{R_A}(x) = \underset{y}{Max}\, \mu_R(x, y) \quad \text{: projection to A}$$

$$\mu_{R_B}(y) = \underset{x}{Max}\, \mu_R(x, y) \quad \text{: projection to B}$$

$M_R =$

A \ B	b_1	b_2	b_3
a_1	0.1	0.2	1.0
a_2	0.6	0.8	0.0
a_3	0.0	1.0	0.3

$M_{R_A} =$

a_1	1.0
a_2	0.8
a_3	1.0

$M_{R_B} =$

	b_1	b_2	b_3
	0.6	1.0	1.0

Rozszerzenie cylindryczne

Jeżeli *X1* i *X2* są nierozmytymi zbiorami a zbiór rozmyty *A* zdefiniowany jest na *X1* to **rozszerzeniem cylindrycznym** A* zbioru *A* na zbiór podstawowy *X1xX2* jest relacja określona jako iloczyn kartezjański zbiorów A oraz *X2, czyli AxX2:*

$$A^*(x_1, x_2) = A(x_1) \wedge X_2(x_2) = A(x_1) \wedge 1 = A(x_1),$$

W przypadku rozszerzenia cylindrycznego zbioru A(x1) na n - wymiarowy zbiór podstawowy X1x...xXn operacja rozszerzenia realizowana jest wg wzoru

$$A^*(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1) \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n = A(x_1),$$

Przykład

$$X_1 = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad X_2 = \{b_1, b_2, b_3\},$$

A(x1) $\mathbf{A} = \{1/a_1, 0.5/a_2, 0/a_3\}.$

$\mathbf{A}^*(x_1,x_2) =$

	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0.5	0
b_2	1	0.5	0
b_3	1	0.5	0

Przedłużenie relacji

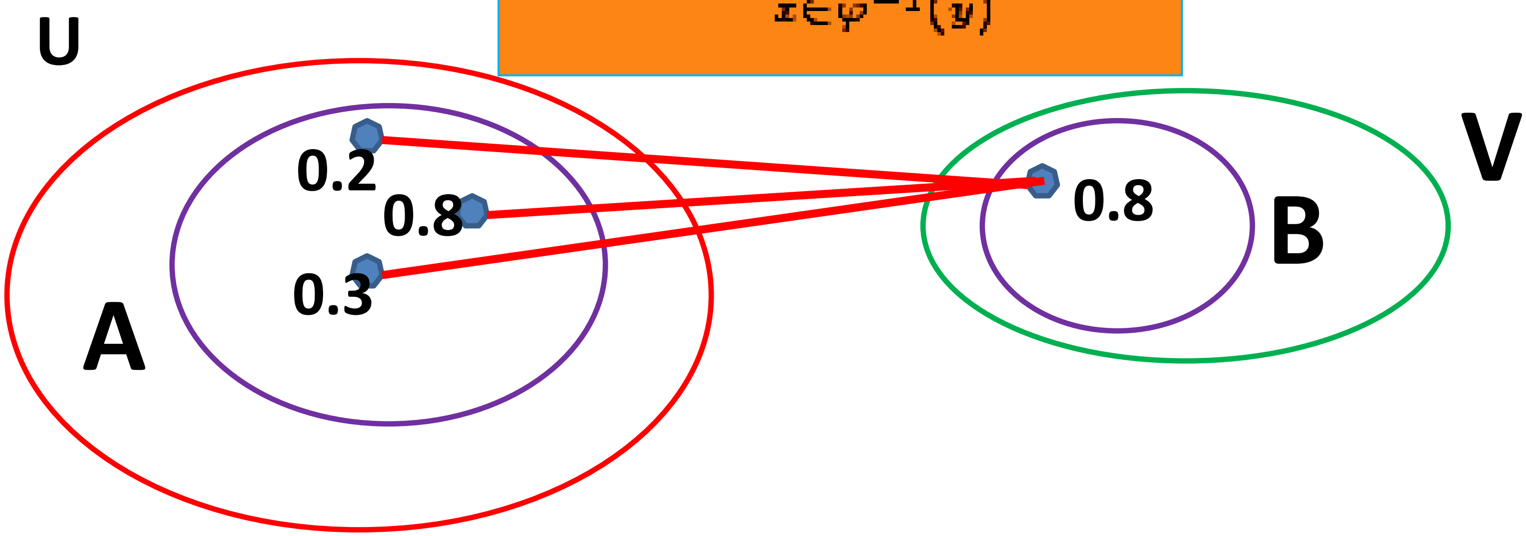
$$x \in A, y \in B$$

oraz $$y = f(x) \quad \text{or} \quad x = f^{-1}(y)$$

$$\mu_{B'}(y) = \underset{x \in f^{-1}(y)}{Max}\left[\mu_A(x)\right] \quad \text{if} \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing$$

Zasada uogólnienia Zadeho

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x)$$



φ: U→V,

A – ZR w U, B – ZR w V

Przykład

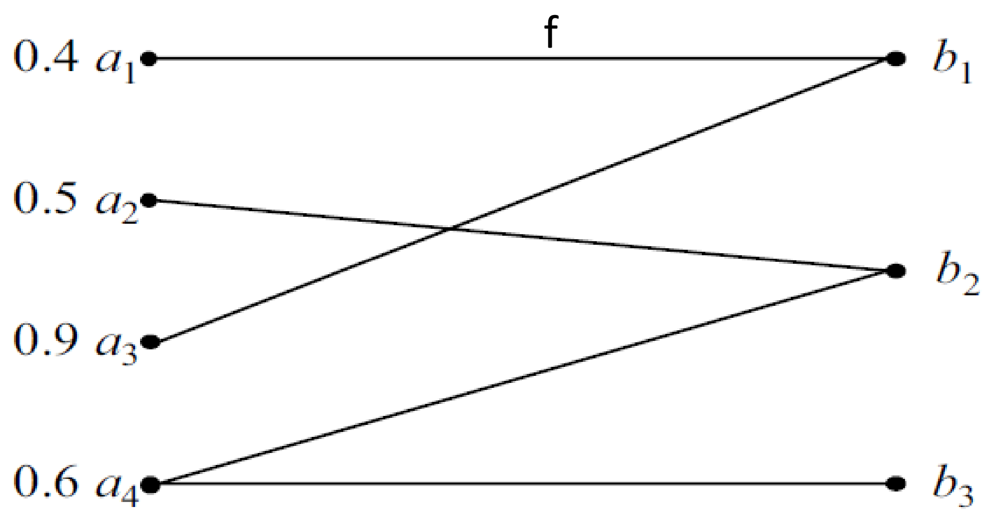
A -zbiór osób z chorobą zakaźną

B - grupa osób, które miały kontakt z zarażonymi osobami

$$A = \{(a_1, 0.4), (a_2, 0.5), (a_3, 0.9), (a_4, 0.6)\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

R={
a1,b1
a2,b2,
a3,b1,
a4,b2,
a4,b3
}



A•R=B’

Przykład (cd)

$$f^{-1}\ (b1) = \{(a1, 0.4), (a3, 0.9)\}, \quad \text{Max}\ [0.4, 0.9] = 0.9$$

$$\Rightarrow \mu_{B'}\ (b_1) = 0.9$$

$$f^{-1}\ (b2) = \{(a2, 0.5), (a4, 0.6)\}, \quad \text{Max}\ [0.5, 0.6] = 0.6$$

$$\Rightarrow \mu_{B'}\ (b_2) = 0.6$$

$$f^{-1}\ (b_3) = \{(a_4, 0.6)\}$$

$$\Rightarrow \mu_{B'}\ (b_3) = 0.6$$

$$B' = \{(b_1, 0.9), (b_2, 0.6), (b_3, 0.6)\}$$

Przypadek n-wymiarowy

$$A_1, A_2, \ldots, A_r$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \quad : \quad X \rightarrow Y$$

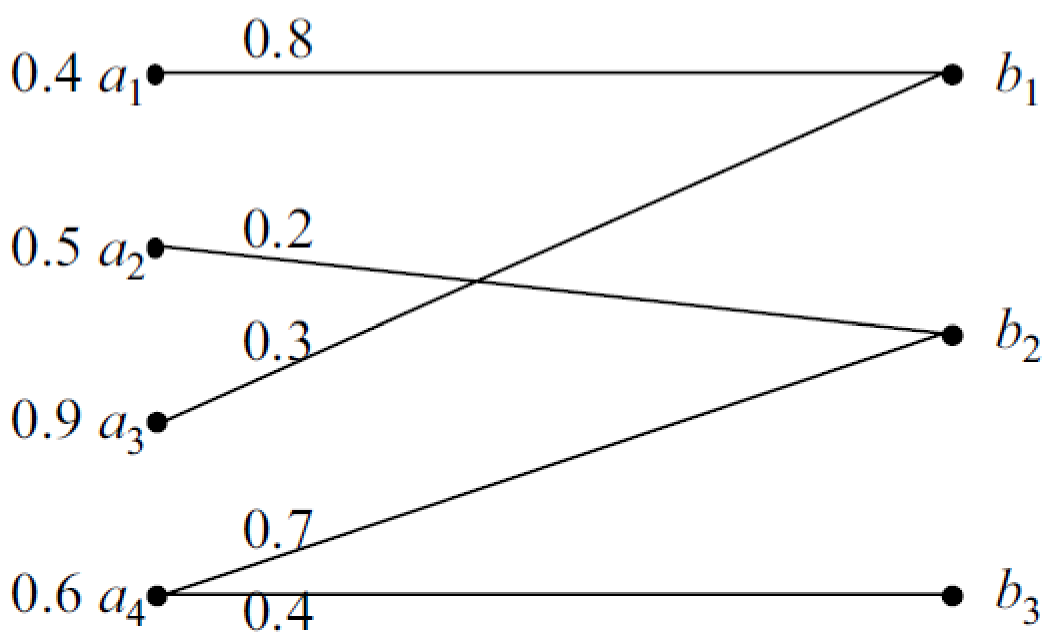
$$\mu_B(y) = \begin{cases} 0, \text{ if } f^{-1}(y) = \varnothing \\ \underset{y=f(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{Max} \left[Min\left(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r) \right) \right], \text{ otherwise} \end{cases}$$

Rozszerzenie relacji

For $x \in A$, $y \in B$, and $B' \subseteq B$

$$\mu_{B'}(y) = \underset{x \in f^{-1}(y)}{\mathrm{Max}}[\mathrm{Min}(\mu_A(x), \mu_R(x, y))]$$

R={
a1,b1/0.8
a2,b2/0.2,
a3,b1/0.3,
a4,b2/0.7,
a4,b3/0.4
}



A•R=B’

Przykład

For b_1,

$\text{Min}\ [\mu_A(a_1), \mu_R(a_1, b_1)] = \text{Min}\ [0.4, 0.8] = 0.4$

$\text{Min}\ [\mu_A(a_3), \mu_R(a_3, b_1)] = \text{Min}\ [0.9, 0.3] = 0.3$

$\text{Max}\ [0.4, 0.3] = 0.4$

$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_1) = 0.4$$

For b_2,

$\text{Min}\ [\mu_A(a_2), \mu_R(a_2, b_2)] = \text{Min}\ [0.5, 0.2] = 0.2$

$\text{Min}\ [\mu_A(a_4), \mu_R(a_4, b_2)] = \text{Min}\ [0.6, 0.7] = 0.6$

$\text{Max}\ [0.2, 0.6] = 0.6$

$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_2) = 0.6$$

For b_3,

$\text{Max Min}\ [\mu_A(a_4), \mu_R(a_4, b_3)] = \text{Max Min}\ [0.6, 0.4] = 0.4$

$$\Rightarrow \mu_{B'}(b_3) = 0.4$$

$$B' = \{(b_1, 0.4), (b_2, 0.6), (b_3, 0.4)\}$$

Przykład

$$A = \{(a_1, 0.8), (a_2, 0.3)\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3\}$$

A•R1=B'
B1•R2=C'

$$M_{R_1} = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.3 & 1.0 & 0.0 \\ a_2 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \end{array}$$

$$M_2 = \begin{array}{cccc} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline b_1 & 0.7 & 0.4 & 1.0 \\ b_2 & 0.2 & 0.0 & 0.8 \\ b_3 & 0.0 & 0.3 & 0.9 \end{array}$$

$$B' = \{(b_1, 0.3), (b_2, 0.8), (b_3, 0)\}$$

$$C' = \{(c_1, 0.3), (c_2, 0.3), (c_3, 0.8)\}$$

Odległość rozmyta

i) $d(x, x) = 0, \forall\ x \in X$

ii) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1), \forall\ x_1, x_2 \in X$

iii) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), \forall\ x_1, x_2, x_3 \in X$

$$\forall\ \delta \in \Re^+, \mu_{d(A, B)}(\delta) = \underset{\delta = d(a, b)}{\mathrm{Max}}[\mathrm{Min}\ (\mu_A(a), \mu_B(b))]$$

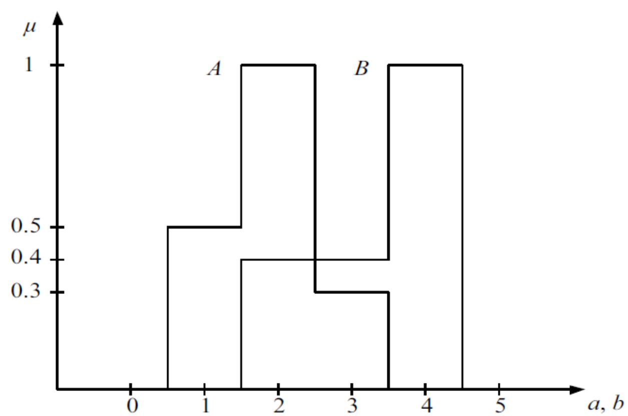
Przykład

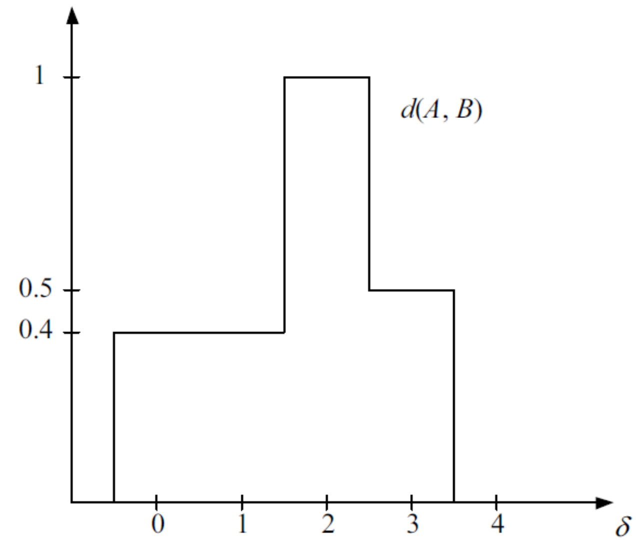
$$A = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 0.3)\}$$

$$B = \{(2, 0.4), (3, 0.4), (4, 1)\}$$

$\delta \in d(A, B)$	$a \in A$	$b \in B$	$\mu_A(a)$	$\mu_B(b)$	Min	Max, $\mu(\delta)$, $d(A, B)$
0	2	2	1.0	0.4	0.4	0.4
	3	3	0.3	0.4	0.3	
1	1	2	0.5	0.4	0.4	0.4
	2	3	1.0	0.4	0.4	
	3	2	0.3	0.4	0.3	
	3	4	0.3	1.0	0.3	
2	1	3	0.5	0.4	0.4	1.0
	2	4	1.0	1.0	1.0	
3	1	4	0.5	1.0	0.5	0.5

Zbiór rozmytych odległości





Operacja implikacji

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\mu_{p \to q} = MAX(1 - \mu_p, \mu_q)$$

Nie sprzeczna

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$$

$$\mathrm{I}(1,0) = 0.$$

$$p \to q = \neg p \vee q$$

Modus ponens

$$\boxed{\frac{p, p \to q}{q}}$$

Przykład

JEŚLI (samochod p = nowy) *TO* (spalanie q = małe)

Zbiór podstawowy *P* zmiennej „samochod" przyjęty będzie w formie binarnej (nowy: p = l, stary: p = 0).
Podobnie zbiór podstawowy *Q* zmiennej „spalanie" (małe: q = l, duże: q - 0).

samochód
nowy: p = l,
stary: p = 0

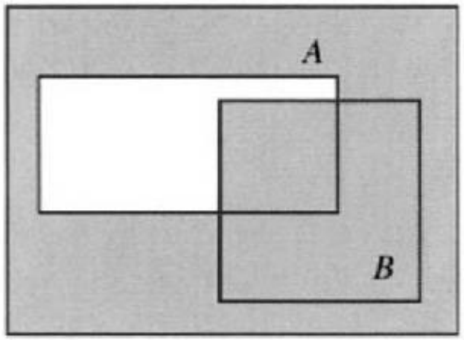
p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

spalanie
małe: q = l,
duże: q - *0*

$$\frac{p\,,p \to q}{q}$$

Zbiory

$$T : u \in \mathrm{U} \longrightarrow (0, 1) \qquad T(\mathrm{Y}) = 1 \quad \text{universe Y} \quad T(\emptyset) = 0$$



P : truth that $x \in \mathrm{A}$

Q : truth that $x \in \mathrm{B}$

if $x \in \mathrm{A}$, $T(\mathrm{P}) = 1$; otherwise, $T(\mathrm{P}) = 0$

if $x \in \mathrm{B}$, $T(\mathrm{Q}) = 1$; otherwise, $T(\mathrm{Q}) = 0$

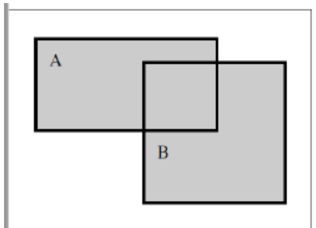
$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{A} \\ 0, & x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

P : x is in A

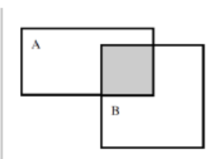
Q : x is in B

Podstawowe operacje

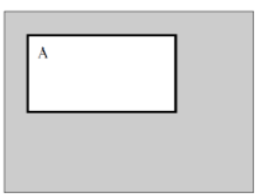
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P} : \text{truth that } x \in \mathrm{A} \\ \mathrm{Q} : \text{truth that } x \in \mathrm{B} \end{array}}$$



$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} :\ x \in \mathrm{A} \text{ or } x \in \mathrm{B} \Rightarrow T(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) = \max(T(\mathrm{P}), T(\mathrm{Q}))$



$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} : x \in \mathrm{A} \text{ and } x \in \mathrm{B} \Rightarrow T(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) = \min(T(\mathrm{P}), T(\mathrm{Q}))$



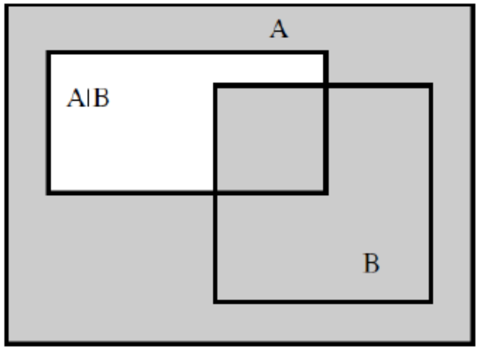
$$\mathrm{P} : x \in \mathrm{A},\ \overline{\mathrm{P}} : x \notin \mathrm{A}.$$

$$\text{If } T(\mathrm{P}) = 1,\ \text{then } T(\overline{\mathrm{P}}) = 0;\ \text{if } T(\mathrm{P}) = 0,\ \text{then } T(\overline{\mathrm{P}}) = 1$$

Implikacja

P : truth that $x \in$ A

Q : truth that $x \in$ B



$$(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) : x \notin \mathrm{A} \text{ or } x \in \mathrm{B}$$

$$T(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) = T(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q})$$

$$T(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) = \overline{T(\mathrm{P}) \cap T(\overline{\mathrm{Q}})}$$

$$(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) \equiv (\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{B} \text{ is true}) \equiv (\text{either ``not in A'' or ``in B''})$$

$$T(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) = T(\overline{\mathrm{P}} \vee \mathrm{Q}) = \max(T(\overline{\mathrm{P}}), T(\mathrm{Q}))$$

$$\overline{A \mid B} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}$$

P	**Q**	$\overline{\mathbf{P}}$	**P ∨ Q**	**P ∧ Q**	**P → Q**
T (1)	T (1)	F (0)	T (1)	T (1)	T (1)
T (1)	F (0)	F (0)	T (1)	F (0)	F (0)
F (0)	T (1)	T (1)	T (1)	F (0)	T (1)
F (0)	F (0)	T (1)	F (0)	F (0)	T (1)

Implikacja 1 dla dwóch przestrzeni

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y) \equiv \text{IF } A, \text{ THEN } B$$

IF $x \in A$ where $x \in X$ and $A \subset X$

THEN $y \in B$ where $y \in Y$ and $B \subset Y$

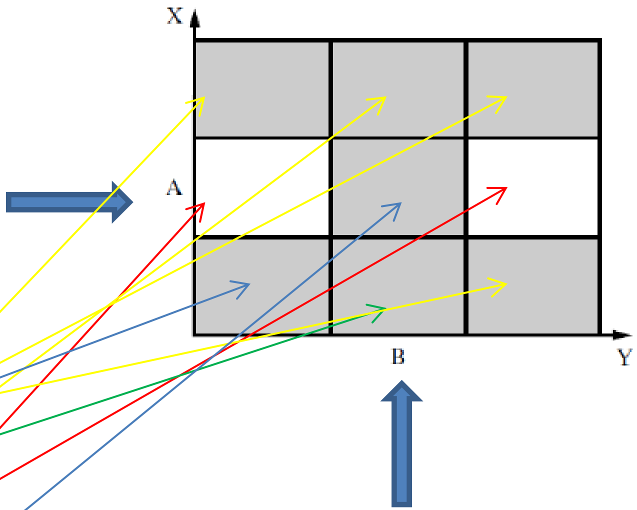
$$P \longrightarrow Q: \text{ IF } x \in A, \text{ THEN } y \in B,$$

$$P \longrightarrow Q \equiv \overline{A} \cup B$$

P : truth that $x \in A$

Q : truth that $y \in B$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Implikacja 2 dla dwóch przestrzeni

IF A, THEN B, ELSE C

IF A, THEN B, and IF $\overline{\mathrm{A}}$, THEN C

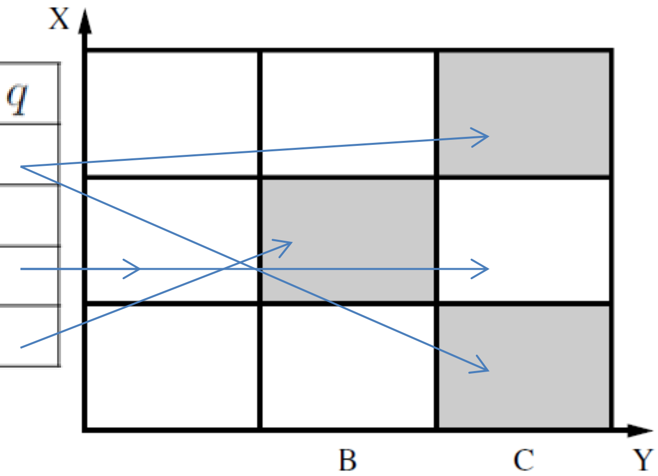
$(\mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\overline{\mathrm{P}} \longrightarrow \mathrm{S})$

$\mathrm{P}: \quad x \in \mathrm{A}, \mathrm{A} \subset \mathrm{X}$

$\mathrm{Q}: \quad y \in \mathrm{B}, \mathrm{B} \subset \mathrm{Y}$

$\mathrm{S}: \quad y \in \mathrm{C}, \mathrm{C} \subset \mathrm{Y}$

p	q	$p \rightarrow q$
$\boxed{0}$	0	1
$\boxed{0}$	1	1
1	0	0
1	1	1



IF A, THEN B, ELSE C $\equiv (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cup (\overline{\mathrm{A}} \times \mathrm{C}) = \mathrm{R} =$ relation on $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$

Modus Ponens

Modus ponendo ponens (sposób potwierdzający przez potwierdzenie) – tautologia rachunku zdań i analogiczny schemat wnioskowania dedukcyjnego.

Tautologia rachunku zdań mówi, że jeśli uznajemy prawdziwość poprzednika prawdziwej implikacji, to musimy uznać też prawdziwość jej następnika:

$$\boxed{(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B}$$

A	**B**	$\mathbf{A \to B}$	$\mathbf{(A \wedge (A \to B))}$	$\mathbf{(A \wedge (A \to B)) \to B}$	
0	0	1	0	1	
0	1	1	0	1	Tautology
1	0	0	0	1	
1	1	1	1	1	

Modus Tollens

Modus tollens (łac. modus tollendo tollens, sposób zaprzeczający przy pomocy zaprzeczenia) – wnioskowanie logiczne, reguła logiki mówiąca, że jeśli zaakceptujemy, że z X wynika Y oraz że Y jest fałszywe, to musimy zaakceptować też fałszywość X

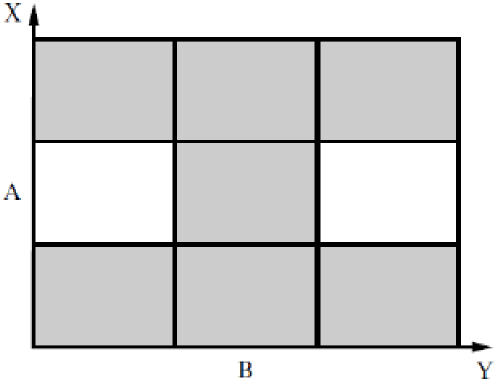
$$(\overline{B} \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow \overline{A}$$

A	**B**	$\overline{\mathbf{A}}$	$\overline{\mathbf{B}}$	$\mathbf{A \rightarrow B}$	$(\overline{\mathbf{B}} \wedge (\mathbf{A \rightarrow B}))$	$(\overline{\mathbf{B}} \wedge (\mathbf{A \rightarrow B})) \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	0	1	Tautology
1	0	0	1	0	0	1	
1	1	0	0	1	0	1	

Wnioskowanie dedukcyjne 1

$\boxed{\text{IF A, THEN B,}}$

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)$$



$$\boxed{\chi_R(x, y) = \max[(\chi_A(x) \wedge \chi_B(y)), ((1 - \chi_A(x)) \wedge 1)]}$$

$$(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B \quad (\textit{modus ponens})$$

$\boxed{A'}$ $\boxed{\text{IF } A', \text{ THEN } B'}$

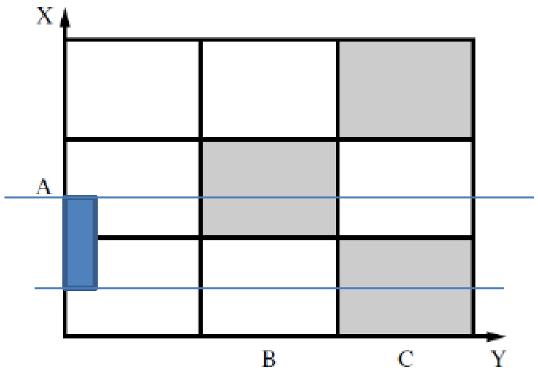
$$\boxed{B' = A' \circ R = A' \circ ((A \times B) \cup (\overline{A} \times Y))}$$

$\circ$ denotes the composition operation

Wnioskowanie dedukcyjne 2

IF A, THEN B, ELSE C

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times C)$$



$$(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B \quad (\textit{modus ponens})$$

$$\boxed{A'}$$

IF $A' \subset A$, THEN $y = B$

IF $A' \subset \overline{A}$, THEN $y = C$

IF $A' \cap A \neq \emptyset$, $A' \cap \overline{A} \neq \emptyset$, THEN $y = B \cup C$

Przykład 1

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \qquad A = \left\{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0}{4}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6}\right\} \quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\text{IF } A, \text{ THEN } B} \qquad \boxed{R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}\right\}$$

$$Y = \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right\}$$

$$\overline{A} \times Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Wnioskowanie dedukcyjne 2

IF A, THEN B, ELSE C

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times C) \Rightarrow (P \to Q) \wedge (\overline{P} \to S)$$

$$(P \longrightarrow Q) \wedge (\overline{P} \longrightarrow S)$$

$P: \quad x \in A, A \subset X$

$Q: \quad y \in B, B \subset Y$

$S: \quad y \in C, C \subset Y$

$$\chi_R(x, y) = \max[(\chi_A(x) \wedge \chi_B(y)), ((1 - \chi_A(x)) \wedge \chi_C(y))]$$

Przykład 2

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \qquad A = \left\{\tfrac{0}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{0}{4}\right\}$$

$$B = \left\{\tfrac{0}{1} + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{0}{5} + \tfrac{0}{6}\right\} \qquad Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \left\{\tfrac{0}{1} + \tfrac{0}{2} + \tfrac{0}{3} + \tfrac{0}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right\} \qquad Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\text{IF A, THEN B, ELSE C}}$$

$$\boxed{R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times C) \Rightarrow (P \to Q) \wedge (\overline{P} \to S)}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} \times C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Implikacja rozmyta

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$[0,1]^2 \rightharpoonup [0,1]$$

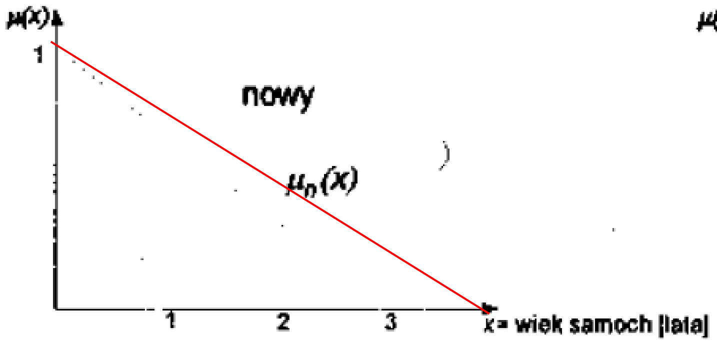
Nie sprzeczna

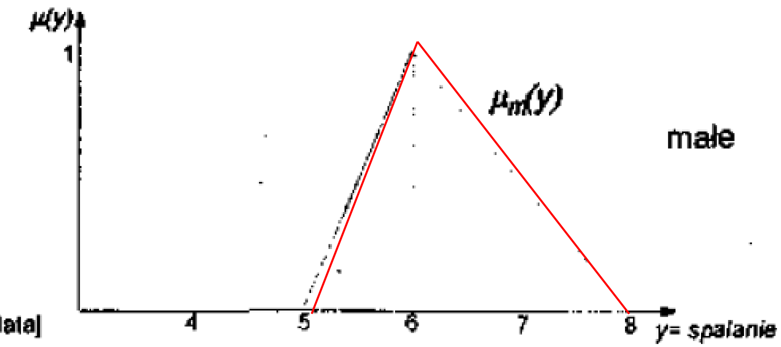
$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$$

$$\mathrm{I}(1,0) = 0.$$

Przykład

JEŚLI (wiek samochodu = nowy) *TO* (spalanie = małe)





operator implikacji Mamdaniego oparty na założeniu, że prawdziwość konkluzji nie może być wyższa niż stopień spełnia przesłanki

$$\mu_{A\to B}(x,y) = MIN(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

operator iloczynu algebraicznego *PROD*

$$\mu_{A\to B}(x,y) = \mu_A(x)\cdot \mu_B(y)$$

Kompozycja i zasada rozszerzenia Zadeha

$B \subseteq Y$

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$$

$$B = f(A) = \{(y, \mu_B(y))\} \text{ where } \mu_B(y) = \max_{x=f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

Kompozycja klasycznych zbiorów

$$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}, \quad R \subseteq A \times B$$

Kompozycja zbiorów rozmytych

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid \mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$
$$\text{or } \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(y)\}.$$

Kompozycja i zasada rozszerzenia Zadeha

Kompozycja klasycznych relacji

$$S \circ R = \{(x, z) \mid (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

where $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, and $S \circ R \subseteq A \times C$

Kompozycja relacji rozmytych

$$SR = S \circ R = \{((x, z), \mu_{SR}(x, z))\}$$

$$\mu_{SR}(x, z) = \max_{y} \min[\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)]\}$$

Kompozycja ciągłych zbiorów rozmytych

Spójnik (conjunction)

$$A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) * \mu_B(y) / (x, y)$$

$\boxed{*}$ - T norma

$$x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}, A \subset \mathrm{X}, \text{ and } B \subset \mathrm{Y}$$

Dyzjunkcja(disjunction)

$$A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) \dot{+} \mu_B(y) / (x, y)$$

$\boxed{\dot{+}}$ - T konorma (S-norma)

$$x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}, A \subset \mathrm{X}, \text{ and } B \subset \mathrm{Y}$$

Kompozycje relacji rozmytych

$$R \subseteq X \times Y$$

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

Max-min

$$R_1 \circ R_2 = \{((x, z), \mu_{R1 \circ R2}(x, z))\}$$

$$\mu_{R1 \circ R2}(x, z) = \max_y \min \left[\mu_{R1}(x, y), \mu_{R2}(y, z)\right]$$

$$= \bigvee_y \left[\mu_{R1}(x, y) \wedge \mu_{R2}(y, z)\right]$$

$$x \in X, y \in Y, z \in Z$$

$$R_1 \subseteq X \times Y, R_2 \subseteq Y \times Z$$

Kompozycje relacji rozmytych (cd)

Max-prod

$$R_1 \circ R_2 = \{((x, z), \mu_{R1 \circ R2}(x, z))\}$$

$$\mu_{R1 \circ R2}(x, z) = \max_y [\mu_{R1}(x, y) \bullet \mu_{R2}(y, z)]$$

$$x \in X, y \in Y, z \in Z$$

$$R_1 \subseteq X \times Y, R_2 \subseteq Y \times Z$$

Przykład

R: x i y są bliskie

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1	0.5	0	0
2	0.5	1	0.5	0
3	0	0.5	1	0.5
4	0	0	0.5	1

R: mała liczba

x	1	2	3	4
$\mu_R(x)$	1	0.6	0.2	0

Przykład (cd)

$$R(x, y) = \text{Approximately\_Equal}(x, y)$$
$$R(x) = \text{Small}(x)$$

$$R(y) = R(x) \circ R(x, y)$$
$$\mu_R(y) = \bigvee_x [\mu_R(x) \wedge \mu_R(x, y)]$$

Input: R(x)

Rule: R(x, y)

Result: R(y) ⇒

Jeżeli x jest małą liczbą, a liczby x i y są bliskie, to jaką będzie liczba y?

y	1	2	3	4
$\mu_R(y)$	1	0.6	0.5	0.2

Przykład (cd)

X	1	2	3	4
$\mu_R(x)$	0	1	0	0

	$x \backslash y$	1	2	3	4
1 0	1	1	0.5	0	0
2 1	2	0.5	1	0.5	0
3 0	3	0	0.5	1	0.5
4 0	4	0	0	0.5	1

R: x i y są bliskie

$$R(y) = R(x) \circ R(x, y)$$

$$\mu_R(y) = \bigvee_x [\mu_R(x) \wedge \mu_R(x, y)]$$

Przykład (cd)

Dla przesłanki

X	1	2	3	4
$\mu_R(x)$	0	1	0	0

y	1	2	3	4
$\mu_R(y)$	0.5	1	0.5	0

mamy wniosek

Typy implikacji

Goguen [28]	$I_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \le y \\ y/x, & \text{if } x > y \end{cases}$
Early Zadeh [101]	$I_m(x,y) = \max(1-x, \min(x,y))$
Standard Strict-Star [59]	$I_{sg}(x,y) = \min(I_s(x,y), I_g(1-x, 1-y))$
Standard Star-Strict [59]	$I_{gs}(x,y) = \min(I_g(x,y), I_s(1-x, 1-y))$
Standard Star-Star [59]	$I_{gg}(x,y) = \min(I_g(x,y), I_g(1-x, 1-y))$
Standard Strict-Strict [59]	$I_{ss}(x,y) = \min(I_s(x,y), I_s(1-x, 1-y))$
Willmott [92]	$I_\sharp(x,y) = \min(\max(1-x, y), \max(x, 1-x), \max(y, 1-y))$
Standard Sharp [59]	$I_\Box(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < 1 \text{ or } y = 1 \\ 0, & \text{if } x = 1 \text{ and } y < 1 \end{cases}$
Wu1 [93]	$I_{1b}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \le y \\ \min(1-x, y), & \text{if } x > y \end{cases}$
Wu2 [93]	$I_{1e}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < y \\ y, & \text{if } x \ge y \end{cases}$
Yager [94]	$I_E(x,y) = y^x$

Name and symbol	Definition
Kleene-Dienes [42] [17]	$I_b(x,y) = \max(1-x, y)$
Reichenbach [70]	$I_r(x,y) = 1 - x + xy$
Most Strict [44]	$I_M(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 0 \\ y, & \text{if } x > 0 \end{cases}$
Largest [44]	$I_{LS}(x,y) = \begin{cases} y, & \text{if } x = 1 \\ 1-x, & \text{if } y = 0 \\ 1, & \text{if } x < 1 \text{ and } y > 0 \end{cases}$
Least Strict [44]	$I_{LR}(x,y) = \begin{cases} y, & \text{if } x = 1 \\ 1, & \text{if } x < 1 \end{cases}$
Łukasiewicz [45]	$I_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(1-x+y, 1)$
R_0 [23]	$(I_{(\min_0)})_N(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y \\ \max(N(x), y), & \text{if } x > y \end{cases}$
Gödel [27]	$I_g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \leq y \\ y, & \text{if } x > y \end{cases}$
Weber [90]	$I_{WB}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < 1 \\ y, & \text{if } x = 1 \end{cases}$

REGUŁY WNIOSKOWANIA W LOGICE ROZMYTEJ w języku nieprecyzyjnym

Reguły, których **przesłanki** lub **wnioski** wyrażone są **w języku zbiorów rozmytych**.

- Reguły pochodzące od ekspertów zwykle wyrażone są w języku nieprecyzyjnym.
- Zbiory rozmyte pozwalają przełożyć ten język na konkretne wartości liczbowe.

Praca systemu decyzyjnego opartego na logice rozmytej zależy od **definicji reguł rozmytych** w bazie reguł.

Reguły rozmyte

Wiedzę potoczną można często zapisać w naturalny sposób za pomocą reguł rozmytych.

Jeśli zm. lingw-1 = term-1 i zm. lingw-2 = term-2

to zm. lingw-3 = term-3

Przykład.

Jeśli Temperatura = zimno i cena ogrzewania = niska

to grzanie = mocno

Co oznacza reguła rozmyta:
Jeśli *x* jest A to *y* jest B ?

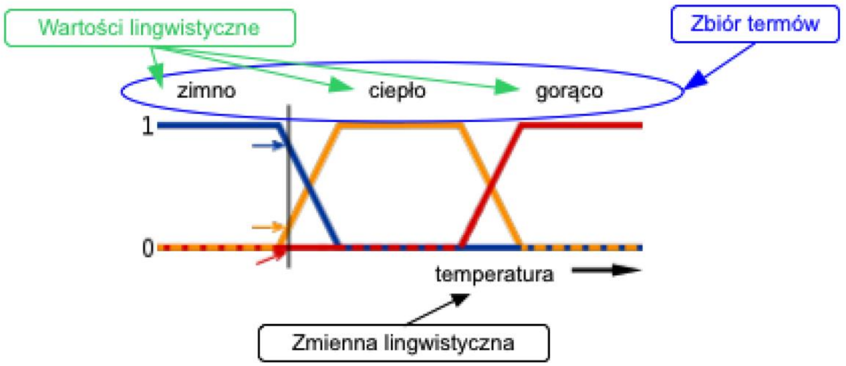
Korelacja A i B, lub implikacja A =>B, czyli (not A or B).

Zmienne lingwistyczne

Zmienna lingwistyczna to wyrażone w języku naturalnym określenie pewnej wielkości(wejściowej, wyjściowej, parametru, zmiany stanu). Przykładami mogą być: ciśnienie, temperatura, prędkość, odległość.

Wartość zmiennej lingwistycznej to dana jakościowa określana najczęściej w języku naturalnym. Przykłady to: {małe, średnie, duże}, {niski, wysoki}, {bardzo tani, tani, przystępny, drogi, bardzo drogi} - **termy lingwistyczne**.

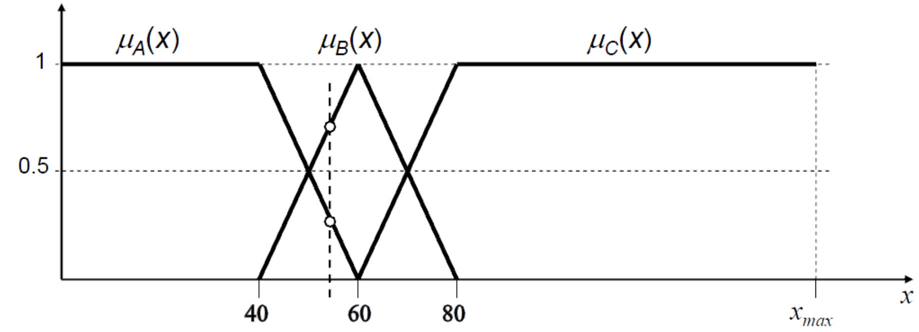
Termy są zbiory rozmyte.



Przykłady

prędkość samochodu:

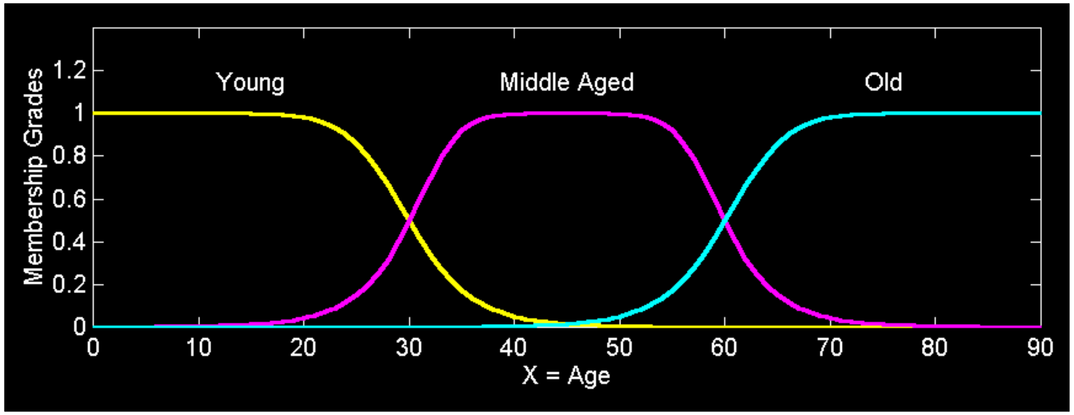
{ Mała *(A)*, Średnia *(E)*,*Duża (C)* }



$$\boldsymbol{x=55} \quad \Rightarrow \mu_A(x) = 0.25, \quad \mu_B(x) = 0.75, \quad \mu_C(x) = 0$$

Temperatura: { zimno, ciepło, gorąco}

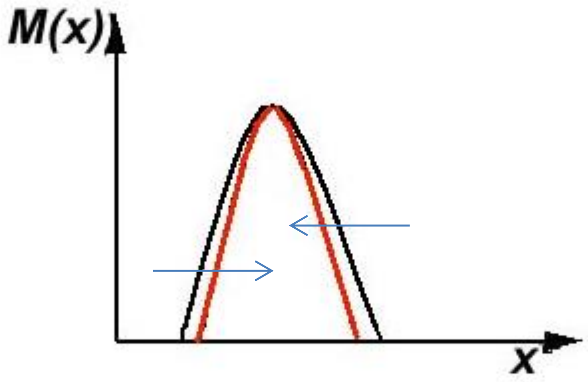
Wiek: { młody, średni, stary}



Operacje na zmiennych lingwistycznych

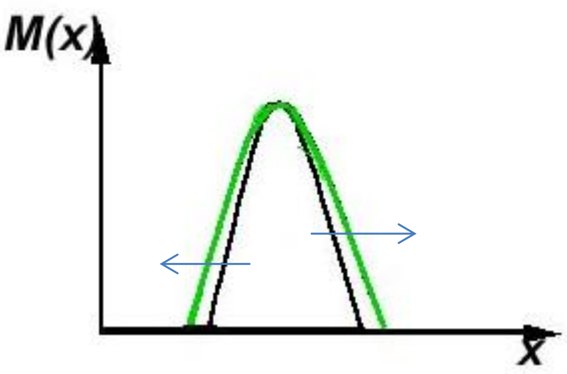
Koncentracja: Con(A) = A^2

$$\mu_{CON_A}(x) = \mu_A^2(x)$$



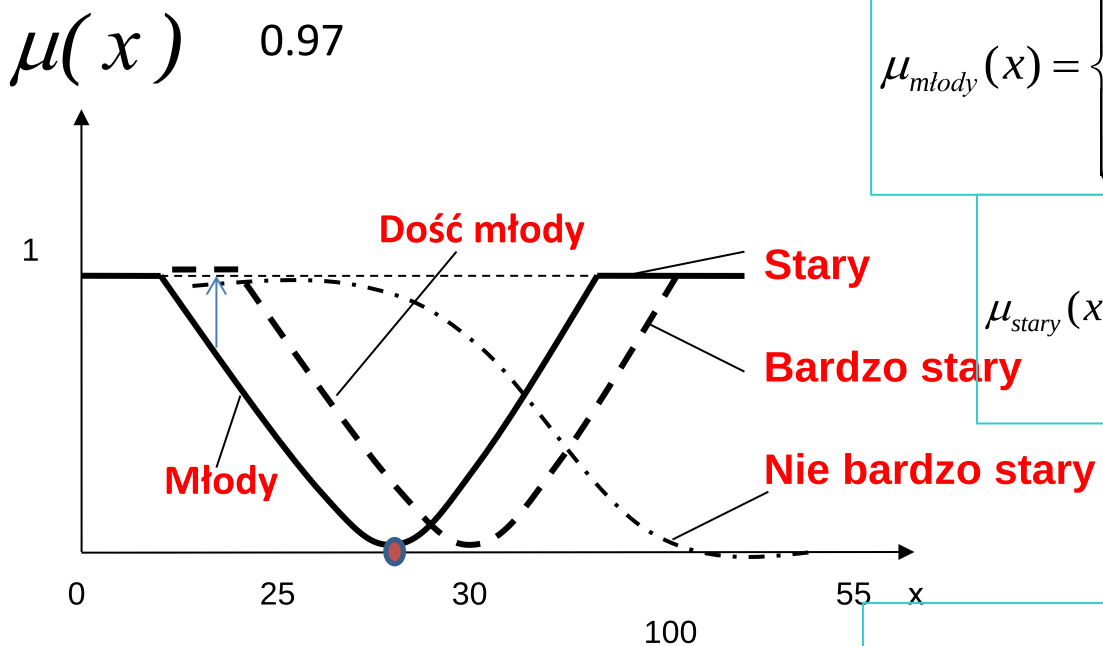
Spłaszczenie: Dil(A) = $A^{0.5}$

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$$



Przykład

>> 0.9^0.25
0.97



$$\mu_{młody}(x)=\begin{cases}1, & dla \quad 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^2, & dla \quad 25\le x\le 100\end{cases}$$

$$\mu_{stary}(x)=\begin{cases}0, & dla \quad 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^2\right]^{-1}, & dla \quad 50\le x\le 100\end{cases}$$

$$\text{"}dość\ A\text{"}=\left\{(x,\mu_A(x)^{0.25}\right\},\quad x\in X$$

$$\mu_{bardzostary}(x)=\begin{cases}0, & dla \quad 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2}, & dla \quad 50\le x\le 100\end{cases}$$

$$\text{"}bardzo\ A\text{"}=CON(CON(A))=\left\{(x,\mu_A^4(x)\right\},\quad x\in X$$

$$\mu_{dość\,młody}(x)=\begin{cases}1, & dla \quad 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{0.5}, & dla \quad 25\le x\le 100\end{cases}$$

Reguły rozmyte

Reguły mają postać **IF…AND…THEN**. np.:

IF a is $A1$ **AND** b is $B1$ **THEN** c is $C1$

IF a is $A2$ **AND** b is **NOT** $B2$ **THEN** c is $C2$

gdzie:

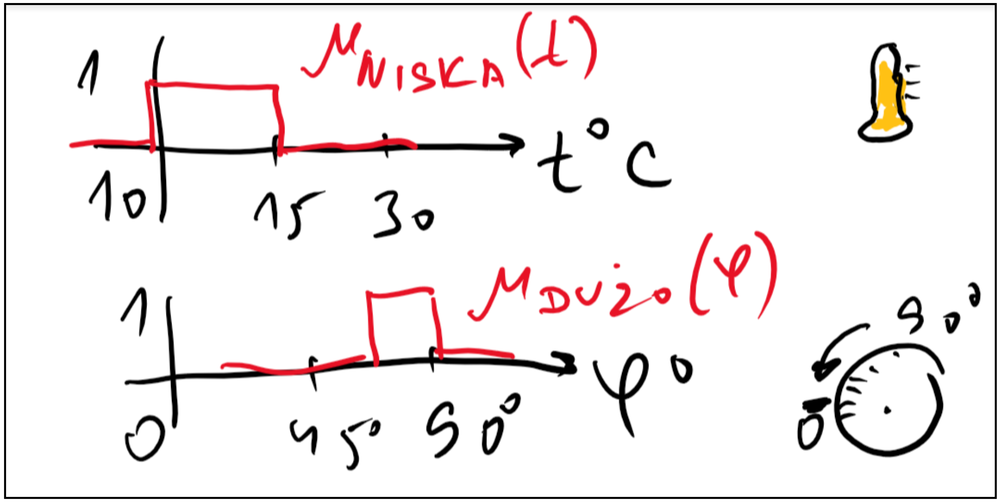
a, b, c – zmienne lingwistyczne,

$A1, \ldots, C2$ – zbiory rozmyte.

Różnice w porównaniu z klasycznymi regułami IF-THEN

- Wykorzystanie zmiennych opisujących **zbiory rozmyte**;
- Występowanie mechanizmu określającego **stopień przynależności** elementu do zbioru;
- Wykorzystanie **operacji na zbiorach rozmytych**.

Implikacja binarna (przykład)

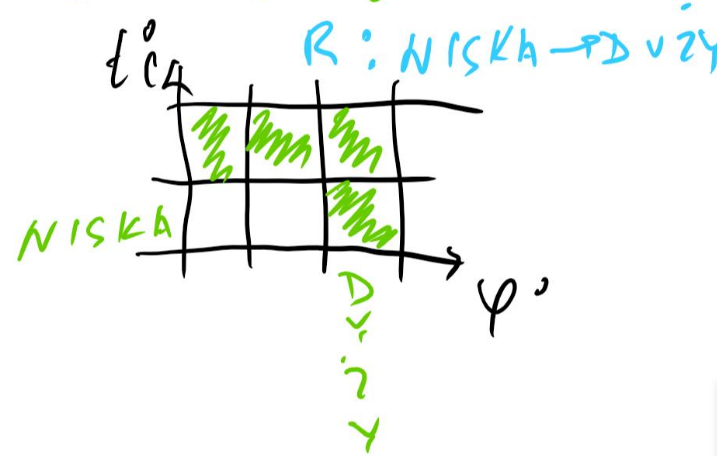


IF A, THEN B,

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y)$$

t°C \ φ°	0	45	70 (DUŻY)	90 (DUŻY)
10 (NISKA)	0	0	1	1
15 (NISKA)	0	0	1	1
30	1	1	1	1

jeżeli t jest NISKA
to kąt jest DUŻY



Kompozycja relacji binarnej (przykład)

$(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B$ (*modus ponens*)

$\boxed{A'}$ $\boxed{\text{IF } A', \text{ THEN } B'}$

$$\boxed{B' = A' \circ R = A' \circ ((A \times B) \cup (\bar{A} \times Y))}$$

$$R(y) = R(x) \circ R(x, y)$$

$$\mu_R(y) = \bigvee_x [\mu_R(x) \wedge \mu_R(x, y)]$$

$t^{\circ *} \circ$ (NISKA → DUŻY)

$$\begin{array}{c} t^{\circ *} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 15 \\ 30 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{c|cccc} t^{\circ}C \backslash \varphi^{\circ} & 0 & 45 & 70 & 90 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 30 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \varphi^{*}$$

0
0
1

1 1 1 1

Rozmyta reguła wnioskowania

Modus ponens

Przesłanka:	***x*** *jest* ***A'***
Implikacja:	*Jeśli* ***x*** *jest* ***A*** → ***y*** *jest* ***B***
Wniosek:	***y*** *jest* ***B'***

Ponieważ $A \neq A'$ - wniosek jest inny niż byłby w przypadku reguły nierozmytej.

Zbiór rozmyty ***B'*** jest określony przez złożenie zbioru rozmytego ***A'*** oraz implikacji $A \Rightarrow B$:

$$\boxed{B' = A' \circ (A \to B)}$$

$$\boxed{\mu_{B'}(x) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \{ \mu_{A'}(x) \overset{T}{*} \mu_{A \to B}(x, y) \}}$$

Wyznaczanie funkcji przynależności implikacji rozmytej $\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)}$

Wyznaczanie funkcji $\mu_{A\to B}(x,y)$
gdy $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(y)$ są znane:

1. Reguła Mamdaniego:

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)=\min[\mu_A(x),\mu_B(y)]}$$

2. Reguła Larsena:

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)}$$

3. Reguła Łukasiewicza:

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)=\min\left[1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\right]}$$

4. Reguła Zadeha:

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)=\max\left\{\min\left[\mu_A(x),\mu_B(y)\right],1-\mu_A(x)\right\}}$$

$$R_C = A\times B = \int_{X\times Y}\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\,/\,(x,y)$$

$$R_P = A\times B = \int_{X\times Y}\mu_A(x)\bullet\mu_B(y)\,/\,(x,y)$$

Ł

$$A\times B=\int_{X\times Y}\mu_A(x)*\mu_B(y)/(x,y)$$

Z

Przykład

If temperature is high, then humidity is fairly high.

Jeśli temperatura jest wysoka, wilgotność jest dość wysoka.

$$A = \text{“high”}, \qquad A \subseteq T$$

t	20	30	40
$\mu_A(t)$	0.1	0.5	0.9

$$B = \text{“fairly high”}, \quad B \subseteq H$$

h	20	50	70	90
$\mu_B(h)$	0.2	0.6	0.7	1

Przykład (cd)

$$R(t, h): \text{If } t \text{ is } A, \text{ then } h \text{ is } B$$

mamy

$$R(t): t \text{ is } A$$
$$R(h): h \text{ is } B$$

Trzeba obliczyć

$$R(t, h): R(t) \rightarrow R(h)$$

Przykład (cd)

Mamdani

$$R_C(t, h) = A \times B = \int \mu_A(t) \wedge \mu_B(h) \,/\, (t, h)$$

t \ h	20	50	70	90
20	0.1	0.1	0.1	0.1
30	0.2	0.5	0.5	0.5
40	0.2	0.6	0.7	0.9

$\mu_{R_C}(30,\ 20) = 0.2$ from $\mu_A(30) = 0.5$ and $\mu_B(20) = 0.2$

Przykład (cd)

Przesłanka "Temperature is fairly high"

R(t): "t is A′" where A′ = "fairly high"

$A' \subseteq T$

A'=Con(*A*) = A^2

t	20	30	40
$\mu_{A'}(t)$	0.01	0.25	0.81

A = "high", $A \subseteq T$

t	20	30	40
$\mu_A(t)$	0.1	0.5	0.9

Przykład (cd)

kompozycja

$$R(h) = R(t) \circ R_C(t, h)$$

max-min composition

h	20	50	70	90
$\mu_{B'}(h)$	0.2	0.6	0.7	0.81

Przykład

Przesłanka: ***Prędkość samochodu*** *jest* ***duża***

Implikacja: *Jeśli* ***prędkość samochodu*** *jest* ***bardzo duża*** $\rightarrow$ ***poziom hałasu*** *jest* ***wysoki***

Wniosek: ***Poziom hałasu*** *jest* ***średniowysoki***

Zmienne lingwistyczne:

- x – ***prędkość samochodu***
- y – ***poziom hałasu***

Zbiór wartości zmiennych lingwistycznych:

x: T1 = {„mała", „średnia", „duża", „bardzo duża”}

y: T2= {„mały", „średni", „średniowysoki", „wysoki”}

Przykład

Do każdego elementu zbiorów $T1$ i $T2$ można przyporządkować zbiór rozmyty o założonej przez nas funkcji przynależności.

Tu:

A – „prędkość samochodu jest bardzo duża”;

A' – „prędkość samochodu jest duża”;

B – „poziom hałasu jest wysoki”;

B' – „poziom hałasu jest średniowysoki”.

Rozmyta baza wiedzy

MIMO system reguł $R = \{R^1_{MIMO}, R^2_{MIMO}, \ldots, R^n_{MIMO}\}$

R^i_{MIMO}

If x is A_i and … , and y is B_i, then z_1 is C_i, …, z_q is D_i

przesłanka $A_i \times \ldots \times B_i \subseteq U \times \ldots \times V$

Wniosek-suma aktywności $(z_1 + z_2 + \ldots + z_q)$

$$R^i_{MIMO} : (A_i \times \ldots \times B_i) \rightarrow (z_1 + \ldots + z_q)$$

Dekompozycja bazy reguł

$$R = \{\bigcup_{i=1}^{n} R_{MIMO}^{i}\}$$

$$= \{\bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to (z_1 + \cdots + z_q)]\}$$

$$= \{\bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_1],$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_2], \ldots,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_q]\}$$

$$= \{\bigcup_{k=1}^{q} \bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_k]\}$$

$$= \{\bigcup_{k=1}^{q} RB_{MISO}^{k}\} \qquad where\ RB_{MISO}^{k} = \bigcup_{i=1}^{n} [(A_i \times \cdots \times B_i) \to z_i]$$

$$= \{RB_{MISO}^{1}, RB_{MISO}^{2}, \cdots, RB_{MISO}^{k}, \cdots, RB_{MISO}^{q}\}$$

Dekompozycja bazy reguł (cd)

MISO system

$$R = \{RB^1_{MISO}, RB^2_{MISO}, \cdots, RB^k_{MISO}, \cdots, RB^q_{MISO}\}$$

$$RB^k_{MISO}$$

If x is A_i and … , and y is B_i then z_k is C_i, for i = 1, 2, … , n

Schematy wnioskowania

Zastosowanie zbiorów rozmytych umożliwia stworzenie **rozmytego modelu systemu**, reprezentującego istotne cechy za pomocą aparatu teorii zbiorów rozmytych. Najważniejszą cechą takich systemów jest to, że ich podstawą jest pojęcie **kodowania rozmytego informacji**. Systemy rozmyte operują na zbiorach rozmytych zamiast na liczbach, co umożliwia uogólnienie informacji.

Schemat takiego modelowania polega na **przetworzeniu zmiennych ilościowych na pojęcia lingwistyczne, następnie modelowaniu systemu na podstawie bazy reguł, która może odzwierciedlać naszą wiedzę o systemie, a na koniec przetworzeniu wyjść z powrotem na zmienne ilościowe**.

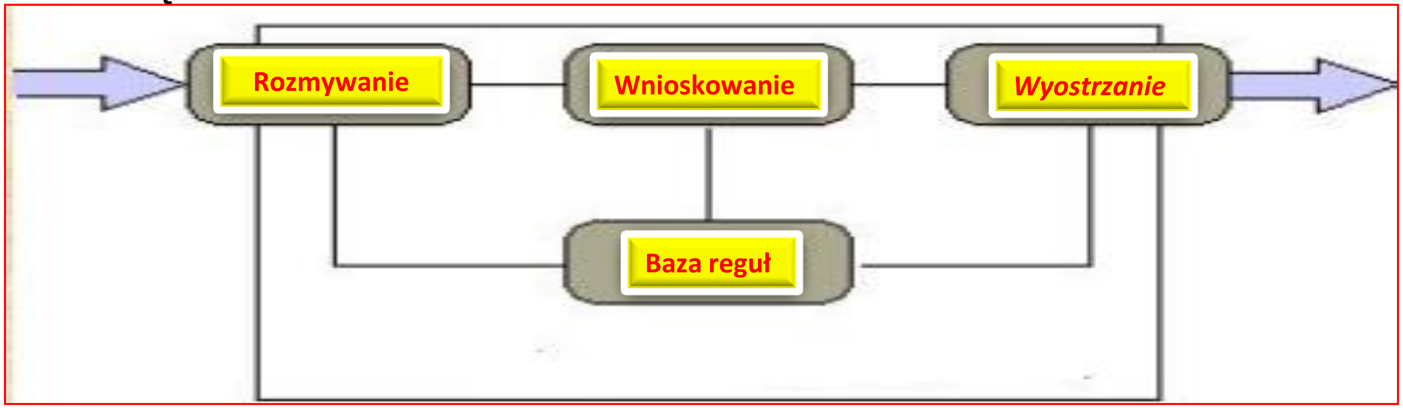
Elementy systemu

Rozmywanie (fuzyfikacja) - operacja przekształcająca sygnały wejściowe z dziedziny ilościowej na wielkości jakościowe reprezentowane przez zbiory rozmyte na podstawie określających je funkcji przynależności.

Wnioskowanie rozmyte - operacja wyznaczania w dziedzinie jakościowej wartości wyjść na podstawie wejść za pomocą zbioru reguł rozmytych.

Baza reguł - reprezentuje wiedzę jakościową o systemie w postaci zbioru reguł rozmytych w postaci wyrażeń **jeśli-to**.

Wyostrzanie (defuzyfikacja) - operacja przekształcająca sygnały wyjściowe systemu z dziedziny jakościowej na ilościową.



Rozmyty układ sterowania

Input: u is A' and v is B'

R_1: if u is A_1 and v is B_1 then is w is C_1

else R_2: if u is A_2 and v is B_2 then is w is C_2

•••

•••

else R_n: if u is A_n and v is B_n then is w is C_n

consequence: w is C'

$\boxed{R_i\text{: If } u \text{ is } A_i \text{ and } v \text{ is } B_i \text{ then } w \text{ is } C_i}$

Realizacja za pomocą implikacji rozmytej

R_i: (A_i and B_i) $\rightarrow C_i$ or

$$\mu_{R_i} = \mu_{(A_i \; and \; B_i \rightarrow C_i)}(u, v, w)$$

$$= [\mu_{A_i}(u) \; and \; \mu_{B_i}(v)] \rightarrow \mu_{C_i}(w)$$

Relacja w przestrzeni $U \times V \times W$

Wnioskowanie rozmyte

$$\text{R}_1\text{: if } v \text{ is A then } w \text{ is C}$$

$$\text{Input: } v \text{ is A}'$$

$$\text{Result: C}'$$

$$\text{A} \subset \text{U, C} \subset \text{W, } v \in \text{U, and } w \in \text{C}$$

Wnioskowanie jako relacja

$$\text{R}_1 : \text{A} \rightarrow \text{C} \quad \text{or} \quad \text{R}_1 = \text{A} \times \text{C}$$

$$\text{R}_1 \subset \text{U} \times \text{W}$$

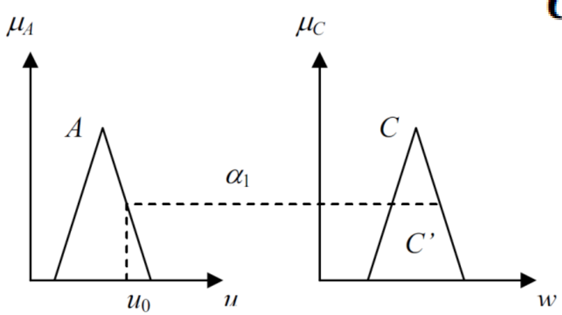
$$\boxed{\text{C}' = \text{A}' \circ \text{R}_1}$$

Wnioskowanie.Singleton na wejściu

$$R_1\text{: If } u \text{ is } A \text{ then } w \text{ is } C$$

$$\text{Or} \quad R_1: A \rightarrow C$$

$$\alpha_1 = \mu_A(u_0) \qquad \mu_{C'}(w) = \alpha_1 \wedge \mu_C(w)$$



Dowód

$$\mu_{R_1}(u, w) = \mu_A(u) \rightarrow \mu_C(w)$$

$$C' = A' \circ (A \rightarrow C) = A' \circ R_1$$

Gdy $A' = u_0$ $\qquad \alpha_1 = \mu_A(u_0)$

$$\mu_{C'}(\mathrm{w}) = \mu_0 \circ (\mu_A(u) \rightarrow \mu_C(w))$$
$$= \mu_A(u_0) \rightarrow \mu_C(w)$$

$$\mu_{C'}(w) = \min[\mu_A(u_0), \mu_C(w)]$$
$$= \alpha_1 \wedge \mu_C(w) \quad \textit{where } \alpha_1 = \mu_A(u_0)$$

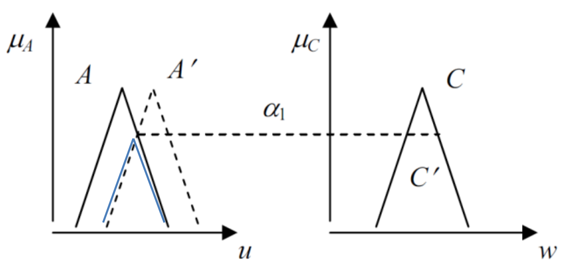
Wnioskowanie. Zbiór rozmyty na weiściu

$R_1: A \rightarrow C$

$$\mu_{C'}(w) = \alpha_1 \wedge \mu_C(w)$$

$$\alpha_1 = \max_u \left[\mu_{A'}(u) \wedge \mu_A(u)\right]$$

A'



Dowód

$$\begin{aligned} C' &= A' \circ (A \rightarrow C) \\ &= A' \circ (A \times C) \\ &= A' \circ R_1 \end{aligned}$$

$$\mu_{R_1}(u, w) = \min[\mu_A(u), \mu_C(w)] = [\mu_A(u) \wedge \mu_C(w)]$$

$$\begin{aligned} \mu_{C'}(w) &= \{\mu_{A'}(u) \circ (\mu_A(u) \rightarrow \mu_C(w))\} = \{\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_1}(u, w)\} \\ &= \max_u \{\mu_{A'}(u) \wedge \mu_{R_1}(u, w)\} \\ &= \max_u \{\mu_{A'}(u) \wedge [\mu_A(u) \wedge \mu_C(w)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{C'}(w) &= \max_u \{[\mu_{A'}(u) \wedge \mu_A(u)] \wedge \mu_C(w)\} \\ &= \max_u [\mu_{A'}(u) \wedge \mu_A(u)] \wedge \mu_C(w) \\ &= \alpha_1 \wedge \mu_C(w) \quad \textit{where } \alpha_1 = \max_u [\mu_{A'}(u) \wedge \mu_A(u)] \end{aligned}$$

Wnioskowanie dla całej bazy reguł

$$\mathrm{R}: \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{R_i}$$

$$\mathrm{R_i}: \mathrm{A_i} \rightarrow \mathrm{C_i} \qquad A'$$

$$C' = A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} A' \circ R_i = \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$$

Dowód

$$C' = A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i = A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \to C_i)$$

$$R_i = A_i \to C_i \quad or \quad R_i = A_i \times C_i \quad for\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\mu_{C'}(w) = \mu_{A'}(u) \circ \max_{u,w}[\mu_{R_1}(u,w),\ \mu_{R_2}(u,w),\ \cdots,\ \mu_{R_n}(u,w)]$$

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(w) &= \max_{u} \min_{u}\{\mu_{A'}(u),\ \max_{u,w}[\mu_{R_1}(u,w),\ \mu_{R_2}(u,w), \cdots, \mu_{R_n}(u,w)]\} \\ &= \max_{u} \max_{u,w}\{\min_{u}[\mu_{A'}(u),\ \mu_{R_1}(u,w)], \\ &\qquad \min[\mu_{A'}(u),\ \mu_{R_2}(u,w)], \cdots, \\ &\qquad \min[\mu_{A'}(u),\ \mu_{R_n}(u,w)]\}\end{aligned}$$

$$[\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_i}(u,w)] = \max_{u} \min_{u}[(\mu_{A'}(u),\ \mu_{R_i}(u,w)]$$

Dowód (cd)

$$\mu_{C'}(w) = \max_{u,w}\{[\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_1}(u,w)],$$

$$[\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_2}(u,w)], \cdots,$$

$$[\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_n}(u,w)]\}$$

$$\mu_{C'_i} = [\mu_{A'}(u) \circ \mu_{R_i}(u,w)]$$

$$C'_i = A' \circ R_i$$

Dowód (cd)

$$C' = [A' \circ R_1] \cup [A' \circ R_2] \cup \cdots \cup [A' \circ R_n]$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} A' \circ R_i$$

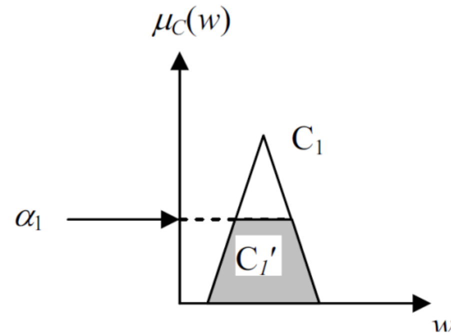
$$= \bigcup_{i=1}^{n} A' \circ (A_i \to C_i)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} C'_i$$

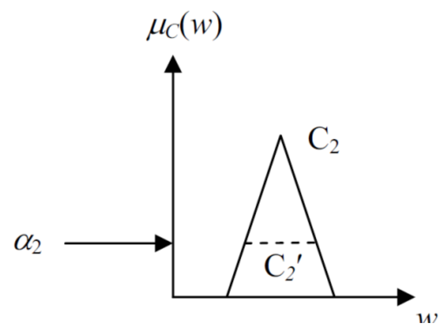
$$\mu_{C'}(w) = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{C'_i}$$

Przykład

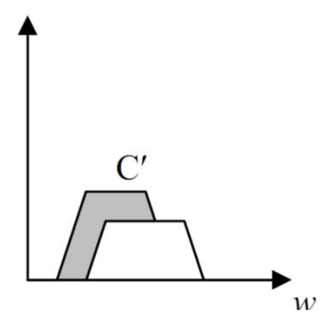
$R_1: A_1 \rightarrow C_1$



$R_2: A_2 \rightarrow C_2$



$$\mu_{C'}(w) = \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{V}}} \mu_{C_i'}$$



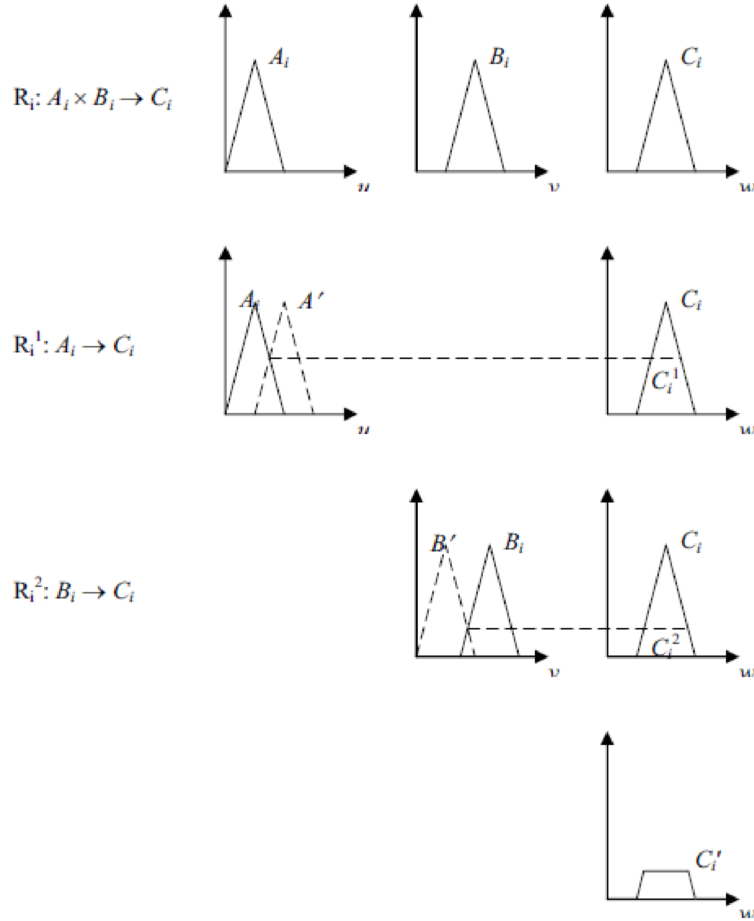
Wnioskowanie. Ogólna struktura

$$\mathrm{R}: \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{R_i}$$

$\mathrm{R_i}$: $\mathrm{A_i}$ and $\mathrm{B_i} \rightarrow \mathrm{C_i}$

$$C' = (A', B') \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A', B') \circ R_i = \bigcup_{i=1}^{n} C'_i$$

Przykład



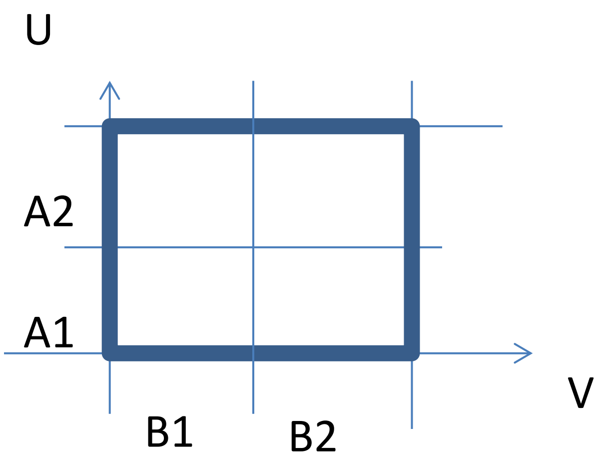
R_i: $A_i \times B_i \to C_i$
A_i
B_i
C_i
R_i^1: $A_i \to C_i$
A_i
A'
C_i
C_i^1
R_i^2: $B_i \to C_i$
B'
B_i
C_i
C_i^2
C_i'

Agregacja

$$\Re_1 : \text{if } x \text{ is } A_1 \text{ then } y \text{ is } C_1$$
$$\Re_2 : \text{if } x \text{ is } A_2 \text{ then } y \text{ is } C_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Re_n : \text{if } x \text{ is } A_n \text{ then } y \text{ is } C_n$$

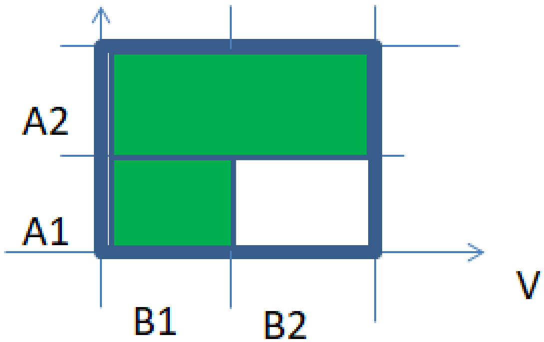
$$F(y) = \mathbf{Agg}(R_1(y), \dots, R_n(y))$$

Agregacja reguł

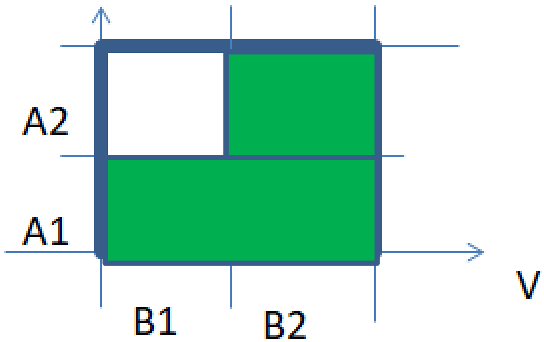


$R: U \to V$

$R1: A1 \to B1$



$R2: A2 \to B2$

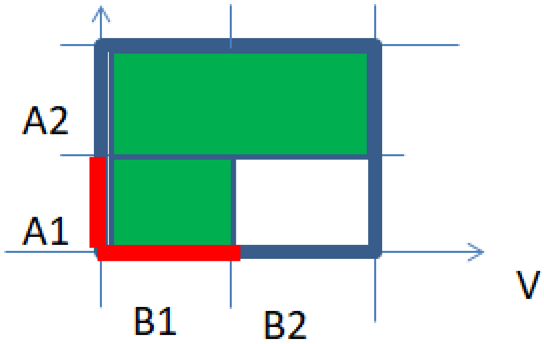


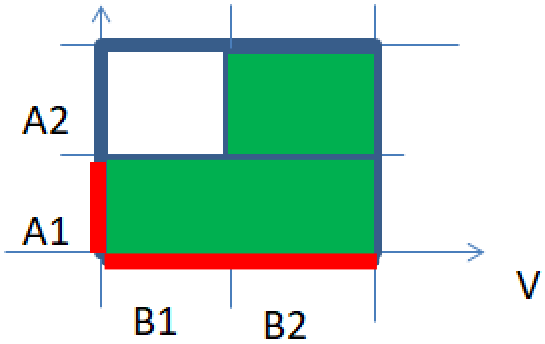
Agregacja reguł (cd)

Wnioskowanie dla przesłanki ***A1***

$$A1 \circ R1 = A1 \circ A1 \rightarrow B1$$
$$\overline{}$$
$$B1$$

$$A1 \circ R2 = A1 \circ A2 \rightarrow B2$$
$$\overline{}$$
$$V$$





$$Agg(A \circ R1, A \circ R2) = \min(B1, V) = B1$$

I) Conjunctive System of Rules

- Rules to be jointly satisfied.
- Using AND.
- Using Intersection.

$$y = y_1 \text{ AND } y_2 \text{ AND } y_3 \cdots \text{ AND } y_n$$

$$y = y_1 \cap y_2 \cap y_3 \cdots \cap y_n$$

$$\mu_y(y) = \min[\mu_{y_1}(y), \mu_{y_2}(y), \mu_{y_3}(y) \cdots \mu_{y_n}(y)]$$

II) Disjunctive System of Rules

- The satisfaction of at least one Rule.
- OR is used.

$$y = y_1 \text{ or } y_2 \text{ or } \cdots \text{ or } y_n$$

$$y = y_1 \cup y_2 \cup y_2 \cup y_3 \cdots \cup y_n$$

$$\mu_y(y) = \max[\mu_{y_1}(y), \mu_{y_2}(y), \mu_{y_3}(y) \cdots \mu_{y_n}(y)]$$

AGGREGATION OF RULES

- The rule-based system involves more than one rule.
- Aggregation of rules is the process of obtaining the overall consequents from the individual consequents provided by each rule.

- **1. Conjunctive system of rules:**

For a system of rules to be jointly satisfied, the rules are connected by "and" connectives. Here, the aggregated output, y, is determined by the fuzzy intersection of all individual ruleconsequents, y_i, where i=1ton, as

$$y = y_1 \text{ and } y_2 \text{ and } \ldots \text{ and } y_n$$

Or

$$y = y_1 \cap y_2 \cap y_3 \cap \cdots \cap y_n$$

This aggregated output can be defined by the membership function

$$\mu_y(y) = \min[\mu_{y_1}(y), \mu_{y_2}(y), \ldots, \mu_{y_n}(y)] \quad \text{for } y \in Y$$

12:41 / 21:24

• **2. Disjunctive system of rules**

In this case, the satisfaction of at least one rule is required. The rules are connected by "or" connectives. Here, the fuzzy union of all individual rule contributions determines the aggregated output, as

$$y = y_1 \text{ or } y_2 \text{ or } \dots \text{ or } y_n$$

Or

$$y = y_1 \cup y_2 \cup y_3 \cup \cdots \cup y_n$$

Again it can be defined by the membership function

$$\mu_y(y) = \max[\mu_{y_1}(y), \mu_{y_2}(y), \dots \mu_{y_n}(y)] \text{ for } y \in Y$$

rz (k)

14:19 / 21:24

Modele rozmyte z wnioskowaniem typu Mamdaniego

Ebrahim MAMDANI
University of London

Modele rozmyte oparte na wnioskowaniu typu Mamdaniego opierają się na bazie reguł i stosowaniu operatorów lingwistycznych. Jest to podejście najbardziej naturalne z punktu widzenia logiki rozmytej i tym samym jest szeroko stosowane. Wnioskowanie wg Mamdaniego jest wykorzystywane głównie **w układach regulacji**, gdzie reguły dają wyrażenia lingwistyczne strategii sterowania oparte na znajomości eksperckiej systemu i zdrowym rozsądku.

jeśli u_1 **jest** B_{11} **i** … **i** u_r **jest** B_{1r} **to** y **jest** Y_1
także
…
także
jeśli u_1 **jest** B_{m1} **i** … **i** u_r **jest** B_{mr} **to** y **jest** Y_m

Przykład

If x is A1 and y is B1 then z is C1
If x is A2 and y is B2 then z is C2

$$\mathrm{A}_1(x_0),\ \mathrm{A}_2(x_0),\ \mathrm{B}_1(y_0),\ \mathrm{B}_2(y_0)$$

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0),$$
$$\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0),$$

$$\mathrm{C}_1'(z) = \big(\alpha_1 \wedge \mathrm{C}_1(z)\big),$$
$$\mathrm{C}_2'(z) = \big(\alpha_2 \wedge \mathrm{C}_2(z)\big).$$

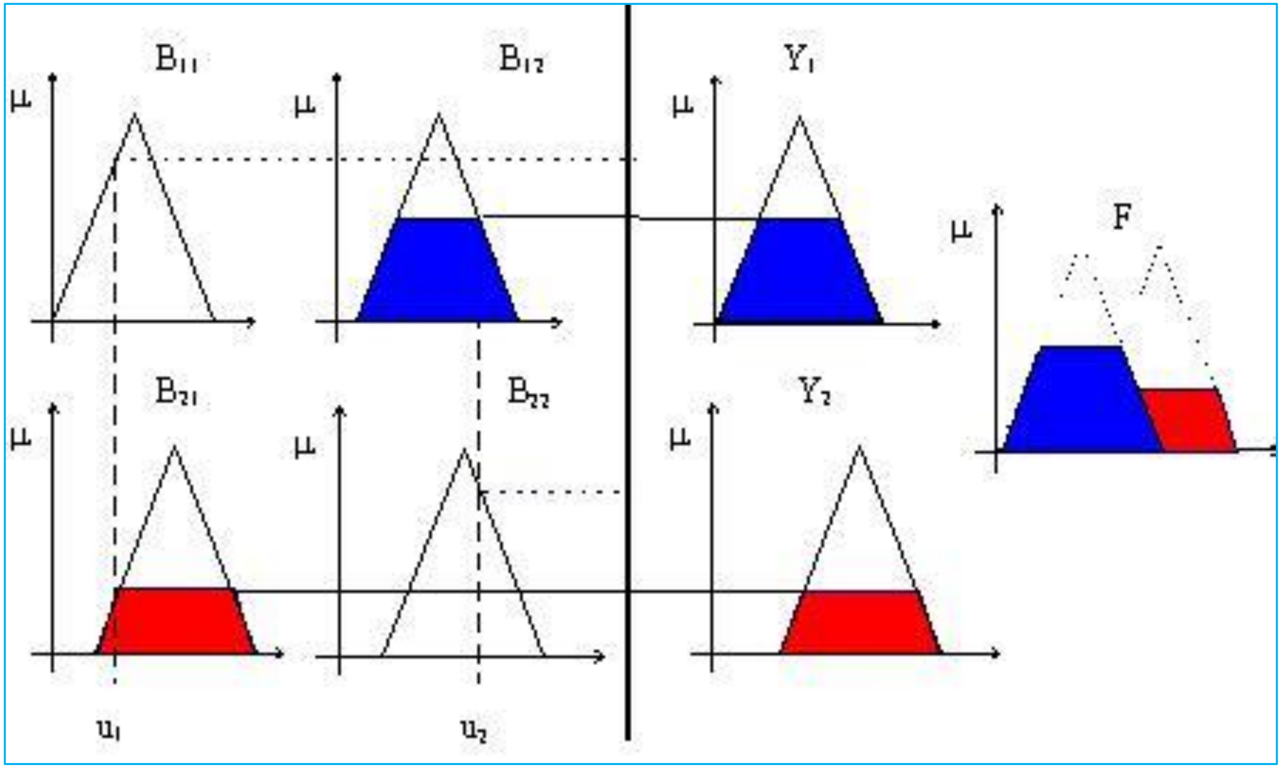
$$\mu_\Sigma(z) = \mathrm{C}(z) = \mathrm{C}_1'(z) \vee \mathrm{C}_2'(z) = \big(\alpha_1 \wedge \mathrm{C}_1(z)\big) \vee \big(\alpha_2 \wedge \mathrm{C}_2(z)\big).$$

min max

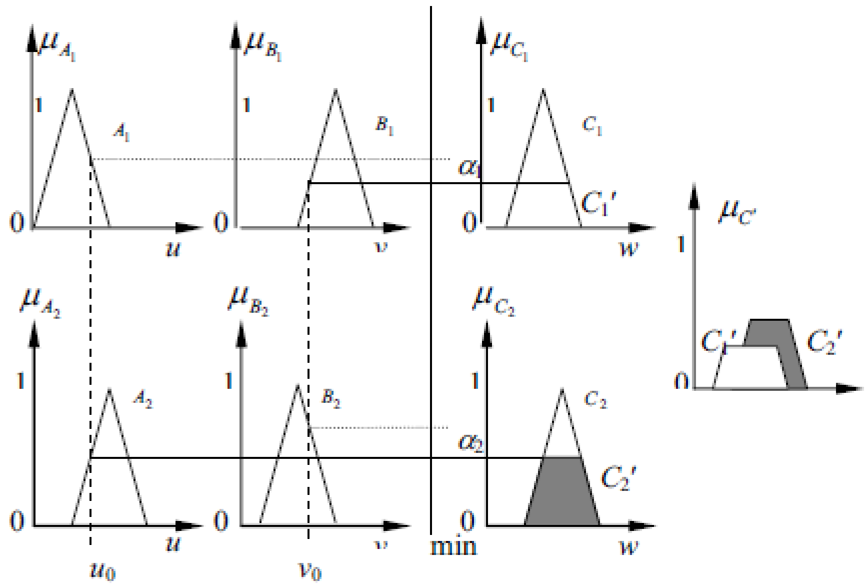
Wyjście modelu

Wyjście każdej reguły opisane jest etykietą lingwistyczną, a wyjście całego modelu wyznaczane jest przez **superpozycję wyjść poszczególnych reguł** w następujący sposób:

dla każdej reguły obliczana jest **siła jej odpalenia**:
wyznaczany jest zbiór rozmyty ***Fi*** wyprowadzany przez i-tą regułę:
przeprowadzana jest **agregacja powstałych zbiorów za pomocą operacji max**:



Singleton na wejściu



$$\mu_{C_i'}(w) = \alpha_i \wedge \mu_{C_i}(w)$$

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(w) &= \mu_{C_1'} \vee \mu_{C_2'} \\ &= [\alpha_1 \wedge \mu_{C_1}(w)] \vee [\alpha_2 \wedge \mu_{C_2}(w)]\end{aligned}$$

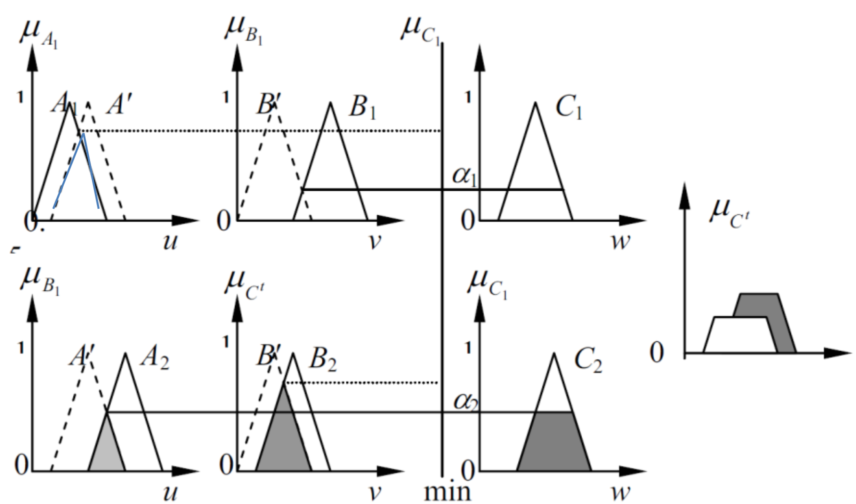
Zbiory rozmyte na wejściu

$$\mu_{C_i'}(w) = \alpha_i \wedge \mu_{C_i}(w)$$

$$where\ \alpha_i = \min[\max_u(\mu_{A'}(u) \wedge \mu_{A_i}(u)), \max_v(\mu_{B'}(v) \wedge \mu_{B_i}(v))]$$

$$\mu_{C'}(w) = \bigvee_{i=1}^{n}[\alpha_i \wedge \mu_{C_i}(w)] = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{C_i'}(w)$$

$$C' = \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$$



Modele Larsena

If x is A1 and y is B1 then z is C1
If x is A2 and y is B2 then z is C2

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0),$$
$$\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0),$$

$$\alpha_1 \mathrm{C}_1(z), \quad \alpha_2 \mathrm{C}_2(z).$$

$$\mu_\Sigma(z) = \mathrm{C}(z) = \big(\alpha_1 \mathrm{C}_1(z)\big) \vee \big(\alpha_2 \mathrm{C}_2(z)\big)$$

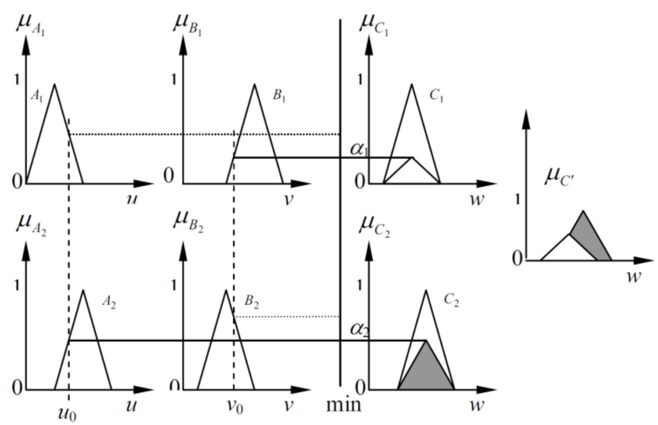
prod max

Singleton na wejściu

$$\mu_{C_i'}(w) = [\mu_{A_i}(u_0)\ and\ \mu_{B_i}(v_0)] \rightarrow \mu_{C_i}(w)$$
$$= [\mu_{A_i}(u_0) \wedge \mu_{B_i}(v_0)] \bullet \mu_{C_i}(w)$$
$$= \alpha_i \bullet \mu_{C_i}(w) \quad where\ \alpha_i = \mu_{A_i}(u_0) \wedge \mu_{B_i}(v_0)$$

$$\mu_{C'}(w) = \bigvee_{i=1}^{n} [\alpha_i \bullet \mu_{C_i}(w)] = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{C_i'}(w)$$

$$C' = \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$$



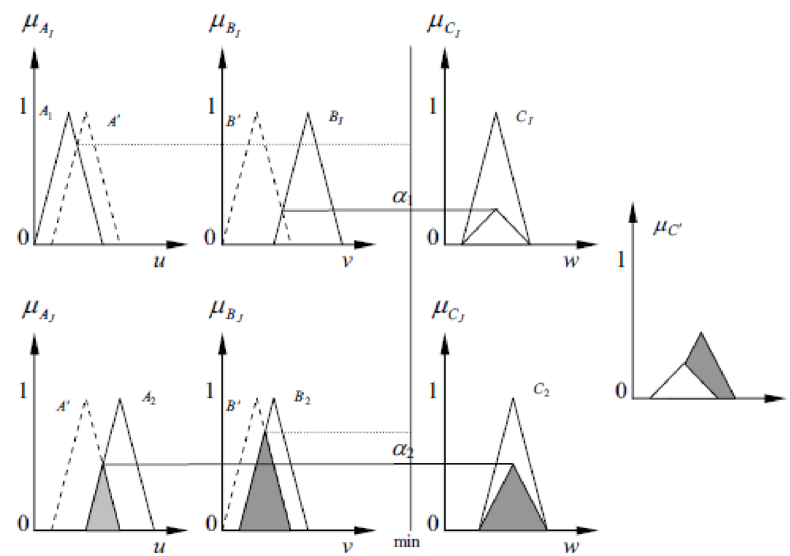
Zbiory rozmyte na wejściu

$$\mu_{C_i'}(w) = \alpha_i \bullet \mu_{C_i}(w)$$

$$where\ \alpha_i = \min[\max_u(\mu_{A'}(u) \wedge \mu_{A_i}(u)), \max_v(\mu_{B'}(v) \wedge \mu_{B_i}(v))$$

$$\mu_{C'}(w) = \bigvee_{i=1}^{n}[\alpha_i \bullet \mu_{C_i}(w)] = \bigvee_{i=1}^{n} \mu_{C_i'}(w)$$

$$C' = \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$$

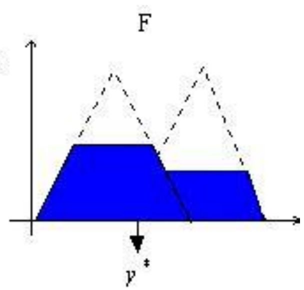


Operacja wyostrzania

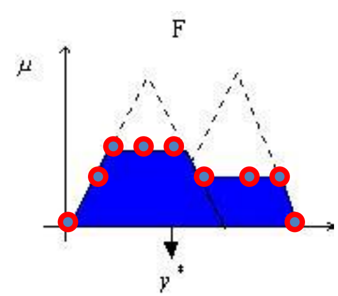
Operacja wyostrzania umożliwia następnie wyznaczenie ilościowej wartości dla zmiennej wyjściowej na podstawie znajomości zbioru F. Istnieje kilka strategii obliczania numerycznej wartości wyjścia - y*, takie jak

- metody Środkowy z Największych (MOM)
- metoda Wysokości (HM)
- metoda **Środka Ciężkości** (COG) w której wartością wyjścia jest rzut środka ciężkości kształtu tworzonego przez zbiór F:

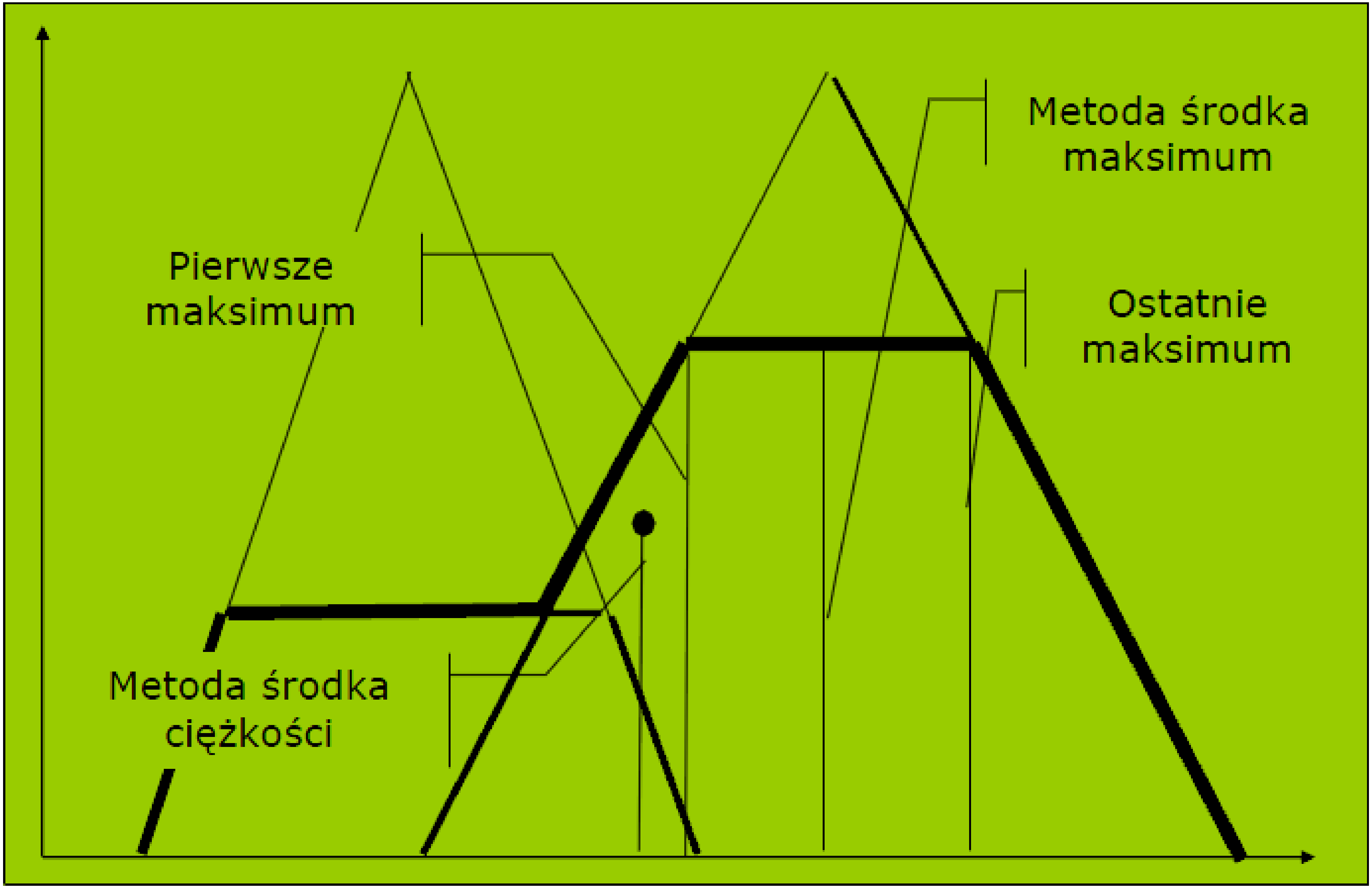
$$y' = \frac{\int_F y \mu_F(y) dy}{\int_F \mu_F(y) dy}$$



$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \mu_F(y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_F(y_i)}$$



Operacja wyostrzania



Modele Tsukamoto

If x is A1 and y is B1 then C1(z)
If x is A2 and y is B2 then C2(z)

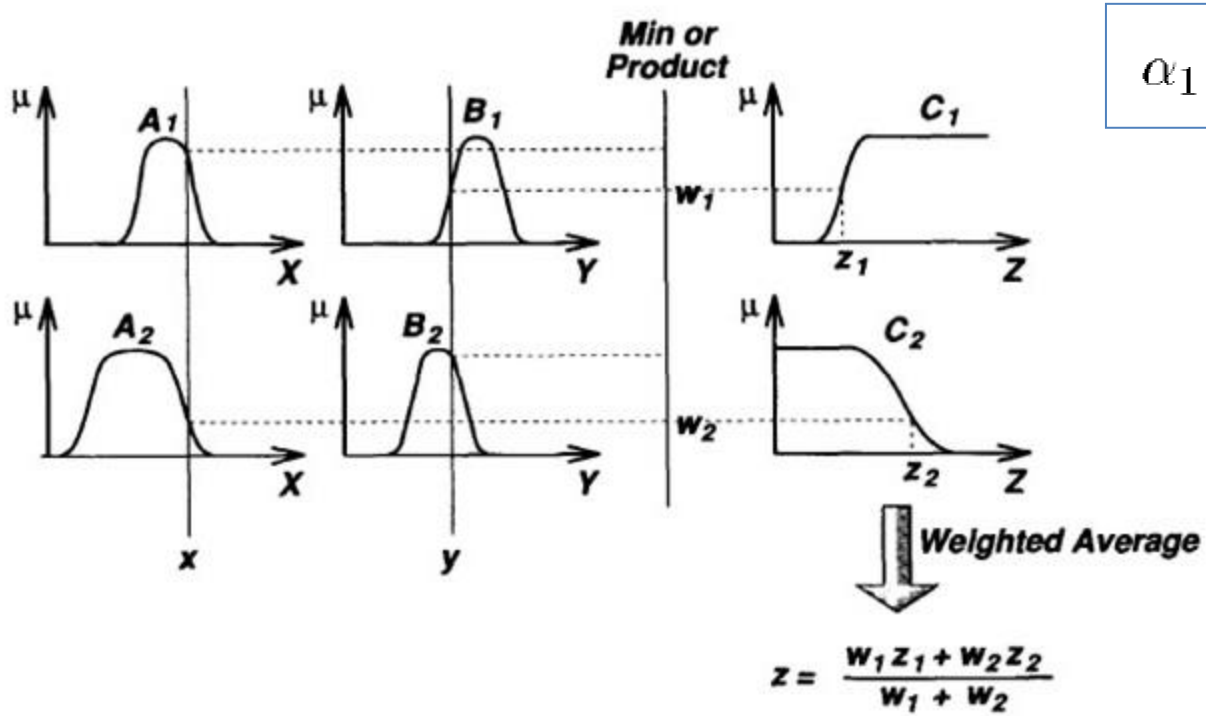
$$\mathrm{A}_1(x_0),\ \mathrm{A}_2(x_0),\ \mathrm{B}_1(y_0),\ \mathrm{B}_2(y_0)$$

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0),$$
$$\alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0),$$

C(z) są **funkcje monotoniczne**

Rozwiązać równania

$$\alpha_1 = \mathrm{C}_1(z_1), \quad \alpha_2 = \mathrm{C}_2(z_2)$$



$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2};$$

Nie potrzebuje defuzzifikacji

Przykład

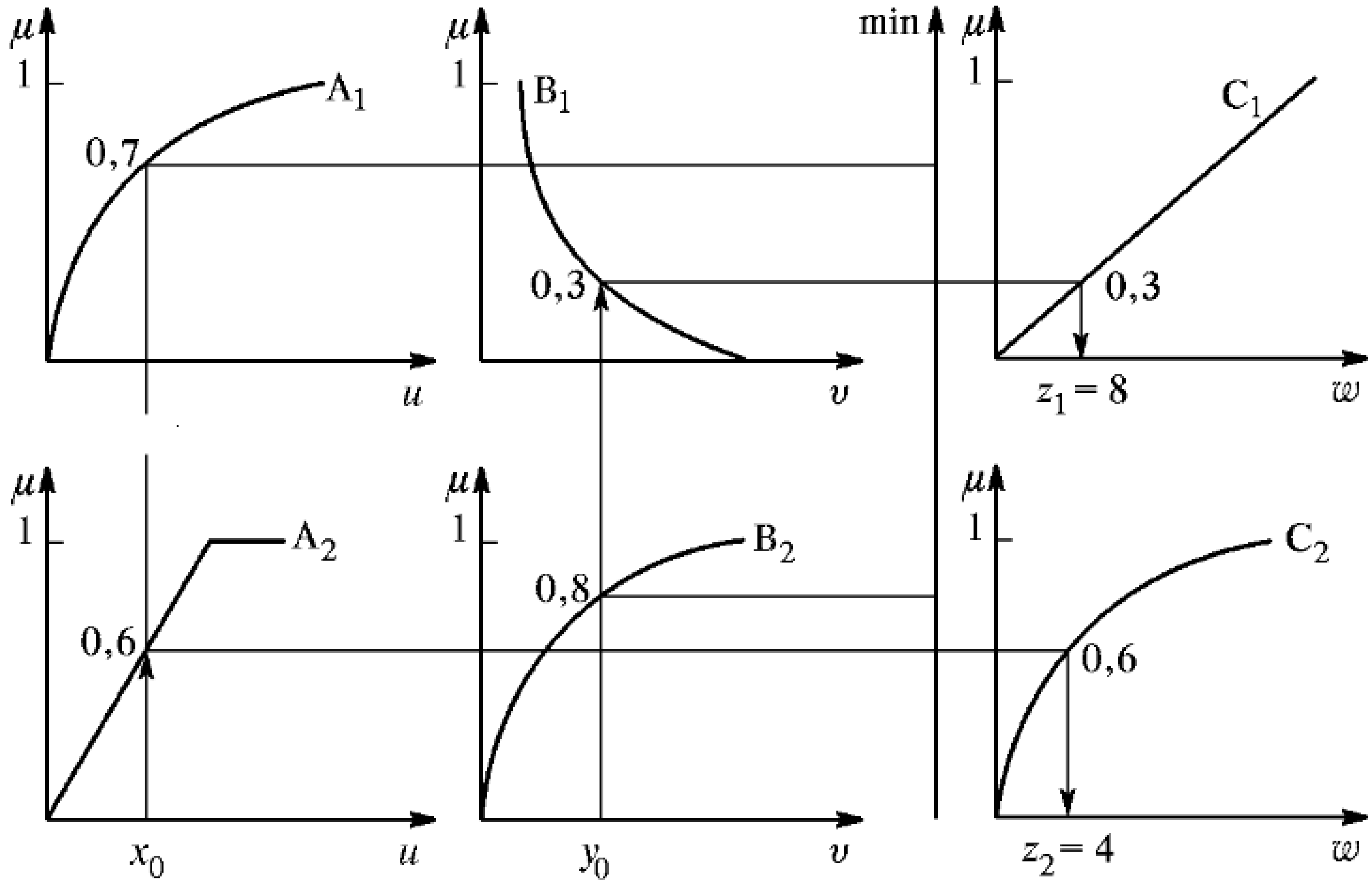
If x is A1 and y is B1 then z is C1
If x is A2 and y is B2 then z is C2

$$\mathrm{A}_1(x_0) = 0{,}7,\ \ \mathrm{A}_2(x_0) = 0{,}6,\ \ \mathrm{B}_1(y_0) = 0{,}3, \mathrm{B}_2(y_0) = 0{,}8$$

$$\alpha_1 = \min\left(\mathrm{A}_1(x_0), \mathrm{B}_1(y_0)\right) = \min(0{,}7;\, 0{,}3) = 0{,}3,$$

$$\alpha_2 = \min\left(\mathrm{A}_2(x_0), \mathrm{B}_2(y_0)\right) = \min(0{,}6;\, 0{,}8) = 0{,}6$$

$$\mathrm{C}_1(z_1) = 0{,}3, \quad \mathrm{C}_2(z_2) = 0{,}6.$$



$$z_0 = (8 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6)/(0{,}3 + 0{,}6) = 6.$$

Modele z wnioskowaniem typu Takagi - Sugeno

Tomohiro Takagi
Meiji University

Michio Sugeno
University of Tokyo

Znaną wadą modeli lingwistycznych jest fakt, że nie zawierają one w jawnej postaci obiektywnej wiedzy o systemie, która to wiedza nie może być często wcielona w ramy zbiorów rozmytych. Tego rodzaju wiedza jest mimo wszystko często dostępna i może stanowić doskonałą podstawę dla modelowania rozmytego. Sugeno i współpracownicy zaproponowali alternatywny sposób wnioskowania rozmytego. Metoda ta oparta jest na bazie reguł specjalnego formatu, który odznacza się **następnikami typu funkcyjnego** używanymi w miejsce następników rozmytych jak w modelu lingwistycznym.

jeśli u_1 **jest** B_{11} **i** … **i** u_r **jest** B_{1r} **to** $y_1 = b_{10}+b_{11}u_1+\ldots+b_{1r}u_r$

także

…

także

jeśli u_1 **jest** B_{m1} **i** … **i** u_r **jest** B_{mr} **to** $y_m = b_{m0}+b_{m1}u_1+\ldots+b_{mr}u_r$

Wyjście modelu

Wyjście nierozmyte takiego modelu jest określone przez średnią ważoną wyjść y_i poszczególnych modeli:

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^{m} \min\left(\mu_{B_{i1}}(u_1), \mu_{B_{i2}}(u_2), \ldots, \mu_{B_{ir}}(u_r)\right) \cdot \left(b_{i0} + b_{i1} \cdot u_1 + \ldots + b_{ir} \cdot u_r\right)}{\sum_{i=1}^{m} \min\left(\mu_{B_{i1}}(u_1), \mu_{B_{i2}}(u_2), \ldots, \mu_{B_{ir}}(u_r)\right)}$$

Modelowanie z wnioskowaniem Takagi-Sugeno ma tę zaletę, że pozwala wykorzystać bogaty **aparat analizy liniowych układów dynamicznych**. Łączy więc w sobie zalety klasycznego i rozmytego podejścia. Jednak prostota modelu Takagi-Sugeno jest pozorna, gdyż stawia on przed projektantem wymaganie nie tylko określenia współczynników $\mathbf{b_{ij}}$ pojawiających się w podmodelach liniowych, ale także określenia zbiorów rozmytych $\mathbf{B_{ij}}$. Ilość tych zbiorów określa zależy od podziału przestrzeni wejściowej i wyznacza strukturę całego modelu oraz liczbę reguł.

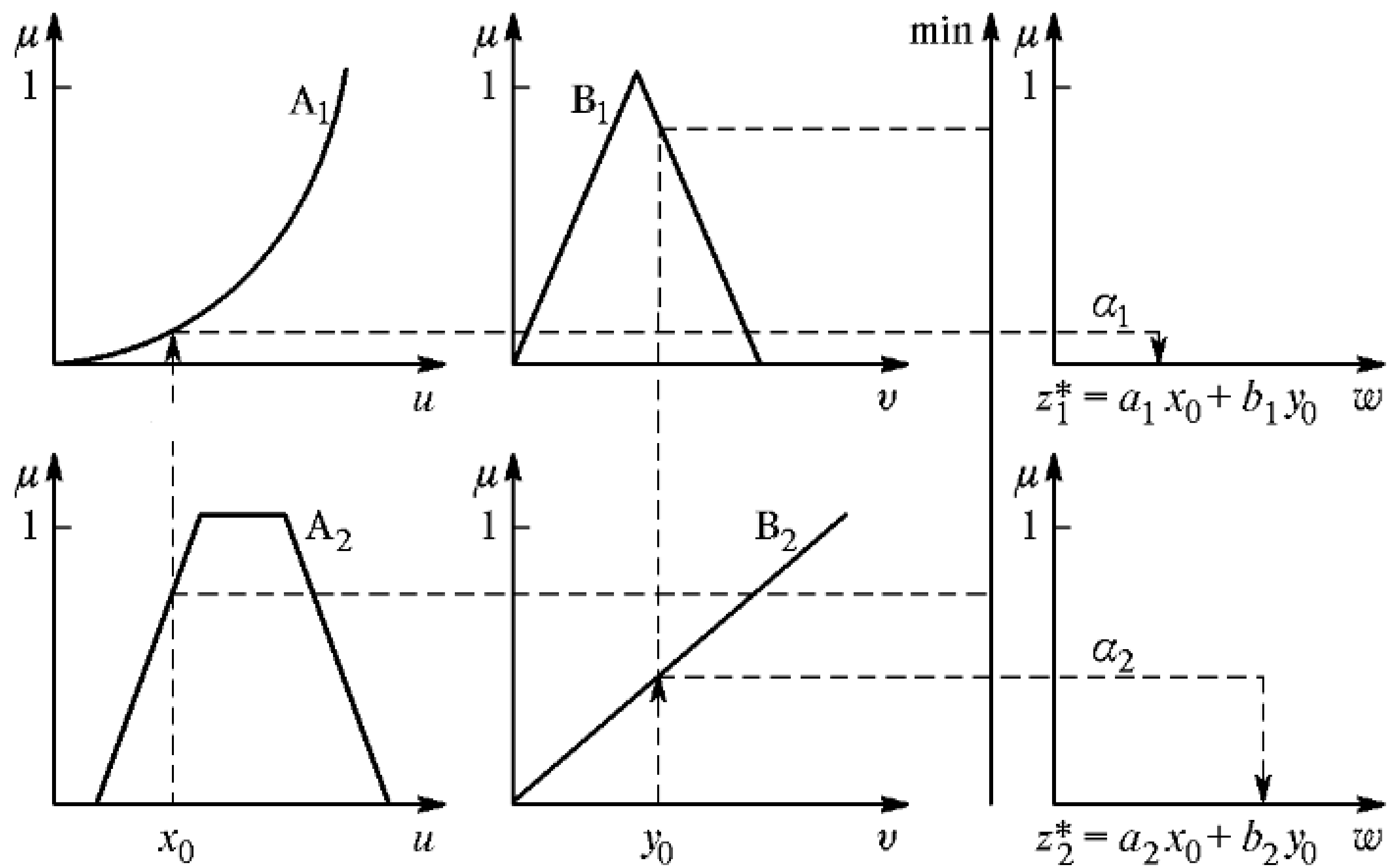
Przykład

If x is A1 and y is B1 then z=a1*x+b1*y
If x is A2 and y is B2 then z=a2*x+b2*y

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0), \quad \alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0)$$

$$z_1^* = a_1 x_0 + b_1 y_0,$$
$$z_2^* = a_2 x_0 + b_2 y_0.$$

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$


μ
1
A1
u
μ
1
B1
v
min
μ
1
α1
z1* = a1 x0 + b1 y0
w
μ
1
A2
x0
u
μ
1
B2
y0
v
μ
1
α2
z2* = a2 x0 + b2 y0
w

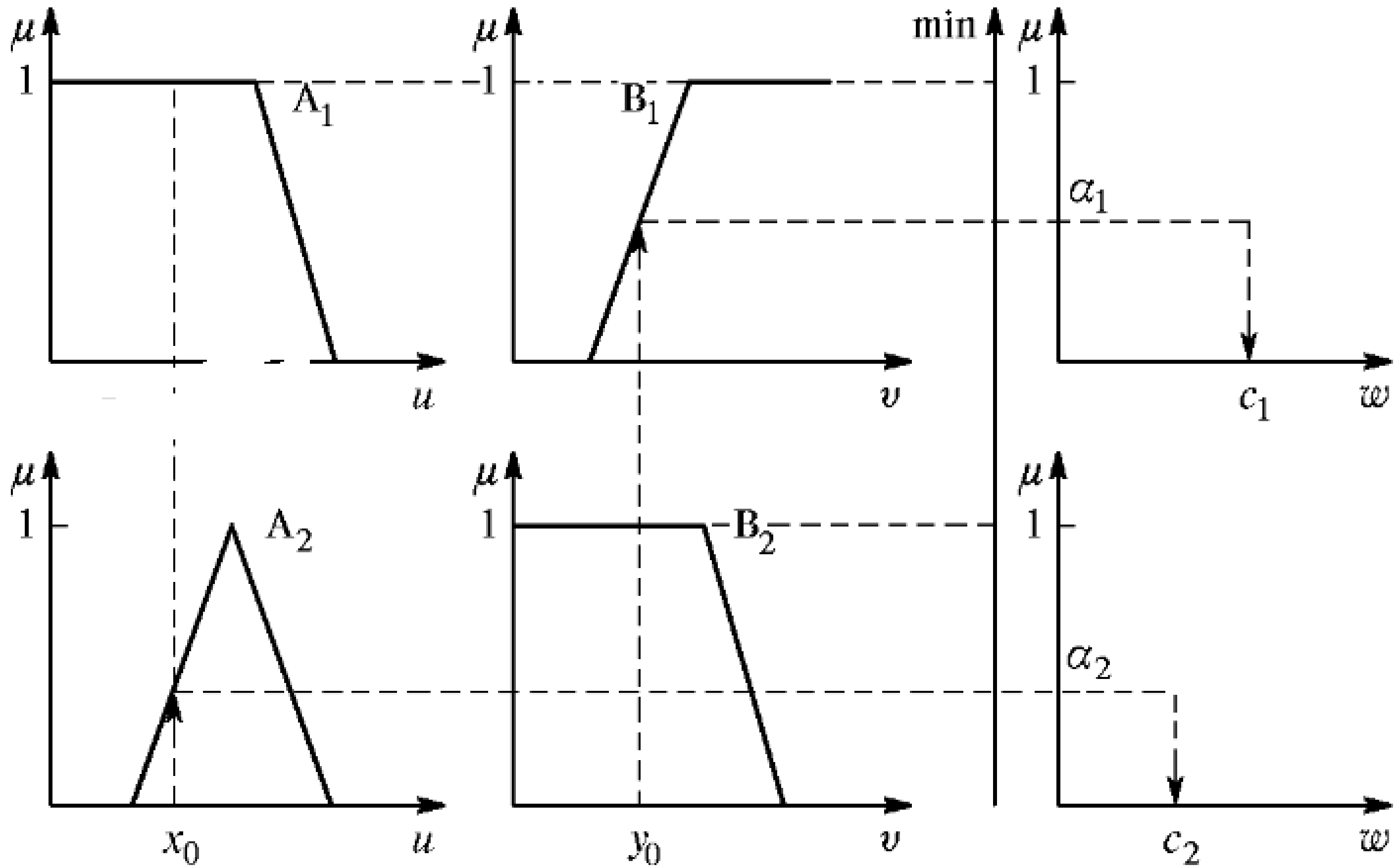
Model TS zerowej potęgi

If x is A1 and y is B1 then z=c1

If x is A2 and y is B2 then z=c2

$$\alpha_1 = \mathrm{A}_1(x_0) \wedge \mathrm{B}_1(y_0), \ \alpha_2 = \mathrm{A}_2(x_0) \wedge \mathrm{B}_2(y_0).$$

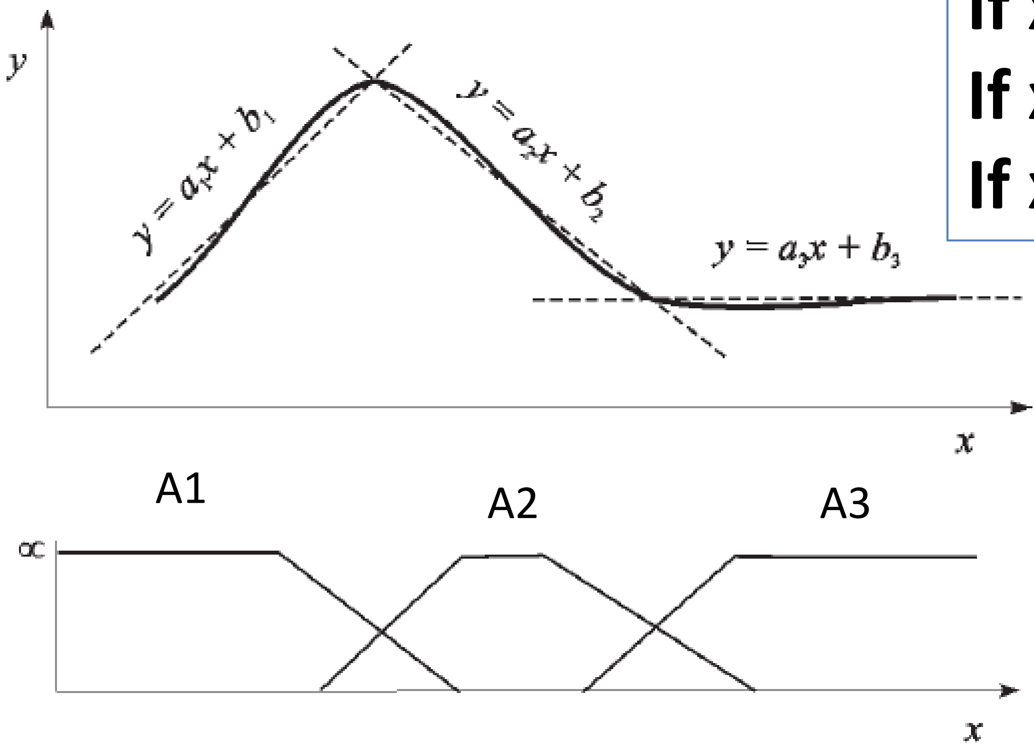
$$z_0 = \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

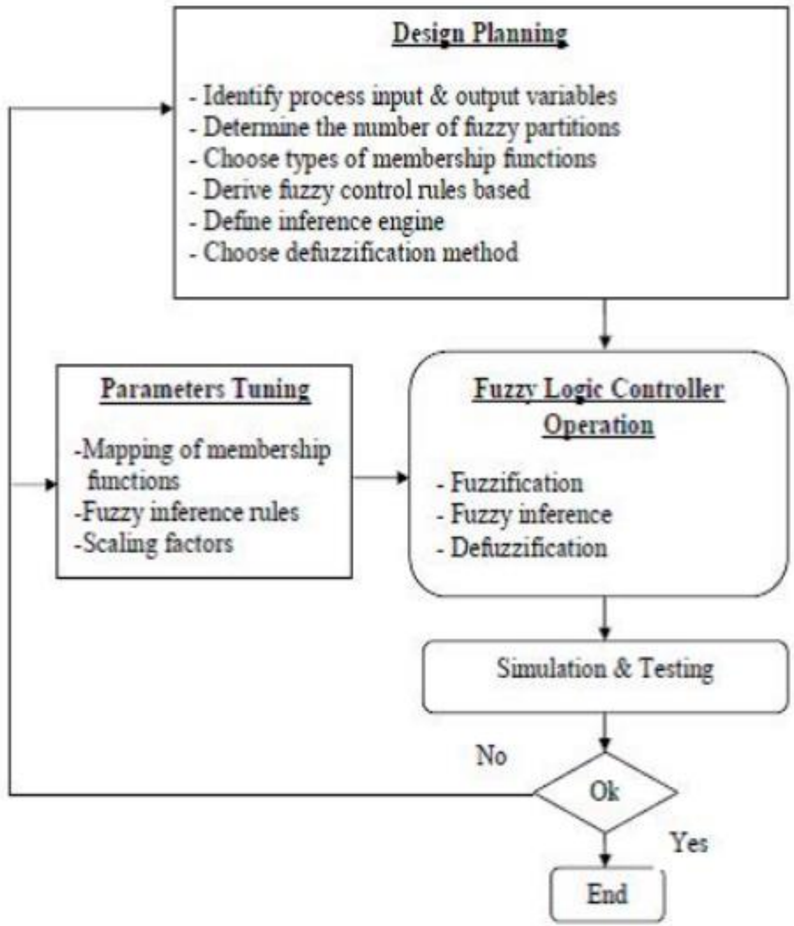


μ
1
A1
u
μ
1
B1
v
min
μ
1
α1
c1
w
μ
1
A2
x0
u
μ
1
B2
y0
v
μ
1
α2
c2
w

Aproksymacja funkcji

If x is A1 then y=a1*x+b1
If x is A2 then y=a2*x+b2
If x is A3 then y=a3*x+b3




Design Planning
- Identify process input & output variables
- Determine the number of fuzzy partitions
- Choose types of membership functions
- Derive fuzzy control rules based
- Define inference engine
- Choose defuzzification method
Parameters Tuning
-Mapping of membership functions
-Fuzzy inference rules
-Scaling factors
Fuzzy Logic Controller Operation
- Fuzzification
- Fuzzy inference
- Defuzzification
Simulation & Testing
No
Ok
Yes
End

Przykład

Serwomotory są używane w wielu systemach automatycznych, w tym w sterownikach drukarek, manipulatorów robotów. Procesy w serwomotoru wykazują właściwości nieliniowe, dlatego stosujemy sterowanie logiką rozmytą do sterowania silnikiem. **Zadaniem sterowania jest obrót wału silnika do zadanej wartości bez przeregulowania**. Wartość zadana i wyjście procesu mierzą w stopniach.

Zmienne

(1) Określenie zmiennych stanu i zmiennej sterującej

1) Zmienne stanu (zmienna wejściowa kontrolera):

- Błąd jest równy wartości zadanej minus wyjście procesu (e).
- Zmiana błędu (ce) równa się błędzie z wyjścia procesu minus błąd z ostatniego wyjścia procesu.

2) Zmienna sterująca (zmienna wyjściowa regulatora):

- Wejście sterujące (v) jest równe napięciu przyłożonemu do procesu.

Sterowanie

(2) Wyznaczanie metody wnioskowania
Metoda wnioskowania Mamdaniego została wybrana, ponieważ jest łatwa do wyjaśnienia.
(3) Określenie metody fuzzyfikacji
Możemy mierzyć zmienne stanu bez niepewności i dlatego używamy zmierzonego singletona do wnioskowania rozmytego

Dyskretyzacja i normalizacja

Enkoder wału silnika ma rozdzielczość 1000.
Zakresy zmiennych wejściowych są następujące:
-1000 < e < 1000
100 < ce < 100
Serwowzmacniacz ma zakres wyjściowy 30 V, a tym samym sterowanie zmienne (v) mieszczą się w zakresie
-30 < v < 30
Dyskretyzujemy i normalizujemy zmienne wejściowe w zakresie [-1, +1] jako przedstawiono w tabeli. Zmienna kontrolna v jest znormalizowana w zakresie [-1, +1] z równaniem

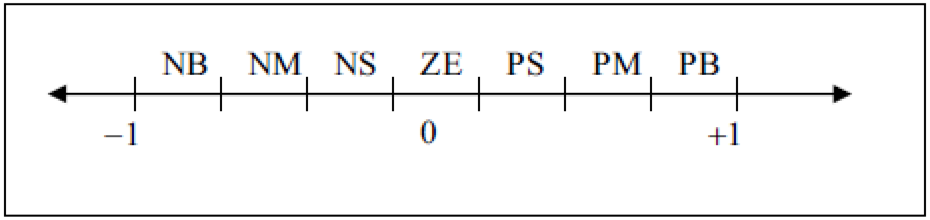
$$v' = \frac{1}{30}v$$

v

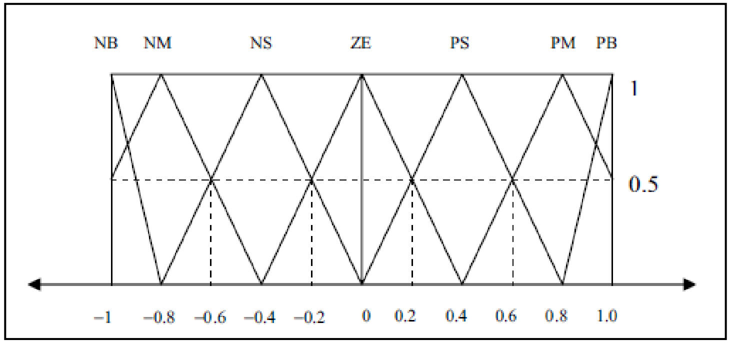
error (e)	error change (ce)	quantized level
$-1000 \leq e \leq -800$	$-100 \leq ce \leq -80$	-1.0
$-800 < e \leq -600$	$-80 < ce \leq -60$	-0.8
$-600 < e \leq -400$	$-60 < ce \leq -40$	-0.6
$-400 \leq < e \leq -200$	$-40 < ce \leq -20$	-0.4
$-200 < e \leq -100$	$-20 < ce \leq -10$	-0.2
$-100 < e \leq 100$	$-10 < ce \leq 10$	0
$100 < e \leq 200$	$10 < ce \leq 20$	0.2
$200 < e \leq 400$	$20 < ce \leq 40$	0.4
$400 < e \leq 600$	$40 < ce \leq 60$	0.6
$600 < e \leq 800$	$60 < ce \leq 80$	0.8
$800 < e \leq 1000$	$80 < ce \leq 100$	1.0

Przestrzeń wejściowa i wyjściowa

(5) Podział przestrzeni wejściowej i wyjściowej
Dzielimy przestrzeń każdej zmiennej wejściowej i wyjściowej na siedem regionów, a każdy region jest powiązany z termem odpowiedniej zmiennej lingwistycznej.
Teraz wiemy, że maksymalna liczba możliwych reguł rozmytych to 49.
(6) Wyznaczanie kształtów zbiorów rozmytych
Znormalizowaliśmy zmienne wejściowe i wyjściowe w tym samym przedziale [-1,+1] i podzieliliśmy region na siedem podregionów, tak więc definiujemy odpowiednie funkcje przynależności jako podstawowe trójkątne rozmyte zbiory dla wszystkich zmiennych



Level	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
−1	1	0.5	0	0	0	0	0
−0.8	0	1	0	0	0	0	0
−0.6	0	0.5	0.5	0	0	0	0
−0.4	0	0	1	0	0	0	0
−0.2	0	0	0.5	0.5	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0.2	0	0	0	0.5	0.5	0	0
0.4	0	0	0	0	1	0	0
0.6	0	0	0	0	0.5	0.5	0
0.8	0	0	0	0	0	1	0
1.0	0	0	0	0	0	0.5	1



Reguły sterowania

(7) Przeprowadziliśmy wywiad z ekspertem od sterowania serwomotorami i zbieramy takie informacje, jak:
Jeśli błąd wynosi zero, a zmiana błędu jest niewielka, to wejście sterujące jest ujemne małe.

1) If e is PB and ce is any, then v is PB.
2) If e is PM and ce is NB, NM, or NS, then v is PS.
3) If e is ZE and ce is ZE, PS, or PM, then v is ZE.
4) If e is PS and ce is NS, ZE, or PS, then v is ZE.
5) If e is NS and ce is NS, ZE, PS, or PM, then v is NS
6) If e is NS or ZE and ce is PB, then v is PS.

e \ c	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NB	NB	NB
NM	NM	NM	NM	NB	NB	NB	NB
NS	NM	NM	NS	NS	NS	NS	PS
ZE	NS	NS	NS	ZE	ZE	ZE	PS
PS	NS	NS	ZE	ZE	ZE	PM	PM
PM	PS	PS	PS	PM	PM	PM	PM
PB	PB	PB	PB	PB	PB	PB	PB

Testowanie i sprawdzanie

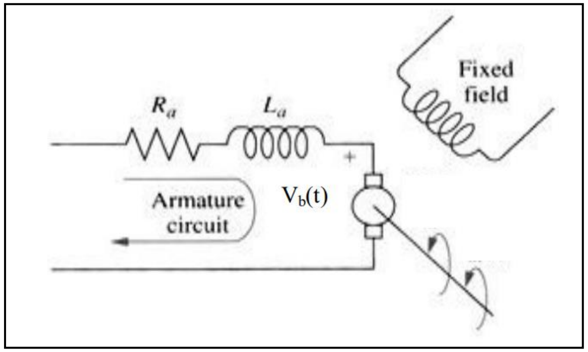
(8) Określenie strategii defuzyfikacji
Przyjmujemy metodę COA (środek obszaru), ponieważ jest ona najczęściej stosowana.
(9) Testowanie i dostrajanie
Sprawdziliśmy działanie opracowanego kontrolera i dopracowaliśmy jakieś niejasne zasady.

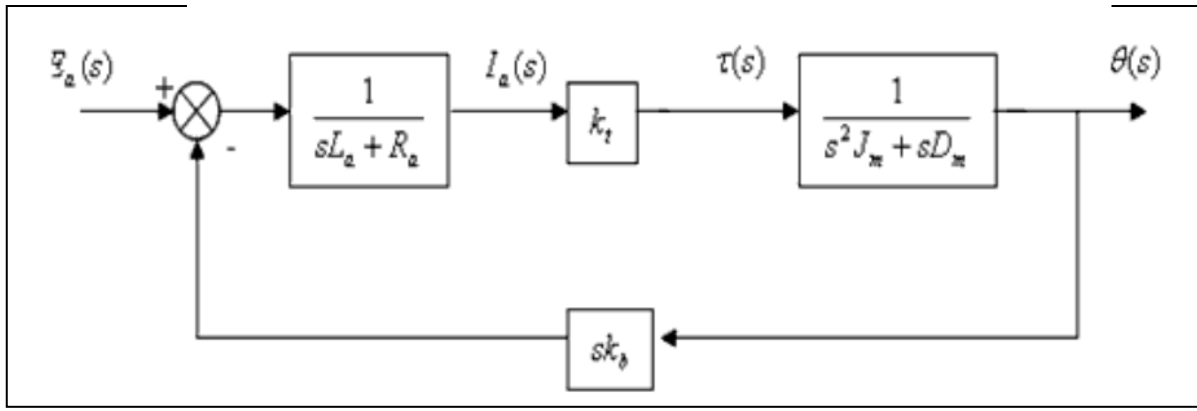
(10) Konstrukcja tabeli przeglądowej
Po sprawdzeniu, czy kontroler wykazuje dobrą wydajność, zdecydowaliśmy się skorzystać z tabeli przeglądowej. Rozszerzyliśmy wnioskowanie dla każdej kombinacji dyskretyzowanych zmiennych wejściowych c i ce. Na przykład,
dla c = -0,2 i ce = 0, v wynosi -0,4
dla c = -0,4 i ce = 0,4, v wynosi 0,2
Odpowiednia tablica przeglądowa jest podana w tabeli 10.8. Teraz możemy użyć tej tabeli przeglądowej, aby zaoszczędzić czas wnioskowania i czas defuzyfikacji.

V=f(e,ce)

e \ ce	−1.0	−0.8	−0.6	−0.4	−0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−1.0	−0.8	−0.8	−0.8	−0.8	−0.6	−0.6
−0.8	−0.8	−0.8	−0.8	−0.8	−0.8	−0.8	−0.6	−0.6	−0.6	−0.6	−0.6
−0.6	−0.6	−0.6	−0.6	−0.6	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.2	−0.2
−0.4	−0.2	0	0	0	0	0	0	0.2	0.2	0.2	0.2
−0.2	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	0	0	0	0	0
0	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	0	0	0	0
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.4	0.4
0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
1.0	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.8	0.8	0.8

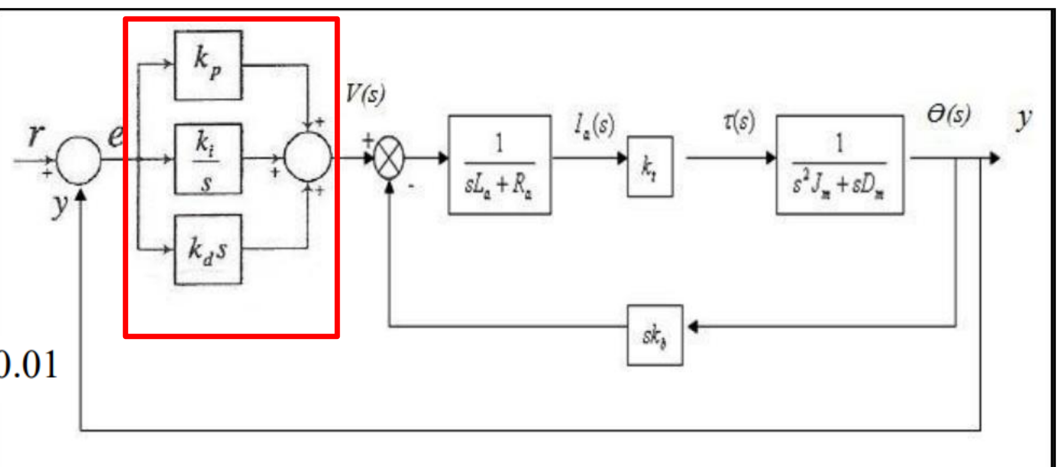
$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T}{J_m R_a s^2 + (B\,R_a + K_T K_B)s}$$





K_T	0.01 N.m/A
K_B	0.01 V/rad/s
R_a	1 Ω
B	0.1 N.m/rad/s

$K_p = 2$, $K_i = 6.25$ and $K_d = 0.01$



\LR\lit\Servo Motor Position ....pdf

Error (e) \ Rate (de)	P(de)	Z(de)	N(de)
P(e)	PB	PS	Z
Z(e)	PS	Z	NS
N(e)	Z	NS	NB

Error (e) \ Rate(de)	PB(de)	PS(de)	Z(de)	NS(de)	NB(de)
PB(e)	Z	NS	NM	NM	NB
PS(e)	PS	Z	NS	NS	NM
Z(e)	PM	PS	Z	NS	NM
NS(e)	PM	PS	PS	Z	NS
NB(e)	PB	PM	PM	PS	Z

1) IF Error (e) is N (e) AND Rate (de) is P (de) THEN Output (u) is Z (u)

2) IF Error (e) is Z (e) AND Rate (de) is P (de)THEN Output (u) is PS (u)

3)IF Error (e) is P(e) AND Rate(de) is P(de) THEN Output(u) is PB(u)

4) IF Error (e)r is N(e) AND Rate (de) is Z(de) THEN Output (u) is NS(u)

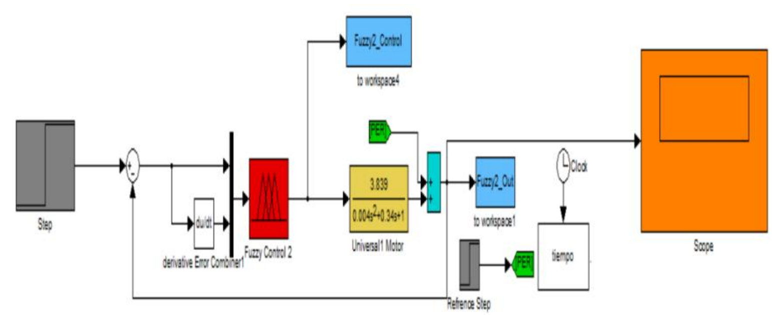
5) IF Error (e) is Z (e) AND Rate (de) is Z (de) THEN Output (u) is Z (u)

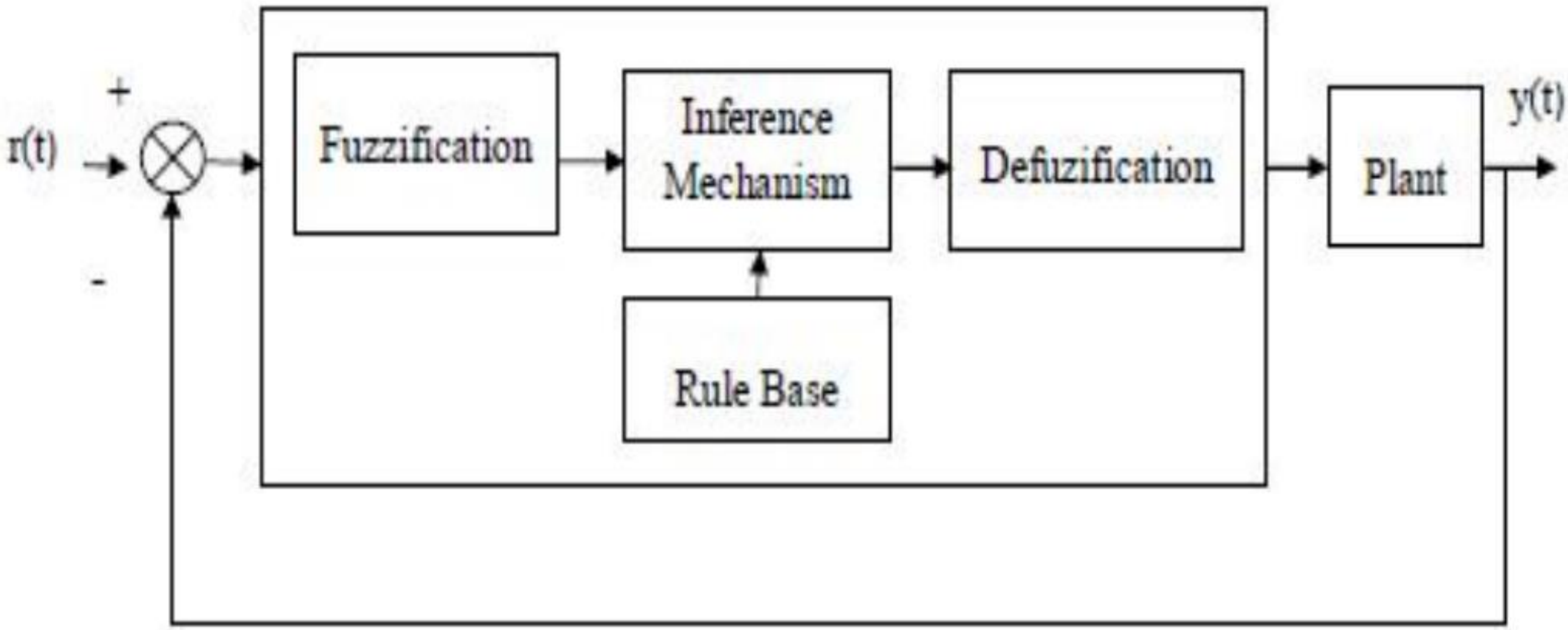
6) IF Error (e) is P (e) AND Rate (de) is Z (de) THEN Output (u) is PS (u)

7) IF Error (e) is N(e)AND Rate (de) is N(de) THEN Output(u) is NB(u)

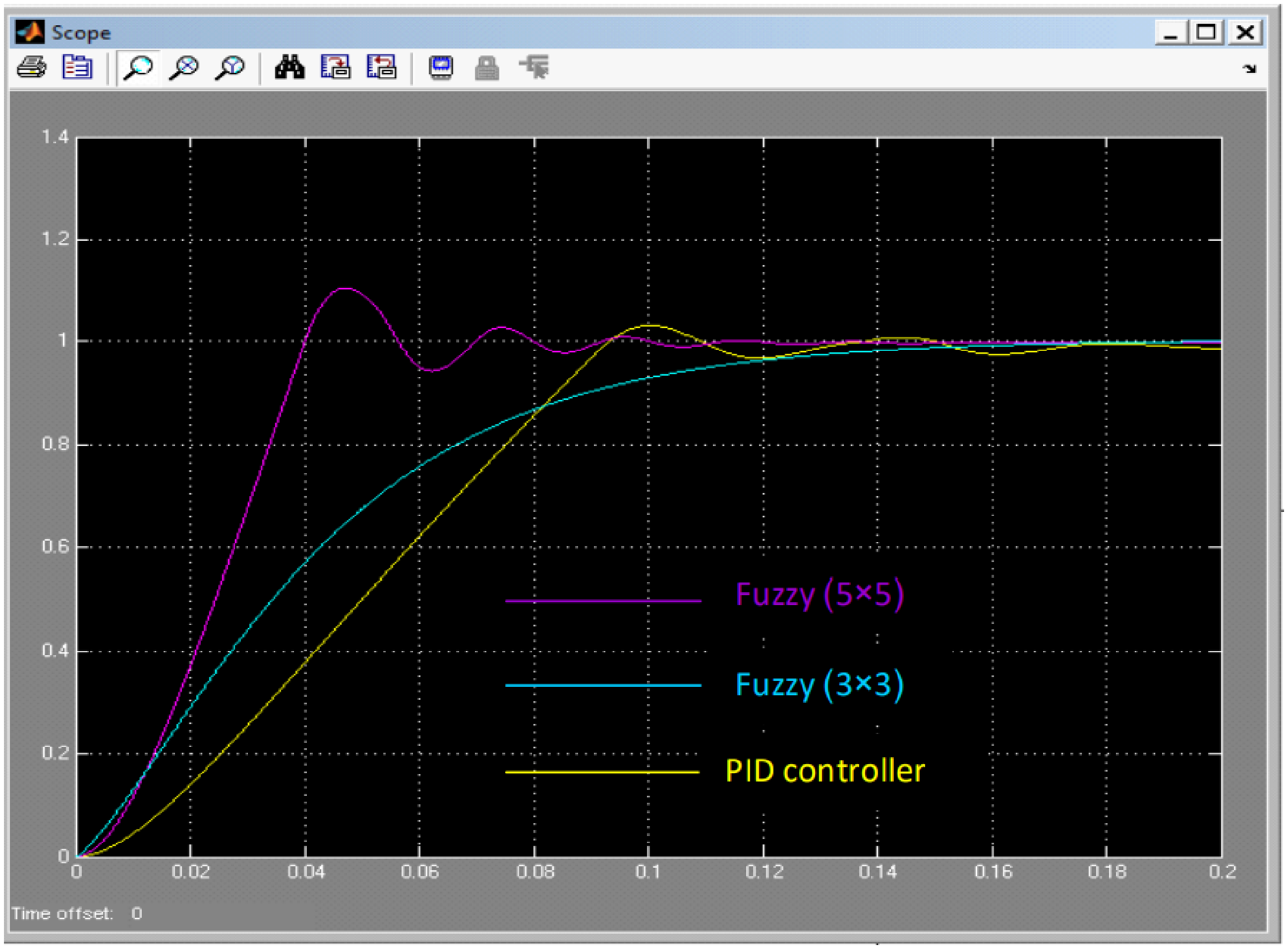
8) IF Error (e) is Z(e)AND Rate(de) is N(de) THEN Output(u) is NS(u)

9) IF Error (e) is P (e) AND Rate (de) is N (de)THEN Output (u) is Z (u)

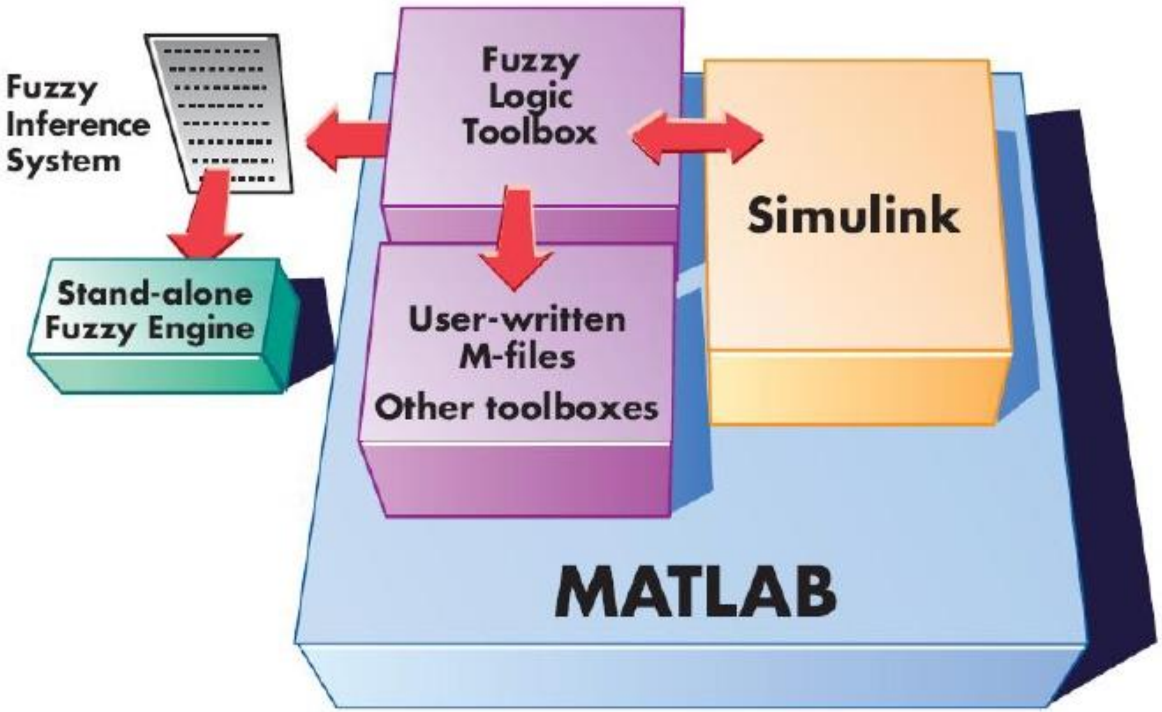




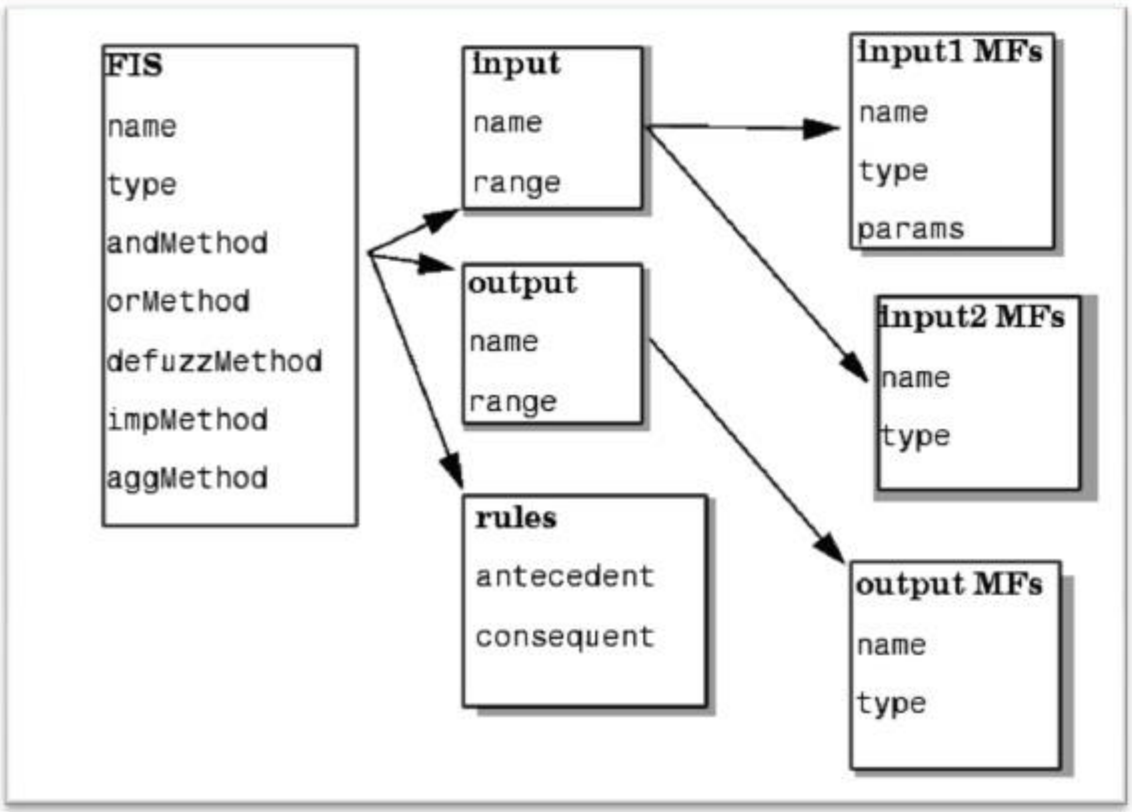
+
r(t)
-
Fuzzification
Inference
Mechanism
Rule Base
Defuzification
Plant
y(t)


Scope
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
Fuzzy (5×5)
Fuzzy (3×3)
PID controller
Time offset: 0

Logika rozmyta w Matlabie

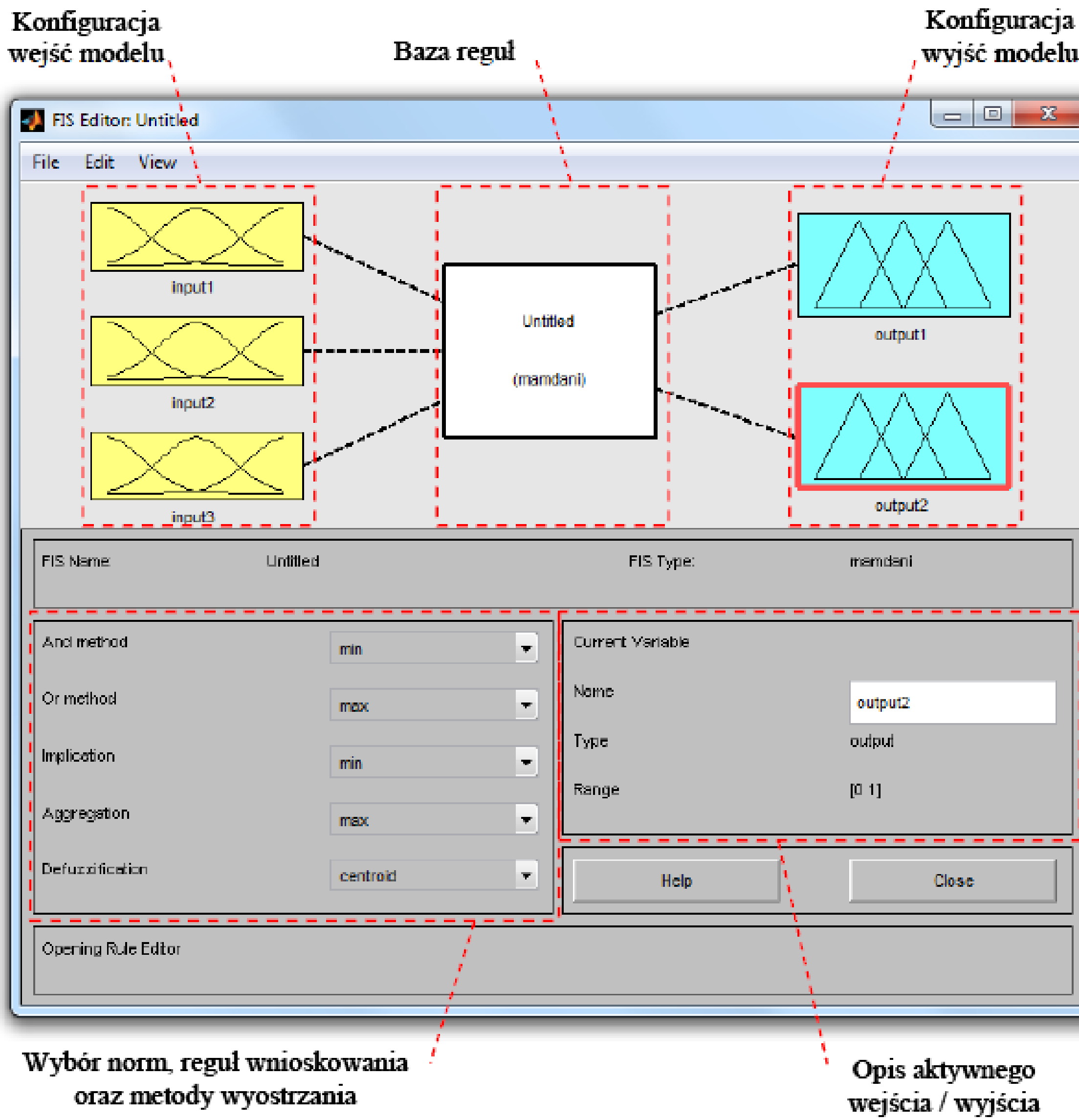


Struktura FIS

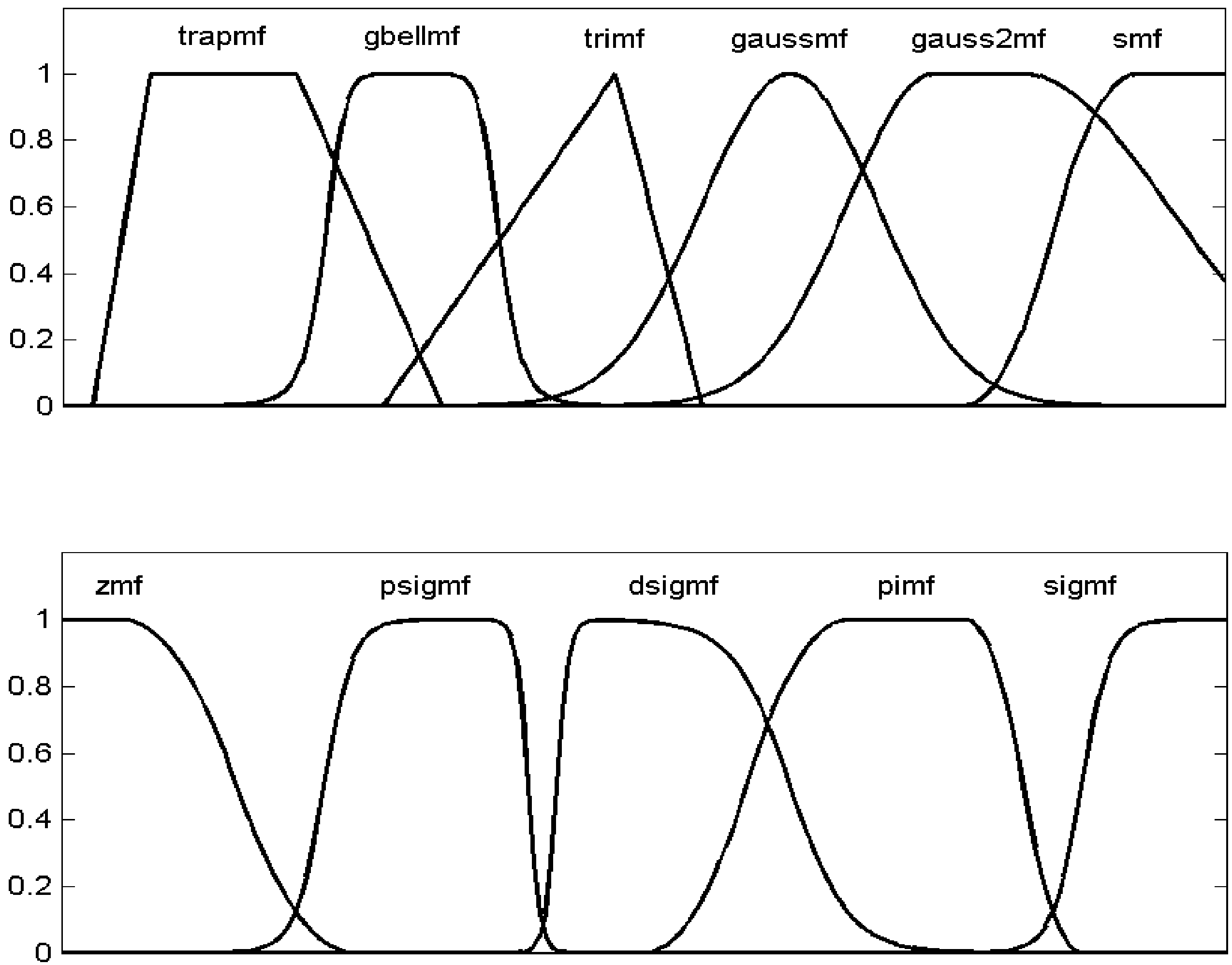


Edytor rozmytego systemu wnioskującego w programie Matlab

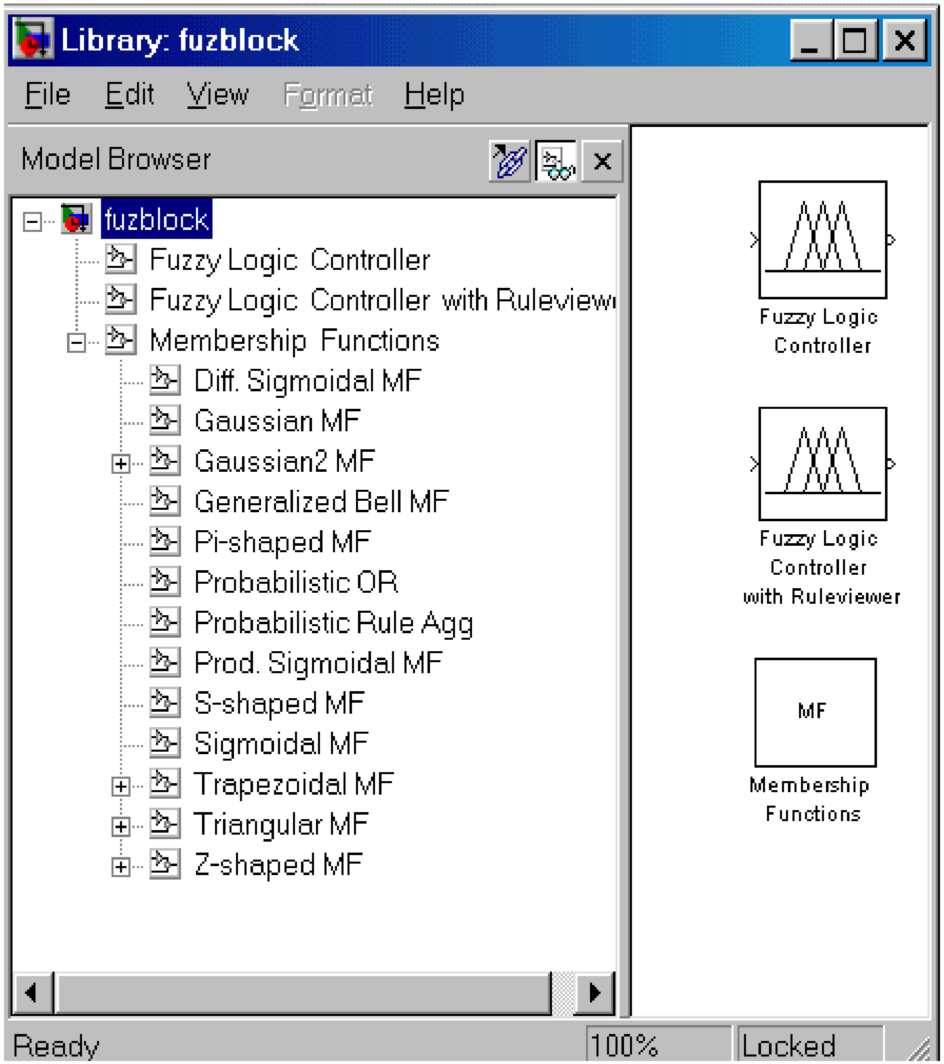
Aby wywołać edytor rozmytego systemu wnioskującego należy w oknie Matlaba wpisać polecenie fuzzy. Po wpisaniu polecenia ukaże się okno edytora składające się z 5 części.

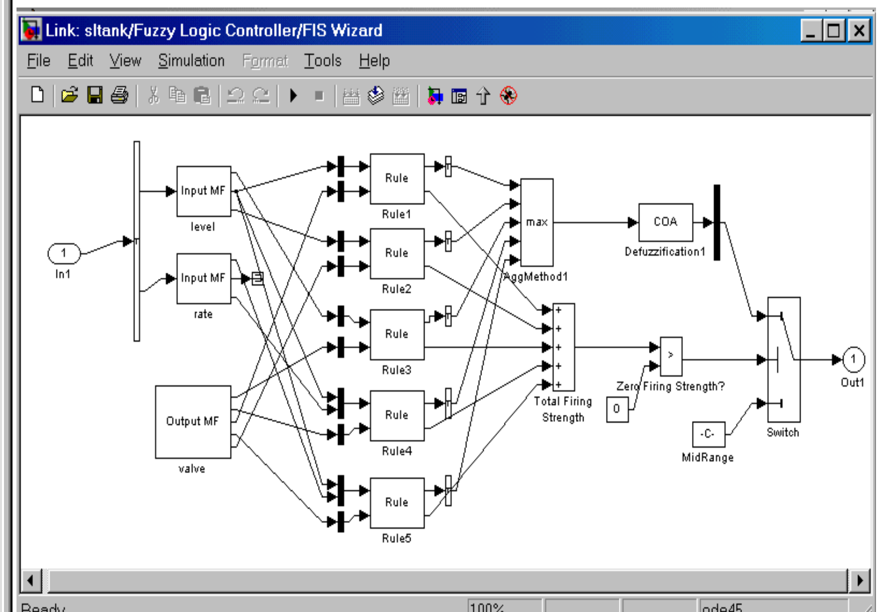


Funkcji przynależności



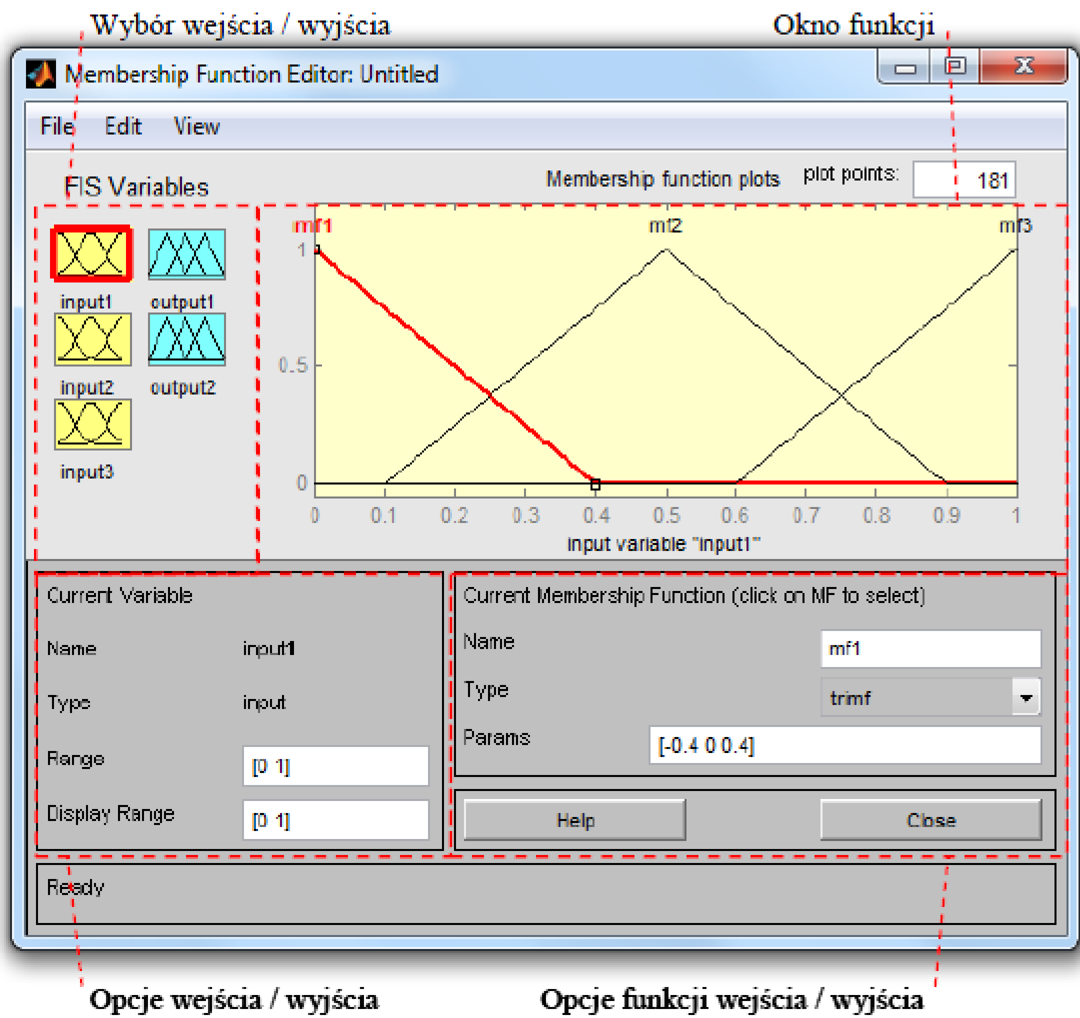
Simulink


Library: fuzblock
File Edit View Format Help
Model Browser
fuzblock
Fuzzy Logic Controller
Fuzzy Logic Controller with Rulevlewi
Membership Functions
Diff. Sigmoidal MF
Gaussian MF
Gaussian2 MF
Generalized Bell MF
Pi-shaped MF
Probabilistic OR
Probabilistic Rule Agg
Prod. Sigmoidal MF
S-shaped MF
Sigmoidal MF
Trapezoidal MF
Triangular MF
Z-shaped MF
Fuzzy Logic Controller
Fuzzy Logic Controller with Ruleviewer
MF
Membership Functions
Ready
100%
Locked


Link: sltank/Fuzzy Logic Controller/FIS Wizard
File Edit View Simulation Format Tools Help
In1
Input MF
level
Input MF
rate
Output MF
valve
Rule
Rule1
Rule2
Rule3
Rule4
Rule5
max
AggMethod1
COA
Defuzzification1
Total Firing Strength
Zero Firing Strength?
0
-C-
MidRange
Switch
Out1
Ready
100%
ode45

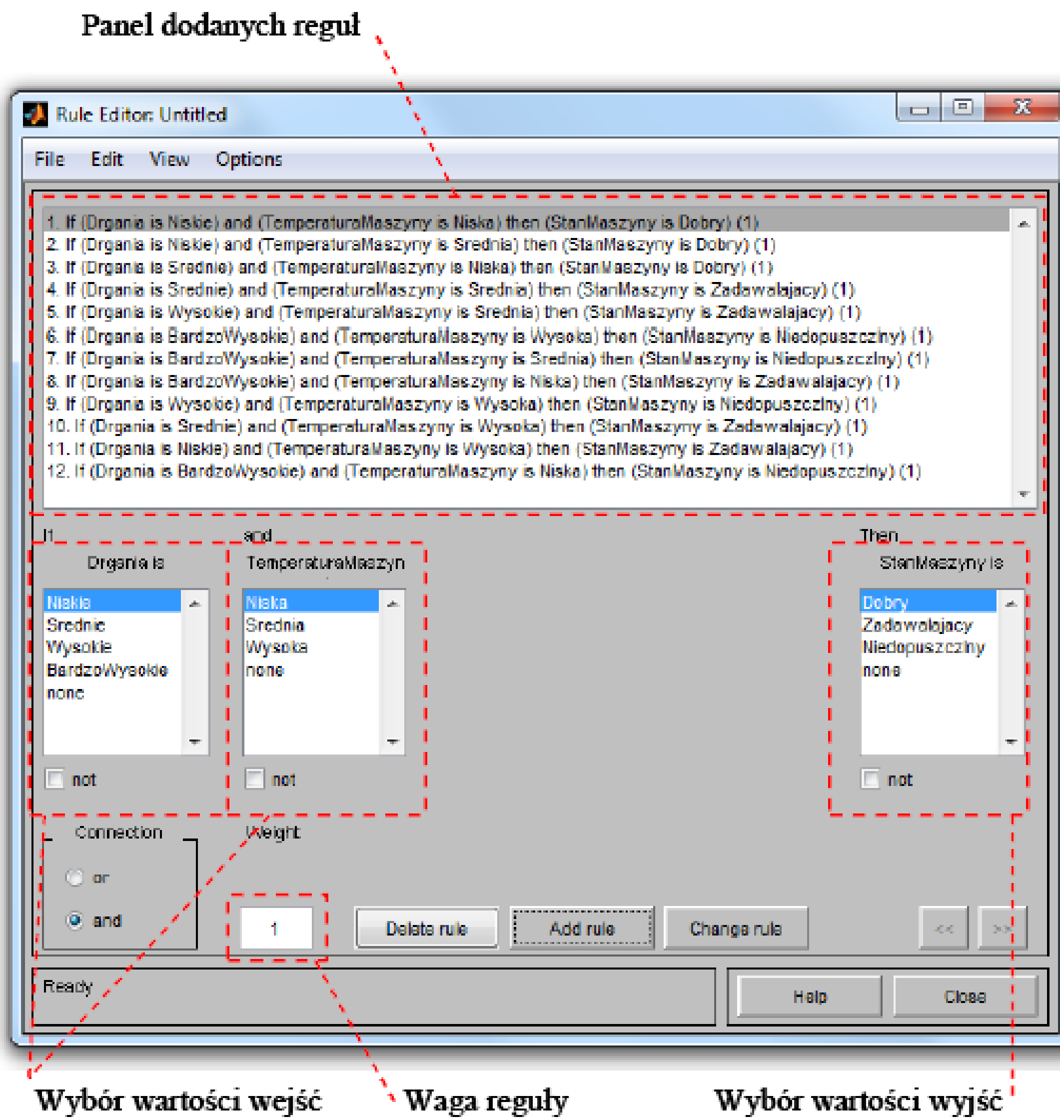
Konfiguracja wejść / wyjść modelu

Poprzez dwukrotne naciśnięcie kursorem myszy na obszarze „Konfiguracja wejść modelu” lub „Konfiguracja wyjść modelu”, wybraniu opcji ***„Membership function” z menu Edit (Ctrl+2), użytkownik otwiera okno Edytora funkcji przynależności.***



Baza reguł modelu

Po dwukrotnym naciśnięciu na obszar bazy reguł w głównym edytorze rozmytego systemu wnioskującego lub po wybraniu opcji „Rules” z menu Edit (Ctrl+3) pokazuje się okno. Okno składa się z panelu dodanych reguł, gdzie znajdują się dodane reguły oraz części w której można dodać, zmodyfikować oraz usunąć zaznaczoną regułę.

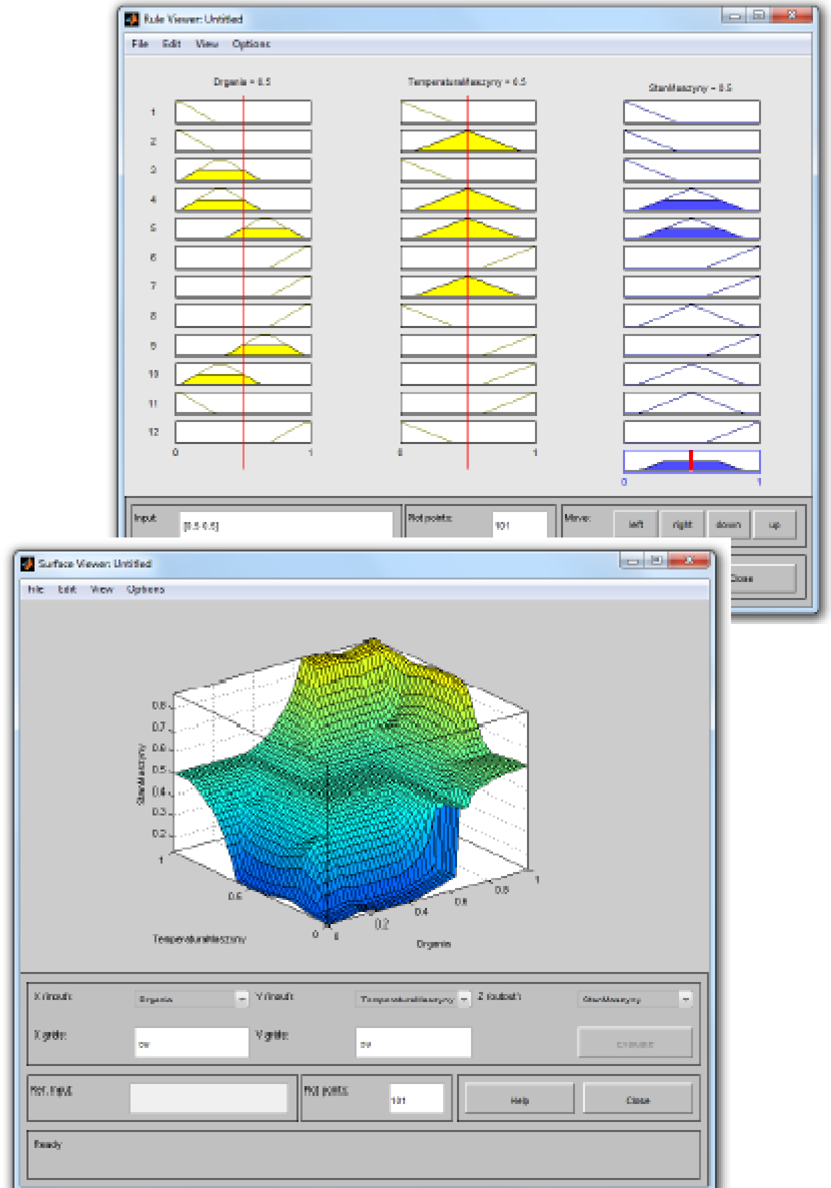


Reprezentacja wyników

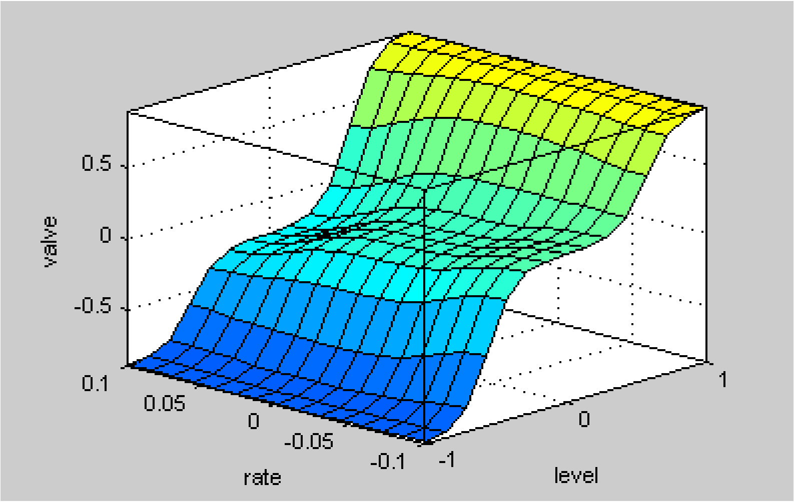
Ustawienie systemu może zostać skontrolowane w dwojaki sposób:

Zmiany nastaw wejść (numerycznie poprzez wpisanie wartości wejść w polu „Input” lub poprzez przesuwanie czerwonych linie pod wykresami reprezentującymi wejścia) i obserwowanie wyjścia oraz spełnienia przesłanek w regułach w oknie Rule Viever wywoływanym z menu „View” poprzez wybór opcji „Rules” (Ctrl+5).

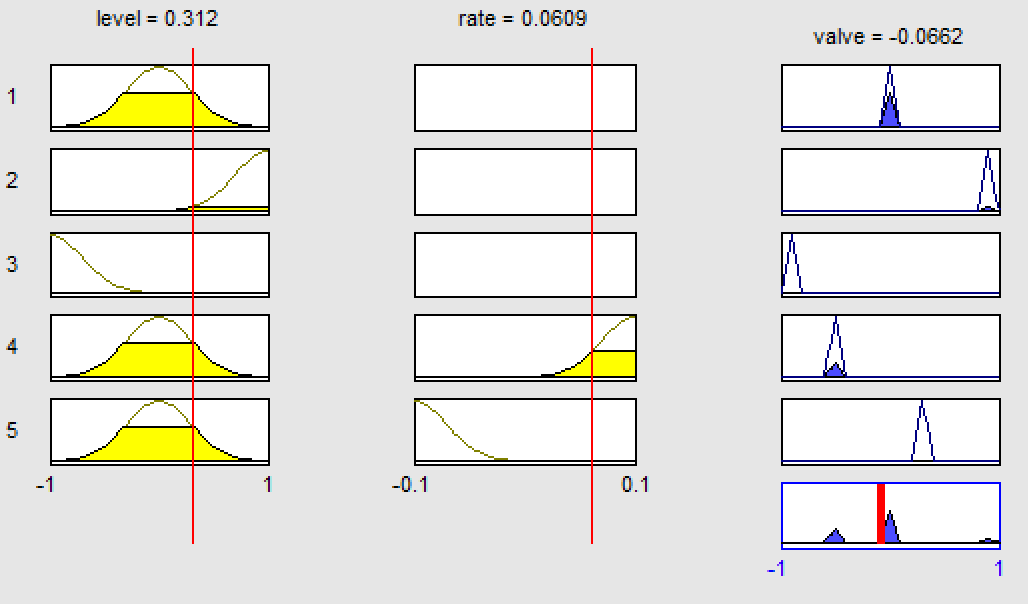
Sprawdzenie krzywej lub powierzchni powstałej w wyniku symulacji wyjścia systemu dla odpowiednich wartośći jego wejść. Okno „Surface Viewer” otwierane jest poprzez wywołanie z menu „View” opcji „Surface” (Ctrl+6).



Baza reguł



valve
0.5
0
-0.5
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
rate
-1
0
1
level



level = 0.312
rate = 0.0609
valve = -0.0662
1
2
3
4
5
-1
1
-0.1
0.1
-1
1

Struktura fis pliku

```
% $Revision: 1.1 $
[System]
Name='tank'
Type='mamdani'
NumInputs=2
NumOutputs=1
NumRules=5
AndMethod='prod'
OrMethod='probor'
ImpMethod='prod'
AggMethod='max'
DefuzzMethod='centroid'
```

```
[Input1]
Name='level'
Range=[-1 1]
NumMFs=3
MF1='high':'gaussmf',[0.3 -1]
MF2='okay':'gaussmf',[0.3 0]
MF3='low':'gaussmf',[0.3 1]
```

```
[Input2]
Name='rate'
Range=[-0.1 0.1]
NumMFs=3
MF1='negative':'gaussmf',[0.03 -0.1]
MF2='none':'gaussmf',[0.03 0]
MF3='positive':'gaussmf',[0.03 0.1]
```

```
[Output1]
Name='valve'
Range=[-1 1]
NumMFs=5
MF1='close_fast':'trimf',[-1 -0.9 -0.8]
MF2='close_slow':'trimf',[-0.6 -0.5 -0.4]
MF3='no_change':'trimf',[-0.1 0 0.1]
MF4='open_slow':'trimf',[0.2 0.3 0.4]
MF5='open_fast':'trimf',[0.8 0.9 1]
```

```
[Rules]
2 0, 3 (1) : 1
3 0, 5 (1) : 1
1 0, 1 (1) : 1
2 3, 2 (1) : 1
2 1, 4 (1) : 1
```

Dziedzina i zakres relacji

$$\mu_{dom(R)}(x) = \max_{y \in B} \mu_R(x, y)$$

$$\mu_{ran(R)}(y) = \max_{x \in A} \mu_R(x, y)$$

$$dom(R) \subseteq A$$

$$ran(R) \subseteq B$$

Rozmyte macierze i operacje

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$A + B = \text{Max}\,[a_{ij},\, b_{ij}]$$

$$A \bullet B = AB = \underset{k}{\text{Max}}\,[\,\text{Min}\,(a_{ik},\, b_{kj})\,]$$ kompozycja

$$\lambda A \quad \text{where } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Przykład

$$A = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & \boxed{0.2 \quad 0.5 \quad 0.0} \\ b & 0.4 & 1.0 & 0.1 \\ c & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1.0 & 0.1 & 0.0 \\ b & 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ c & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{array}$$

$$A + B = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ b & 0.4 & 1.0 & 0.5 \\ c & 0.0 & 1.0 & 0.1 \end{array} \qquad A \bullet B = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0.2 & 0.1 & 0.5 \\ b & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ c & 0.0 & 0.0 & 0.5 \end{array}$$

$$C_{12} = 0.1 \qquad \begin{array}{lccccc} & 0.2 & 0.5 & 0.0 & & \\ & 0.1 & 0.0 & 1.0 & & \\ Min \Downarrow & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & & \\ & 0.1 & 0.0 & 0.0 & \underset{Max}{\Rightarrow} & 0.1 \end{array}$$