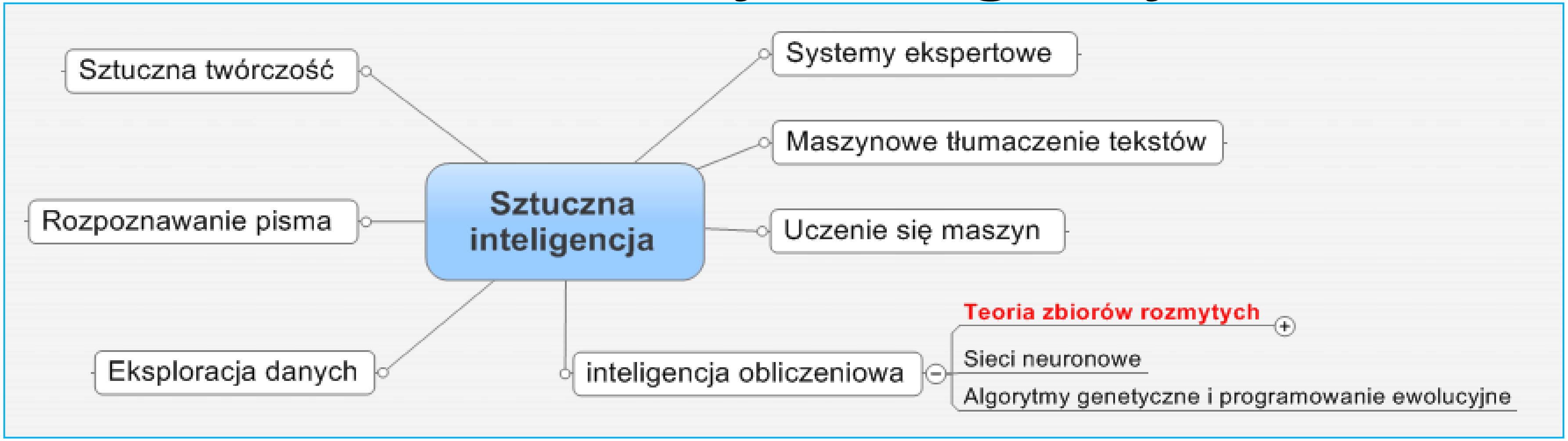
Logika rozmyta

Oleksandr Sokolov

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
UMK
http://fizyka.umk.pl/~osokolov/LR/

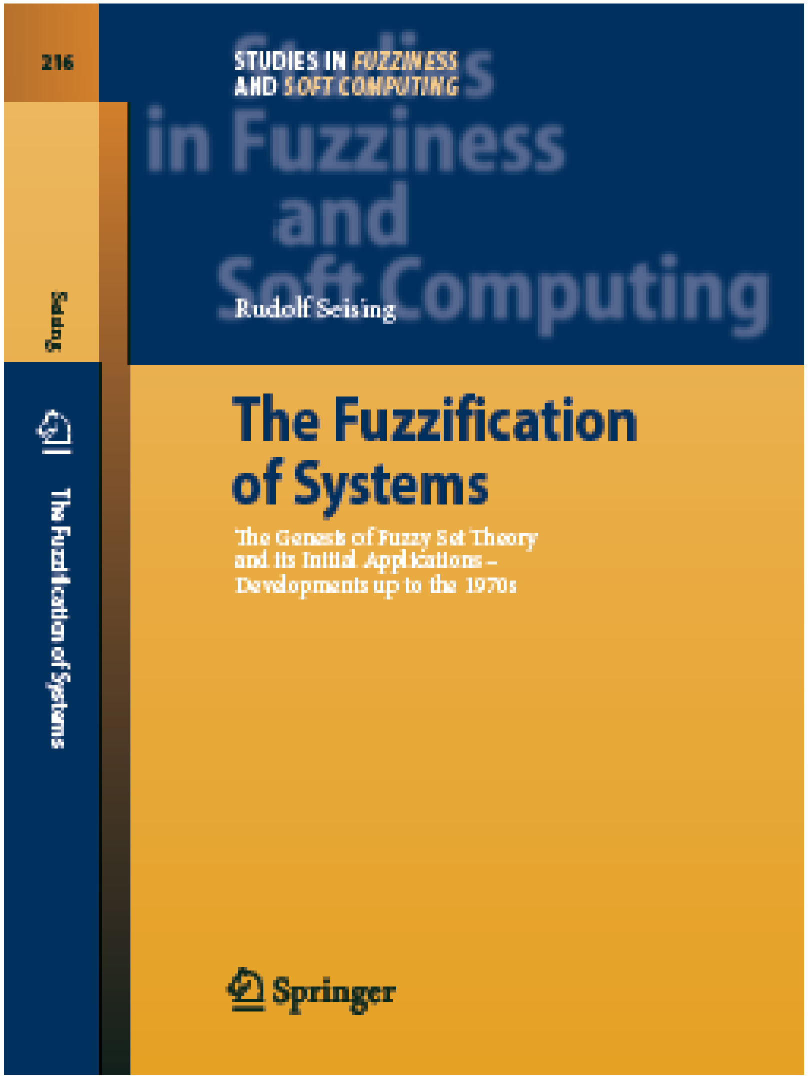
Miejsce teorii logiki rozmytej w sztucznej inteligencji



Sztuczna inteligencja w ogólnym zamierzeniu powinna być **więc pewnym odwzorowaniem inteligencji ludzkiej** (inteligencji naturalnej). Sztuczna inteligencja to dziedzina badań naukowych na styku neurologii, neurofizjologii, psychologii, biopsychologii, kognitywistyki, systemiki, filozofii, matematyki i informatyki.

Głównym zadaniem badań nad sztuczną inteligencją w drugim znaczeniu jest **konstruowanie maszyn i programów komputerowych** zdolnych do realizacji wybranych funkcji umysłu i ludzkich zmysłów **niepoddających się prostej numerycznej algorytmizacji**. Problemy takie bywają nazywane **AI-trudnymi** i zalicza się do nich między innymi: podejmowanie decyzji w warunkach braku wszystkich danych, analiza i synteza języków naturalnych, rozumowanie logiczne/racjonalne, automatyczne dowodzenie twierdzeń, gry logiczne, zarządzanie wiedzą, preferencjami i informacją w robotyce, systemy eksperckie i diagnostyczne.

Historia teorii



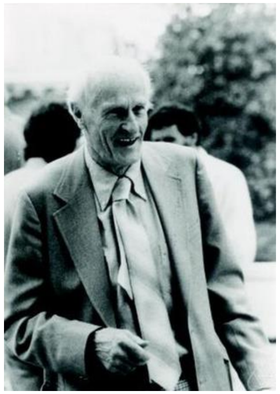
- **Prehistoria**
  1920-1960
- **Geneza**
  1960+
- **Pierze zastosowania**
  1970+
- **Rozwój teorii zbiorów rozmytych jako naukowego paradygmatu**
  1980+

Prehistoria

- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych

Jan Łukasiewicz

Emil Leon Post



Stephen Cole Kleene

Karl Schröter

Zygmunt Zawirski

Logika Łukasiewicza

Profesor Łukasiewicz zaproponował trójwartościową logikę (1917) oraz notację polską (1920)

(**F**, false; **U**, unknown; **T**, true)

Jan Łukasiewicz

(1878-1956)

NOT(A)

A	¬A
F	T
U	U
T	F

AND(A, B)

A ∧ B		B		
		F	U	T
A	F	F	F	F
	U	F	U	U
	T	F	U	T

OR(A, B)

A ∨ B		B		
		F	U	T
A	F	F	U	T
	U	U	U	T
	T	T	T	T

Notacji:
konwencjonalna (infiksowa)
odwrotną **notacja polska** (postfiksowa)

+ 2 2 ⟺ 2+2

Infix = m*n+(p-q)+r

Postfix = mn*pq-+r+

Geneza. Lotfi A. Zadeh, 1965: Fuzzy Sets

INFORMATION AND CONTROL 8, 338–353 (1965)

Fuzzy Sets*

L. A. Zadeh

Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California

A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership (characteristic) function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one. The notions of inclusion, union, intersection, complement, relation, convexity, etc., are extended to such sets, and various properties of these notions in the context of fuzzy sets are established. In particular, a separation theorem for convex fuzzy sets is proved without requiring that the fuzzy sets be disjoint.

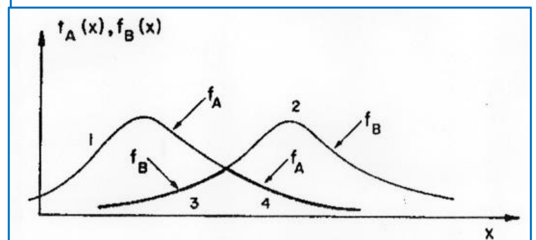
I. INTRODUCTION

More often than not, the classes of objects encountered in the real physical world do not have precisely defined criteria of membership. For example, the class of animals clearly includes dogs, horses, birds, etc. as its members, and clearly excludes such objects as rocks, fluids, plants, etc. However, such objects as starfish, bacteria, etc. have an ambiguous status with respect to the class of animals. The same kind of ambiguity arises in the case of a number such as 10 in relation to the "class" of all real numbers which are much greater than 1.

Clearly, the "class of all real numbers which are much greater than 1," or "the class of beautiful women," or "the class of tall men," do not constitute classes or sets in the usual mathematical sense of these terms. Yet, the fact remains that such imprecisely defined "classes" play an important role in human thinking, particularly in the domains of pattern recognition, communication of information, and abstraction.

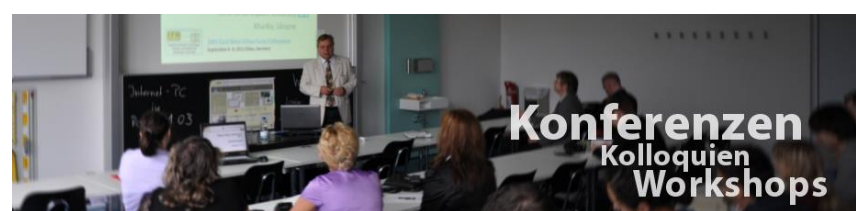
The purpose of this note is to explore in a preliminary way some of the basic properties and implications of a concept which may be of use in

* This work was supported in part by the Joint Services Electronics Program (U.S. Army, U.S. Navy and U.S. Air Force) under Grant No. AF-AFOSR-139-64 and by the National Science Foundation under Grant GP-2413.



Lotfi A. Zadeh

Zittau Fuzzy Colloquium, 2003-2012



Teoria logiki rozmytej

- Teoria logiki rozmytej (ang. fuzzy logic) została opracowana przez L. Zadeha w 1965 roku.
- Jest to logika wielowartościowa.
- Powodem, dla którego została stworzona była potrzeba opisania zjawisk i pojęć, które mają charakter **wieloznaczny i nieprecyzyjny**. Wcześniejsze metody matematyczne oparte na **klasycznej teorii zbiorów i logice dwuwartościowej** nie były w stanie rozwiązać tego typu problemów.

Dobór silnika do ramienia robota

Silniki stosowane w ramionach robotów są jednym z największych wyzwań technologicznych współczesnej branży napędów elektrycznych. Nie mniejszym wyzwaniem jest ich zasilanie i sterowanie w układzie aplikacyjnym.
Jedne z najciekawszych realizowanych w ostatnim czasie projektów konstrukcji i doboru napędów elektrycznych dotyczą silników dedykowanych do przegubów ramion robotów przemysłowych.

Głównym ograniczeniem projektowym tego typu maszyn jest to, że muszą być one ostatecznie zamontowane bezpośrednio na obsługiwanym ramieniu, a zatem powinny być **jak najmniejsze i najlżejsze**. Dlatego też dąży się do uzyskania w nich jak **największego momentu obrotowego**, przy zachowaniu **optymalnych rozmiarów i wagi napędu**.
Z wieloletniej już praktyki w tym zakresie wynika, że najlepszymi konstrukcyjnie silnikami do tego typu aplikacji są silniki typu BLDC (ang. Brush Less Direct-Current motor) – bezszczotkowe, prądu stałego, z magnesami trwałymi. Cechuje je **bardzo wysoki wskaźnik gęstości mocy** i praktycznie bezobsługowość, za wyjątkiem uszkodzeń mechanicznych np. łożysk. Jeżeli chodzi o kwestie związane z odpowiednim wysterowaniem tego typu silników muszą one pracować przy stosunkowo **niskich napięciach stałych**, dlatego najlepszym rozwiązaniem wydaje się wykorzystanie do tego celu tradycyjnego mostka trójfazowego MOSFET.

h

Table 2. Specification of 3-phase BLDC motors.

Parameter	Type 1	Type 2	Type 3
Joint	J1–J4	J5/J7	J6
Weight	1050 g	150 g	150 g
Voltage	24 V	24 V	24 V
Rated speed	1000 rpm	4840 rpm	4840 rpm
Rated current	3.6 A	3.26 A	3.26 A
Rated torque	0.6 N·m	0.13 N·m	0.13 N·m
Torque constant	0.16 N·m/A	0.037 N·m/A	0.037 N·m/A
Motor poles	4 pairs	8 pairs	8 pairs
Resolution	24 pulse/rev	48 pulse/rev	48 pulse/rev
Gear rate	1:80	1:50	1:120
Min. joint resolution	0.1875°	0.15°	0.0625°
Max. joint speed	75°/s	576°/s	242°/s

(a) (b) (c)

https://www.researchgate.net/publication/334564813_A_Sensorless_and_Low-Gain_Brushless_DC_Motor_Controller_Using_a_Simplified_Dynamic_Force_Compensator_for_Robot_Arm_Application/figures?lo=1

Rodzaje niepewności

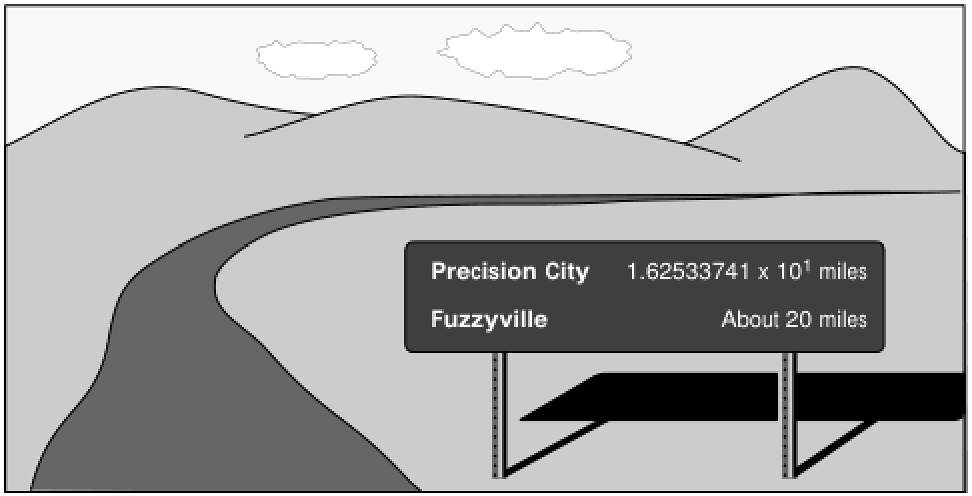
- Niepewność stochastyczna:
  Np. rzut kostką, wypadek, ryzyko ubezpieczenia
  - rachunek prawdopodobieństwa.

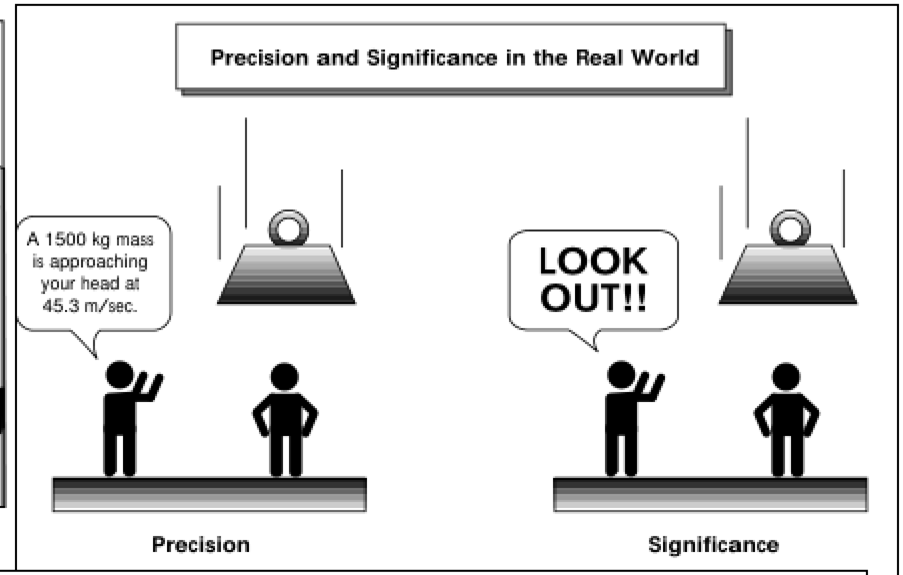
- Niepewność pomiarowa :
  Około 3 cm; 20 punktów - statystyka.

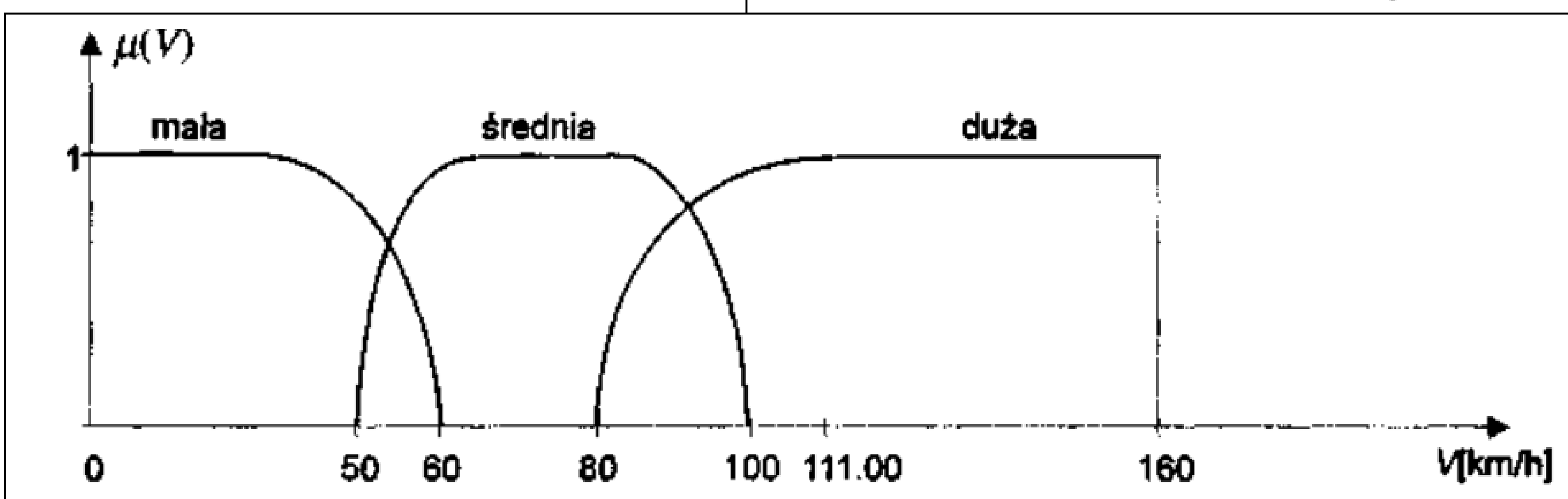
- Niepewność informacyjna:
  Wiarygodny kredytobiorca, spełniający warunki
  - data mining, szukanie prawidłowości, skojarzeń.

- Niepewność lingwistyczna:
  Np. mały, szybki, niska cena ...

Czy precyzja jest zawsze istotna?







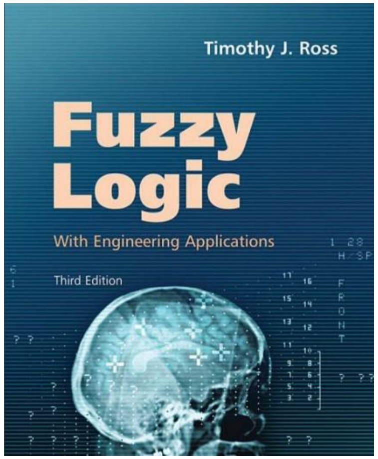
Zastosowanie logiki rozmytej

Intensywny rozwój logiki rozmytej na całym świecie daje się zauważyć zwłaszcza na początku lat dziewięćdziesiątych. Logika rozmyta znajduje bardzo szerokie i różnorodne zastosowania zarówno w elektronice, systemach sterowania jak i w medycynie czy w różnych gałęziach przemysłu. Poniżej wymienione są niektóre aplikacje obrazujące możliwości wykorzystania logiki rozmytej:

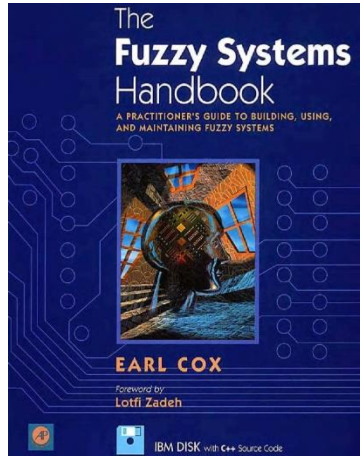
układy sterowania rozrusznika serca
układ sterowania samochodu
bojler wodny
reaktory i urządzenia chemiczne
urządzenia chłodnicze
urządzenia klimatyzacyjne i wentylacyjne
urządzenia do spalania śmieci
piec do wytopu szkła
układ sterowania ciśnienia krwi
urządzenia diagnostyki nowotworowej
system ostrzegawczy chorób serca
układ sterowania suwnicą lub dźwigiem
stacja pomp
przetwarzanie obrazów
urządzenia szybkiego ładowania akumulatorów

rozpoznawanie słów
terapia diabetyczna, sterowanie poziomu cukru we krwi
układ energetyczny
urządzenia do obróbki metali
sterowanie bioprocesorów
urządzenia grzewcze
sterowanie silników elektrycznych
urządzenia i procesy spawalnicze
sterowanie ruchu
biomedycyna
urządzenia do czyszczenia pomieszczeń
urządzenia do odszlamiania
urządzenia do oczyszczania wody
układy autopilotów samolotów i okrętów

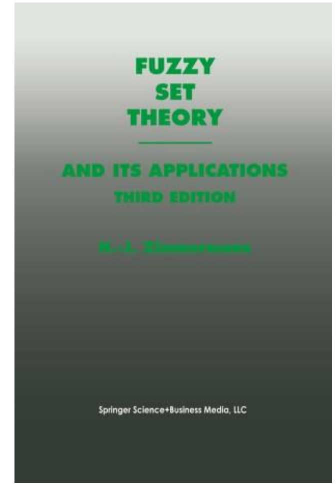
Literatura



http://iauctb.ac.ir/Files/%D9%88%D8%A8%20%D8%B3%D8%A7%DB%8C%D8%AA%20%D8%A7%D8%B3%D8%A7%D8%AA%DB%8C%D8%AF/fuzzy%20logic%20with%20engineering%20application-3rdEdition.pdf



https://www.academia.edu/12882446/The_Fuzzy_Systems_Handbook_A_Practitioner_s_Guide_to_Building_Using_and_Maintaining_Fuzzy_Systems

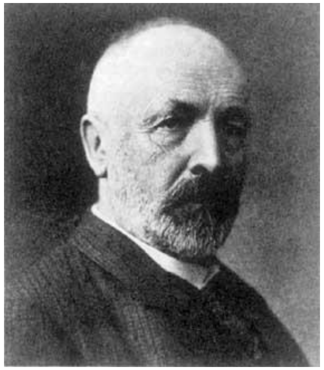


https://www.academia.edu/31545737/Fuzzy_Set_Theory_and_Its_Applications_Fourth_Edition

Literatura podstawowa:

1. Piegat A.. Modelowanie i sterowanie rozmyte. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 1999.
2. Babuszka R. Fuzzy modeling for control. Kluwer Academic Publisher, Boston, 1998.
3. Kacprzyk J. Zbiory rozmyte w analizie systemowej. Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa, 1994.
4. Zadeh L.A. Fuzzy sets, Information and control, 8, 338-353 (1968)

Zbiory klasyczne



Georg Cantor, niemiecki matematyk (1845-1918)

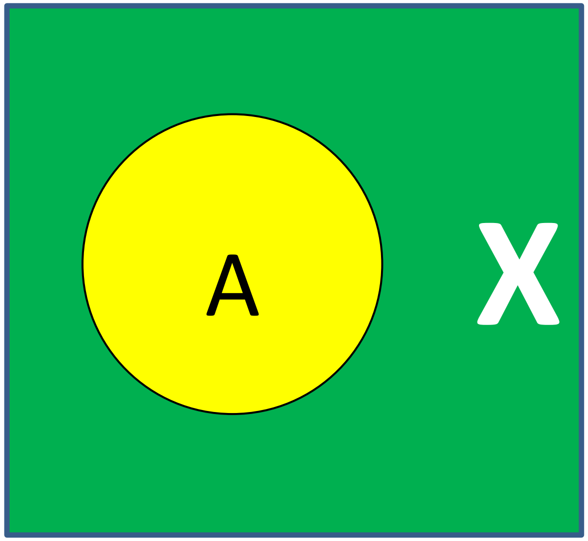
***X* – uniwersum, zbiór uniwersalny, przestrzeń**;

$x \in X$ – element zbioru,

***A* – zbiór klasyczny, określony na uniwersum X**.

Funkcja charakterystyczna określa czy $x \in X$ należy do *A*.

$$\mu_A : X \to \{0,1\}$$



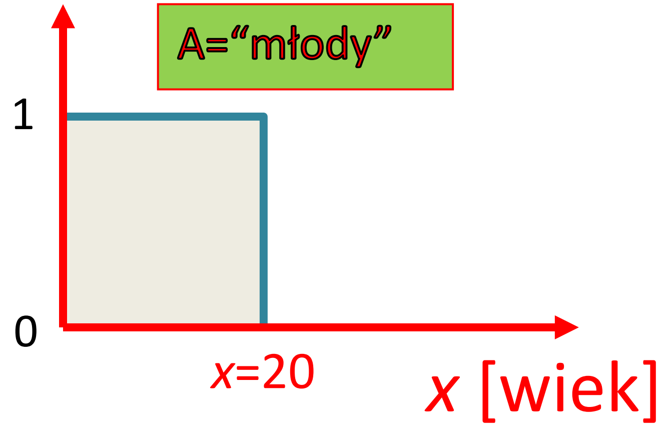
Przykład

X=[0,100] - wiek

A=„młody” = $\{ x \in X \mid x \leq 20 \}$

Funkcja charakterystyczna

$$\mu_{młody}(x) = \begin{cases} 1 : x \leq 20 \\ 0 : x > 20 \end{cases}$$



Elementy teorii zbiorów

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ Zbiór A należy do uniwersum X

$A \not\subseteq X$ Zbiór A nie należy do uniwersum X

$x \in A$ Element x należy do zbioru A

$x \notin A$ Element x nie należy do zbioru A

$A = \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$ Reprezentacja zbioru przez listę elementów

$B = \{b \mid b \text{ satisfies } p_1, p_2, \ldots , p_n\}$ Reprezentacja zbioru przez warunki p

$|A|$ Liczba kardynalna (cardinality) – ilość elementów zbioru

Relacje między zbiorami

$\{A_i \mid i \in I\}$ Rodzina zbiorów

$A \subseteq B$ iff (if and only if) $x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$A \subseteq B$ and $A \neq B \Rightarrow A \subset B$

$\varnothing$ Zbiór pusty (jest jednym z podzbiorów każdego zbioru)

Funkcja przynależności do zbioru (charakterystyczna funkcja)

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{if and only if} \quad x \in A$$
$$0 \quad \text{if and only if} \quad x \notin A.$$

$$\mu_A : X \to \{0,1\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Moc zbioru A – ilość podzbiorów A

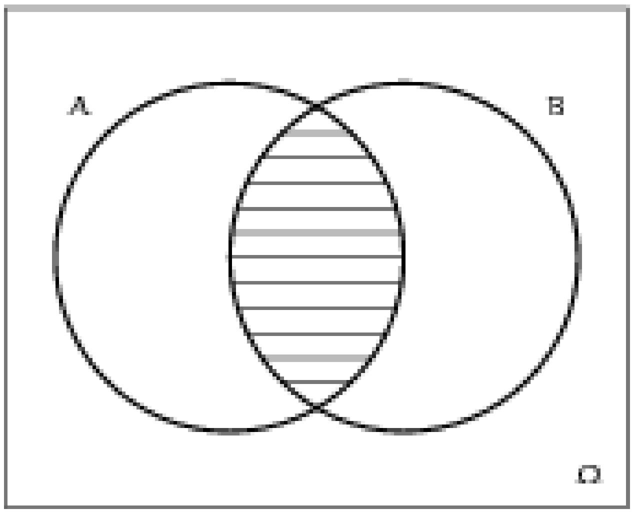
If $A = \{a, b, c\}$, then $|A| = 3$

P(A)={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

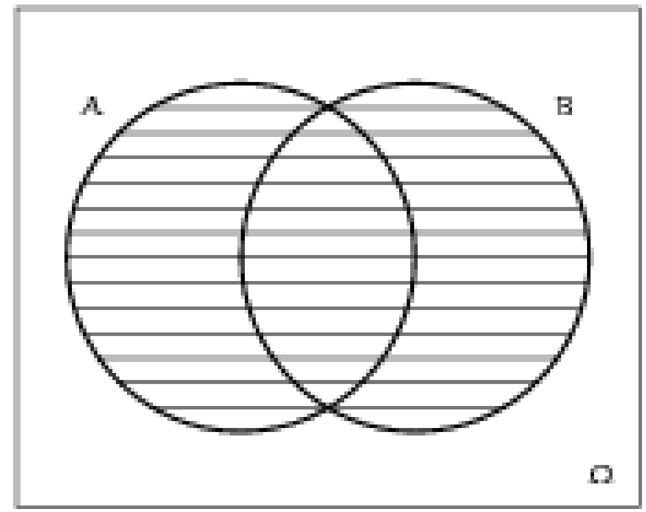
$$|P(A)| = 2^3 = 8.$$

Zbiory nieskończone przeliczalne, tj. takie, które są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych mają moc **N.** Zbiory nieprzeliczalne, np. [0,1] mają moc $2^{\mathbf{N}}$

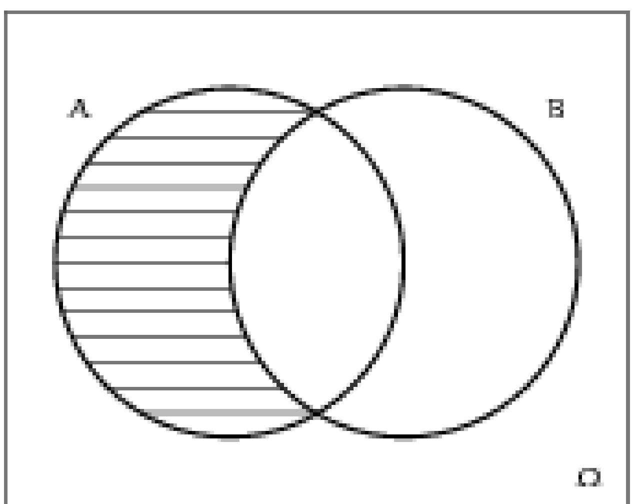
Operacji na zbiorach klasycznych (Diagram Venna)



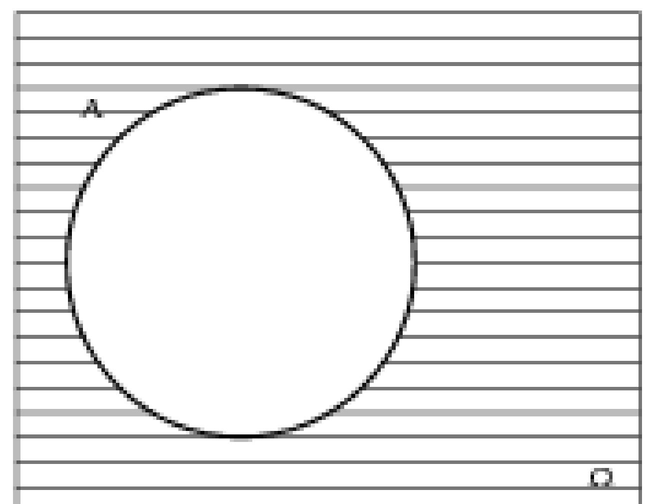
(a) $A \cap B$



(b) $A \cup B$



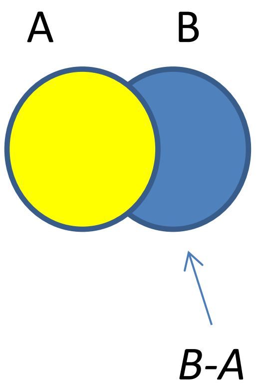
(c) $A \setminus B$



(d) $\bar{A}$

Dopełnienie zbiorów

$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

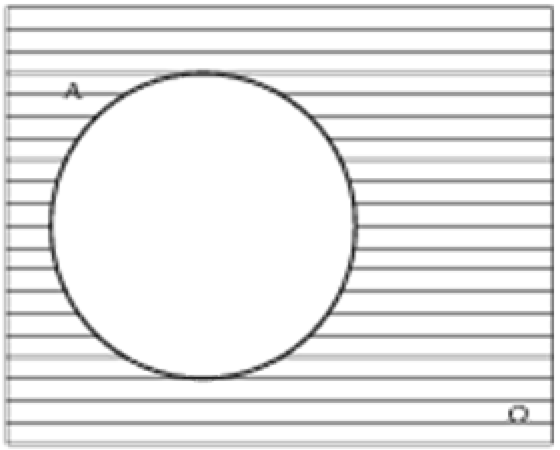


$$\overline{A} = X - A$$

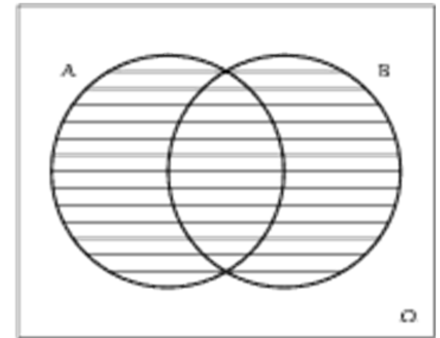
$$\overline{\emptyset} = X$$

$$\overline{X} = \emptyset$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$



Suma zbiorów



(b) $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A = \{x \mid x \in A_i \ \text{ for some } i \in I\} \quad \{A_i \mid i \in I\}$$

$$A \cup X = X$$

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cup \overline{A} = X.$$

Przecięcie zbiorów

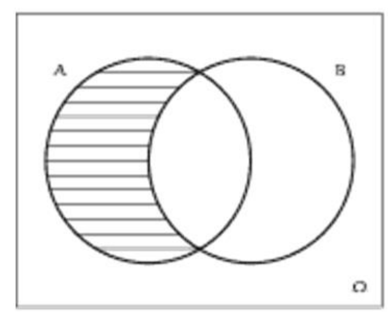
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \quad \forall i \in I\} \quad \{A_i \mid i \in I\}$$

$$A \cap X = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$



(c) A \ B

$$A \cap B = \varnothing$$ Nie mają wspólnych elementów

Rozbicie zbioru

$$\pi(A) = \{A_i \mid i \in I,\ A_i \subseteq A\}$$

i) $A_i \neq \varnothing$

ii) $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j \in I$

iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Właściwości zbiorów klasycznych

Inwolucja (podwójna negacja)	$A = \neg(\neg A)$
Przemienność	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Łączność	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Rozdzielność	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencja	$A = A \cap A$, $A = A \cup A$
Pochłanianie (absorpcja)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Właściwości zbiorów klasycznych (cd)

Pochłanianie dopełnienia	$A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\neg A \cup B) = A \cap B$
Pochłanianie przez $\varnothing$ i U	$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identyczność	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Prawo zaprzeczenia	$A \cap \neg A = \varnothing$
Prawo wyłączonego środka	$A \cup \neg A = U$
Prawa de Morgana	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

U – uniwersum do którego należą rozważane zbiory A, B i C

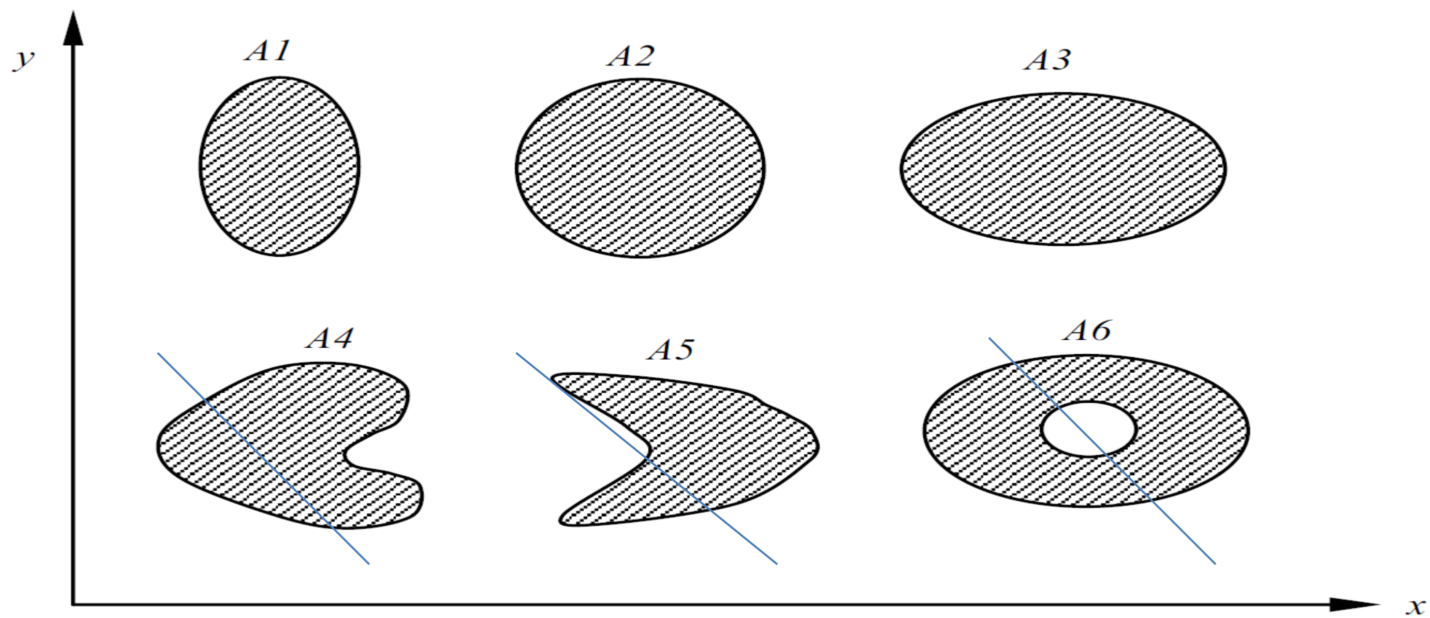
$\varnothing$ - zbiór pusty, jego funkcja charakterystyczna jest stała i równa zero

Zbiory wypukłe

Zbiór wypukły – podzbiór pewnej przestrzeni zawierający wraz z dowolnymi dwoma jego punktami odcinek je łączący

$$r = (r_i \mid i \in N_n), \quad s = (s_i \mid i \in N_n)$$ r,s∈A

$$t = (\lambda r_i + (1-\lambda)s_i \mid i \in N_n)$$ λ∈[0,1]



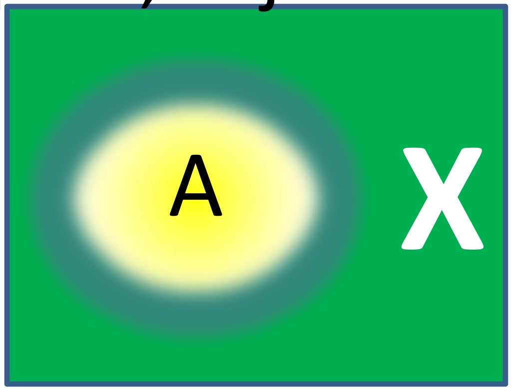
Zbiory rozmyte

X – uniwersum, zbiór uniwersalny, przestrzeń; $x \in X$ – *element zbioru,*

***A* – zbiór rozmyty, określony na uniwersum X.**

Funkcja przynależności określa **stopień**, w jakim *x* należy do *A*.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$



Funkcja przynależności(μ) - ***uogólniona postać funkcji charakterystycznej zbioru***, określona na zbiorach rozmytych. W zbiorach klasycznych przyjmuje wartość 1, gdy element w pełni należy do zbioru albo 0, gdy nie należy wcale. W teorii zbiorów rozmytych element może należeć do zbioru w pewnym stopniu, więc funkcja przynależności może przyjmować wartości z całego przedziału jednostkowego [0,1].

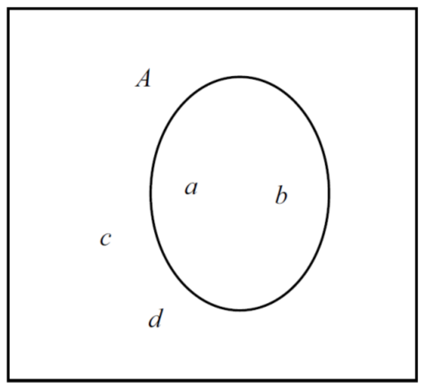
Przykład

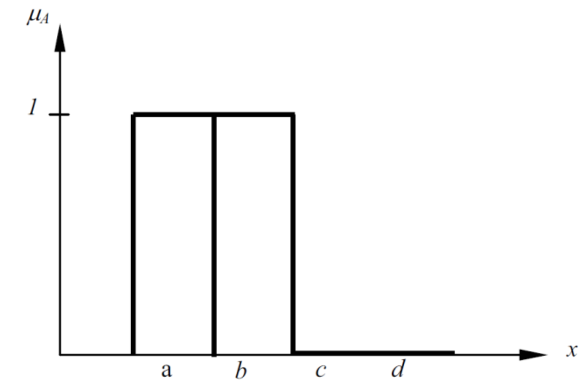
A – Liczba ‚Dwa lub trochę więcej’

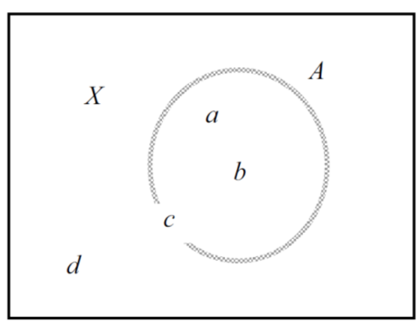
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

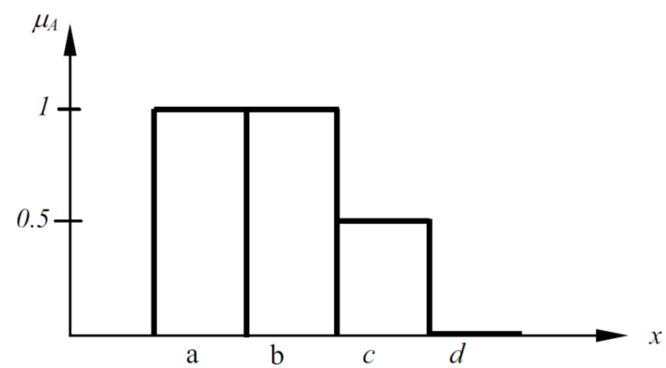
$$\mu_A(1) = 0, \mu_A(2) = 1, \mu_A(3) = 0.5, \mu_A(4) = 0\ldots$$

Zbiór klasyczny vs rozmyty









Notacja

$$A = \{(x,\ \mu_A(x))\}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) / x_i$$

$$A = \{(2,\ 1.0), (3,\ 0.5)\}$$

$$A = 1.0/2 + 0.5/3$$

Sposób wyznaczenia funkcji przynależności przez listę elementów zbioru

$$X = \left\{ x_1, x_1, \cdots, x_N \right\}$$

$$A = \left(\mu_A(x_1) / x_1, \mu_A(x_2) / x_2, \ldots, \mu_A(x_N) / x_N \right)$$

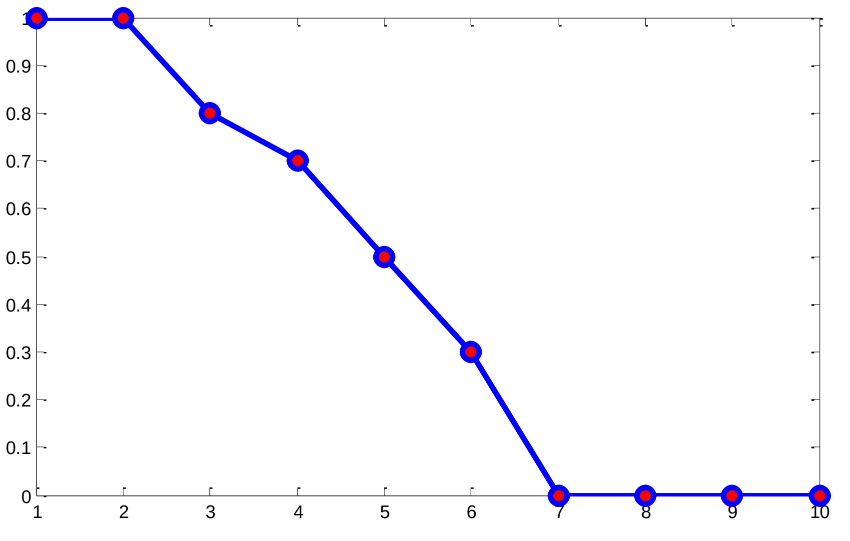
$$\mu_A(x_i) \in [0,1]$$

Przykład

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

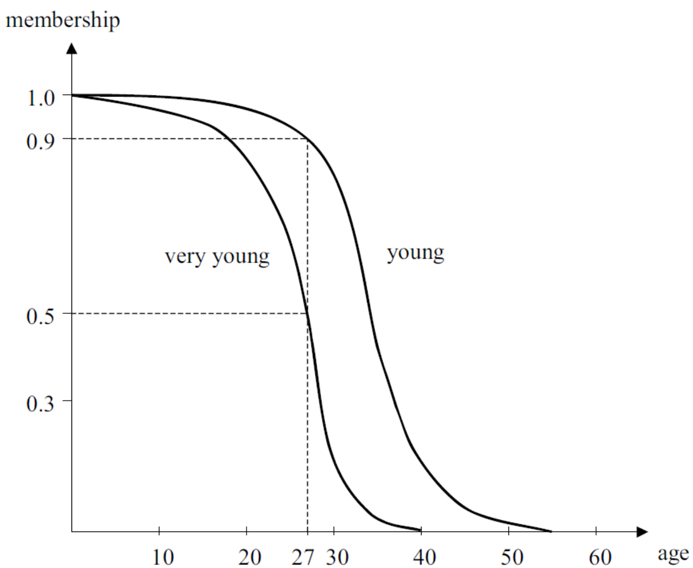
$$A = \text{"}liczba\ mała\text{"} = \begin{pmatrix} 1/1, 1/2, 0.8/3, 0.7/4, 0.5/5 \\ 0.3/6, 0/7, 0/8, 0/9, 0/10 \end{pmatrix}$$

```
>>x=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
>> mu=[1 1 0.8 0.7 0.5 0.3 0 0 0 0];
A=[x ;mu]‘
   1.0000    1.0000
   2.0000    1.0000
   3.0000    0.8000
   4.0000    0.7000
   5.0000    0.5000
   6.0000    0.3000
   7.0000         0
   8.0000         0
   9.0000         0
  10.0000         0
```

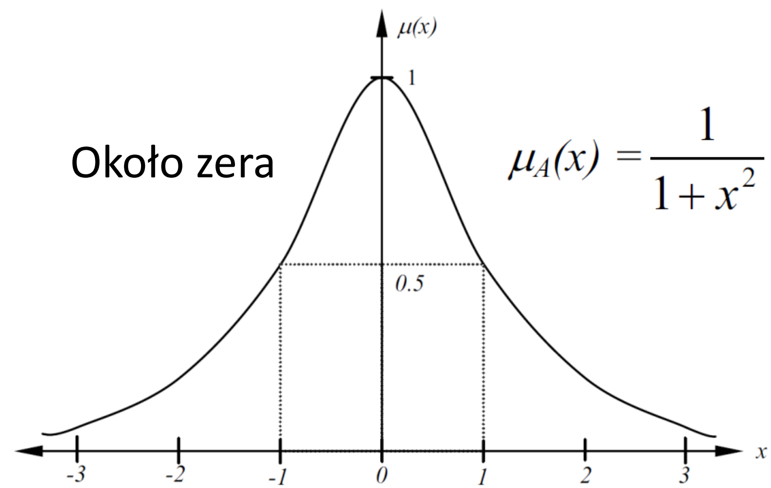


Zbiory rozmyte ciągłe

$$A = \int \mu_A(x) / x$$



Około zera

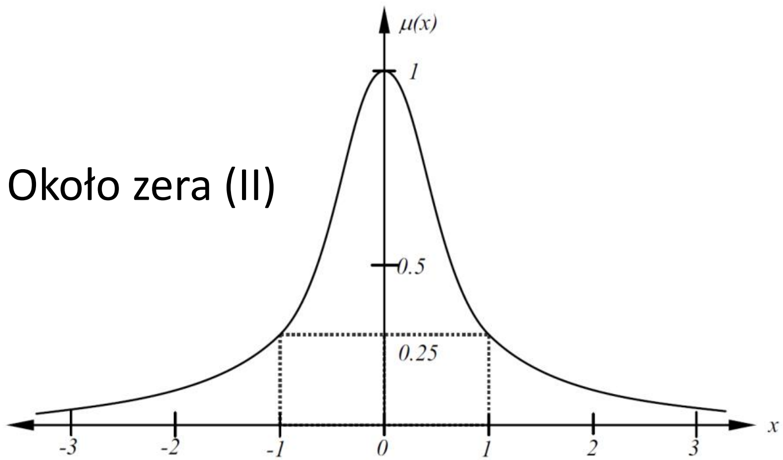


$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$A = \int \mu_A(x)/x \qquad \text{where } \mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Przykład

Około zera (II)



$$\mu_B(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2$$

Około a

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-a)^2}$$

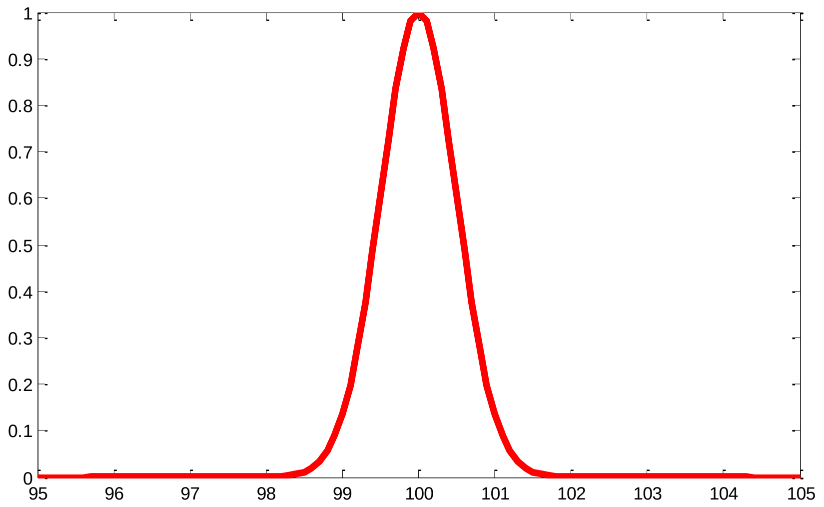
Przykład

„**Temperatura wrzenia**” ma wartość około 100 stopni (ciśnienie, skład chemiczny).

$$T = R^{+}$$

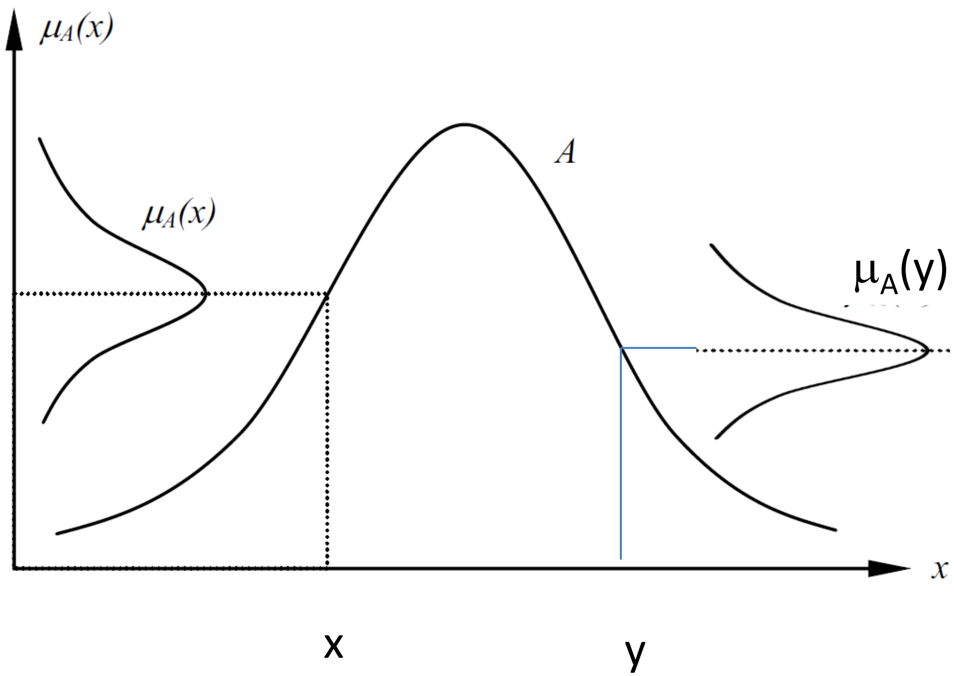
W=„Temperatura wrzenia”

$$\mu_W\left(T\right) = e^{-2\left(T-100\right)^2}$$



Zbiory rozmyte typu 2

Wartość funkcji przynależności może zawierać niepewność



A= “adult”.

$$\mu_A(x) = \text{“}youth\text{”}$$
$$\mu_A(y) = \text{“}manhood\text{”}$$
$$\mu_A(z) = \emptyset.$$

Relacja „uniwersum – zbiór rozmyty”

Zbiór rozmyty A jest **podzbiorem** uniwersum X

$$X = \{a, b, c\}$$

$$\mathrm{A}_1 = \{(\mathrm{a}, 0.5), (\mathrm{b}, 1.0), (\mathrm{c}, 0.5)\}$$

$$\mathrm{A}_2 = \{(\mathrm{a}, 1.0), (\mathrm{b}, 1.0), (\mathrm{c}, 0.5)\}$$

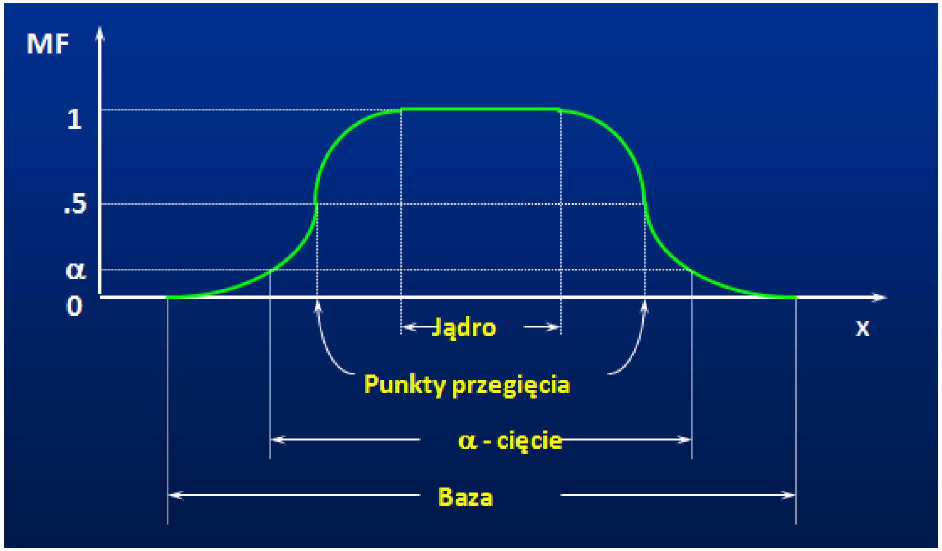
$$A_1 \subseteq X, \quad A_2 \subseteq X.$$

Przykład

$$X = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85\}$$

age(element)	infant	young	adult	senior
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

Elementy funkcji przynależności



Support (baza) zbioru rozmytego A:

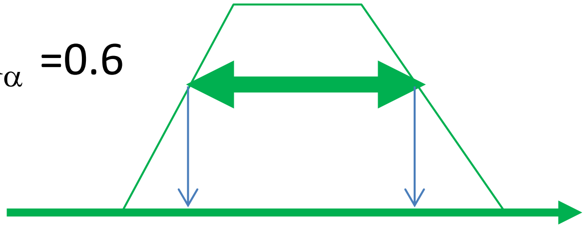
$\mathrm{supp}(A) = \{ x \in X : \mu_A(x) > 0 \}$

Core (jądro) zbioru rozmytego A:

$\mathrm{core}(A) = \{ x \in X : \mu_A(x) = 1 \}$

α-cut (α-cięcie, α-przekrój) zbioru rozmytego A:

$A_\alpha = \{ x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha \}$



Wysokość = $\max_x \mu_A(x) \leq 1$

Zbiór rozmyty **normalny**: $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$

Przykłady

$$Support(youth) = \{15, 25, 35, 45, 55\}$$

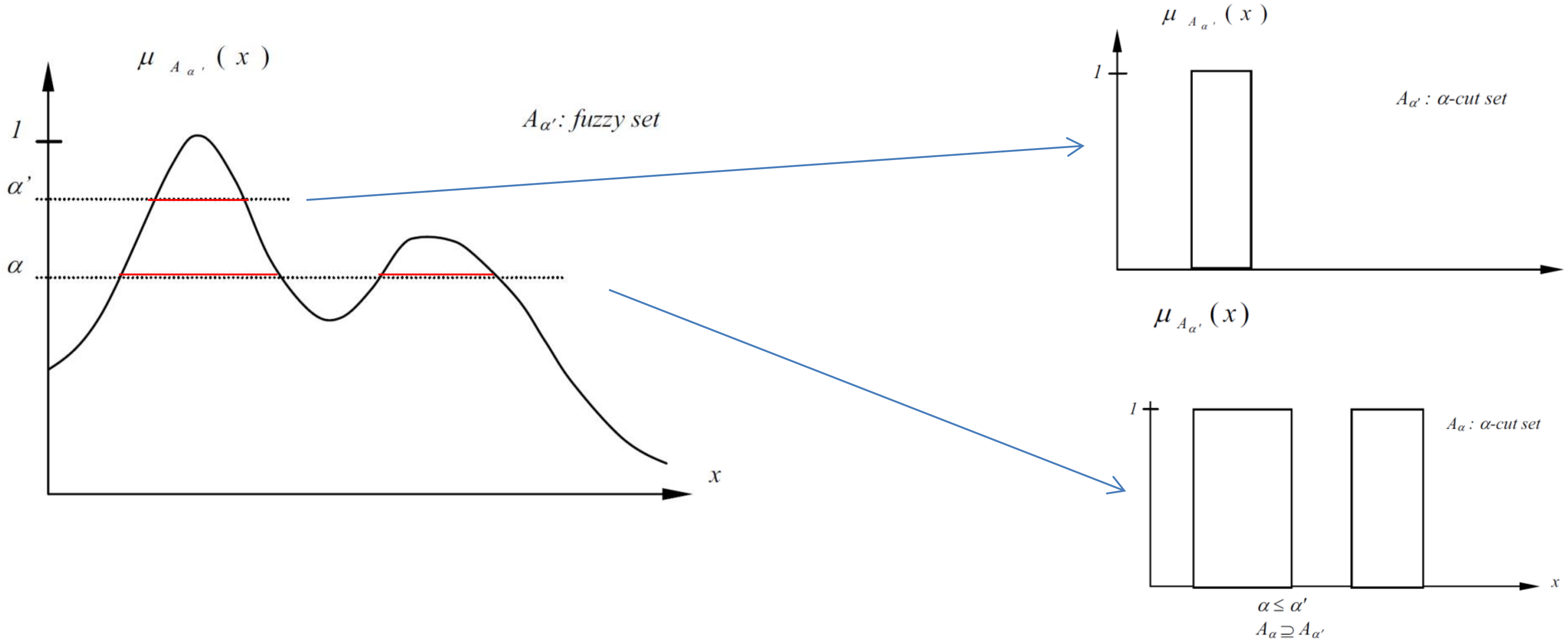
$$Young_{0.2} = \{12, 25, 35, 45\}$$

If α=0.4, $Young_{0.4} = \{25, 35, 45\}$

If α=0.8, $Young_{0.8} = \{25, 35\}$.

Właściwości α-cięcia

$$\alpha \le \alpha' \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_{\alpha'}$$



$$Young_{0.2} \supseteq Young_{0.8}$$

Zbiór warstw α

$$\Lambda_A = \{\alpha \mid \mu_A(x) = \alpha,\ \alpha \geq 0,\ x \in X\}.$$

age(element)	A= young
5	0
15	0.2
25	1
35	0.8
45	0.4
55	0.1
65	0
75	0
85	0

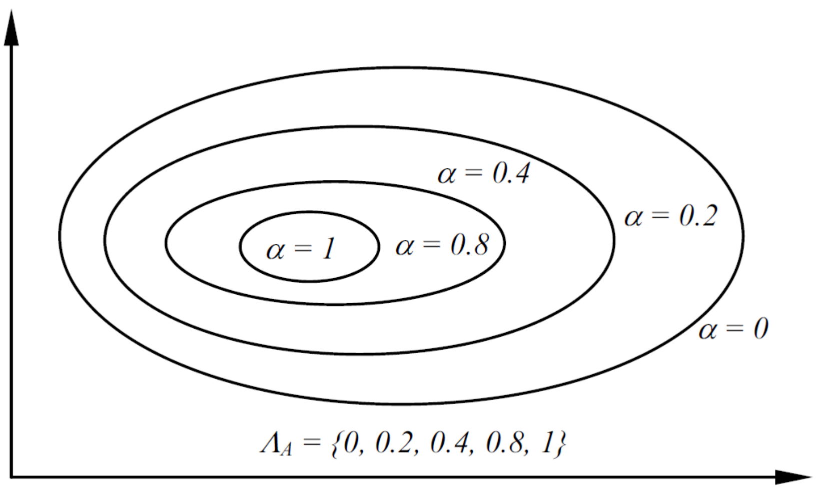
$$\Lambda_A = \{0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.0\}$$

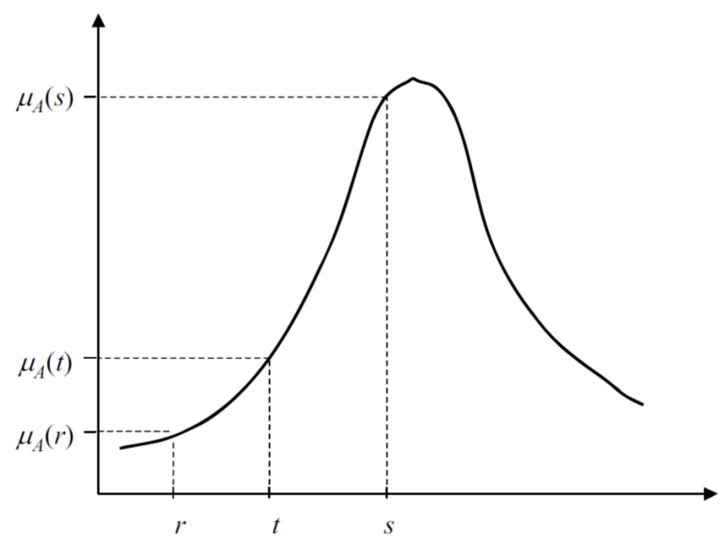
Zbiory rozmyte wypukłe

Jeżeli wszystkie α-cięcia zbioru rozmytego są wypukłe, to taki zbiór rozmyty jest wypukły

$$\mu_A(t) \geq \mathrm{Min}[\mu_A(r), \mu_A(s)]$$

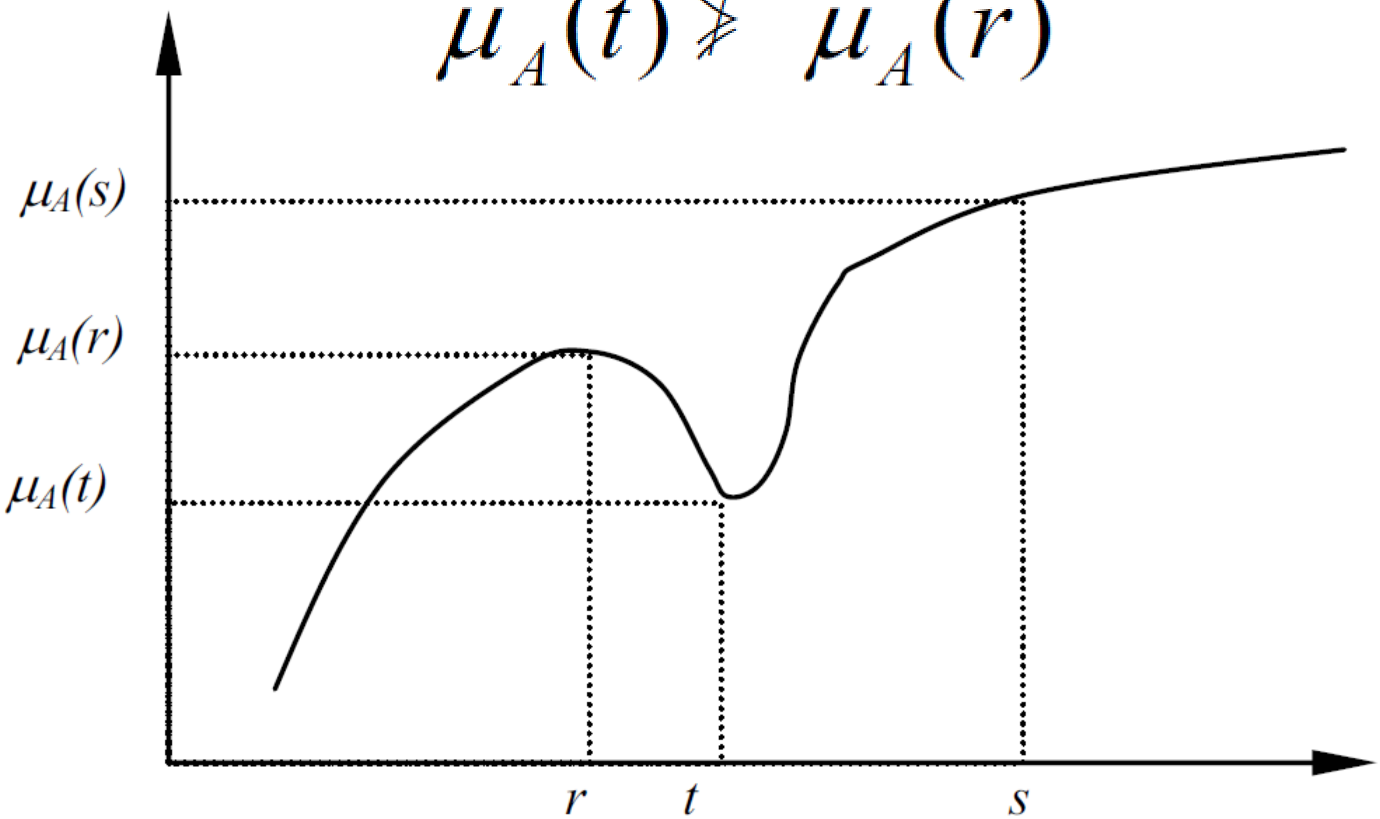
$$\text{where} \quad t = \lambda r + (1-\lambda)s \quad r,\, s \in \Re^n,\ \lambda \in [0,1]$$





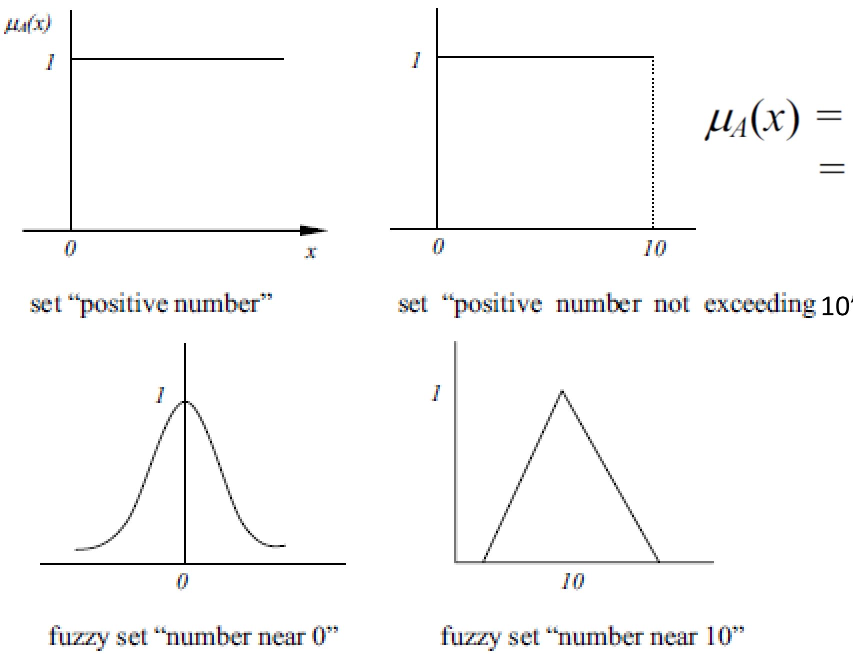
Zbiór nie wypukły

$$\mu_A(t) \ngeq \mu_A(r)$$



Liczba rozmyta

Jeśli zbiór rozmyty jest wypukły i znormalizowany, a jego funkcja przynależności jest zdefiniowana w ***R*** i ciągła odcinkowo, nazywana jest „**liczbą rozmytą**”. Zatem liczba rozmyta (zbiór rozmyty) reprezentuje przedział liczb rzeczywistych, którego granica jest rozmyta



$$\mu_A(x) = 1 \text{ if } 0 \leq x \leq 10,\ x \in \Re$$
$$= 0 \text{ if } x < 0 \text{ or } x > 10$$

Rozmiar zbioru rozmytego

Liczba kardynalna („ilość elementów”)

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

Rozmiar zbioru

$$||A|| = \frac{|A|}{|X|}$$

age(element)	infant	young	adult	senior
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

$$|senior| = 0.1 + 0.2 + 0.6 + 1 + 1 = 2.9$$

$$|senior| = 2.9,\ |X| = 9$$

$$||senior|| = 2.9/9 = 0.32$$

Rozmyta liczba kardynalna

$$\mu_{|A|}(|A_\alpha|) = \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_A$$

Liczba elementów na poziomie α-cięcia

$$senior_{0.1} = \{45, 55, 65, 75, 85\}$$

$$|senior_{0.1}| = 5$$

age(element)	infant	young	adult	senior
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

$$|\mathrm{senior}| = \{(5, 0.1), (4, 0.2), (3, 0.6), (2,1)\}$$

Podzbiór zbioru rozmytego

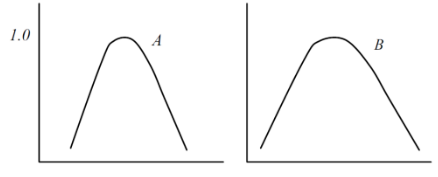
A i B są zbiorami rozmytymi

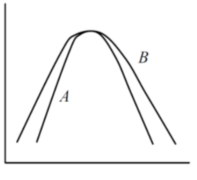
$$A = B \quad \text{iff} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X$$

$$A \neq B \Longrightarrow \mu_A(x) \neq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

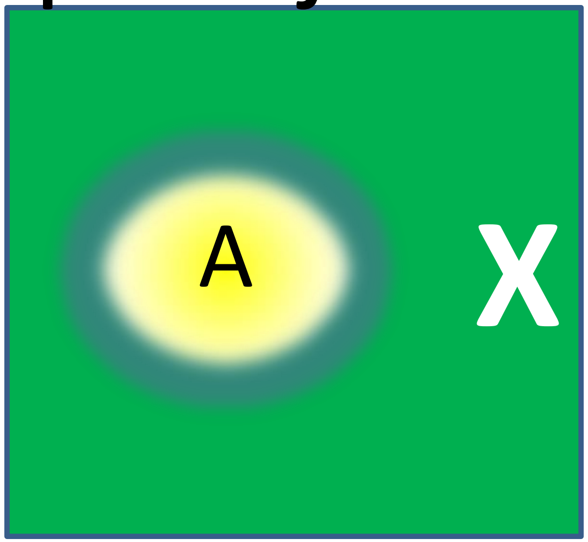
$$A \subseteq B \Longrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$$

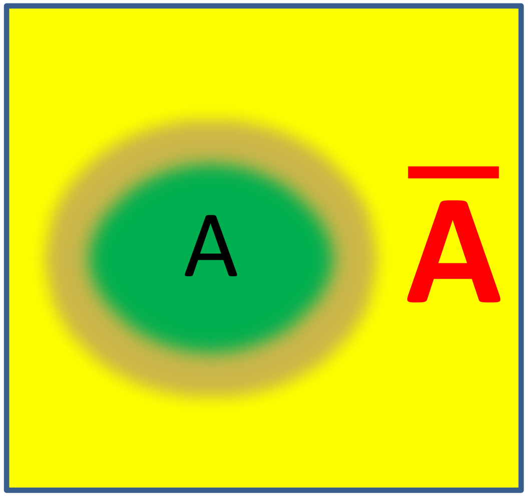
$$A \subset B \Longrightarrow \begin{cases} \mu_A(x) < \mu_B(x), \forall x \in X & \text{lub} \\ A \subseteq B \text{ and } A \neq B \end{cases}$$

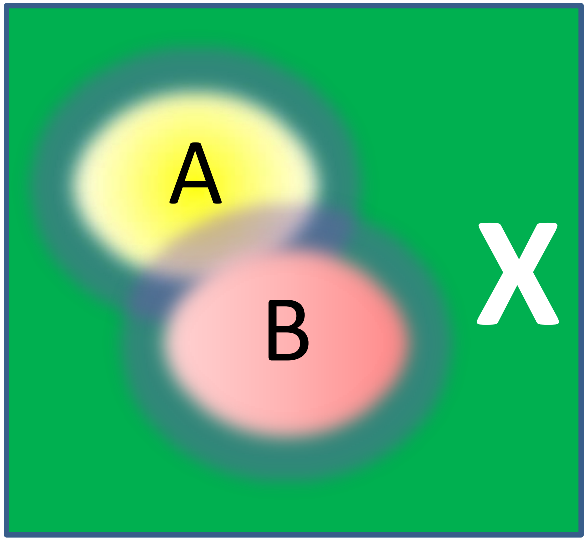




Operacji na zbiorach rozmytych







Operacje na zbiorach klasycznych/rozmytych

$\overline{A}$ $$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{Max}[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad \forall x \in X$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{Min}[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad \forall x \in X$$

Przykłady

age(element)	infant	young	adult	senior
5	0	0	0	0
15	0	0.2	0.1	0
25	0	1	0.9	0
35	0	0.8	1	0
45	0	0.4	1	0.1
55	0	0.1	1	0.2
65	0	0	1	0.6
75	0	0	1	1
85	0	0	1	1

Not „adult” $\overline{A} = \{(5, 1), (15, 0.9), (25, 0.1)\}$

$$\text{“young”} \cup \text{“adult”} = \{(15,0.2), (25,1), (35,1), (45,1), (55,1), (65,1), (75,1), (85,1)\}.$$

$$\text{”young”} \cap \text{“adult”} = \{(15, 0.1), (25, 0.9), (35, 0.8), (45, 0.4), (55, 0.1)\}$$

Dopełnienie rozmyte. Właściwości

$$C : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$C(0) = 1,\ C(1) = 0$$

$$\text{if } a < b, \text{ then } C(a) \geq C(b) \qquad a,b \in [0,1]$$

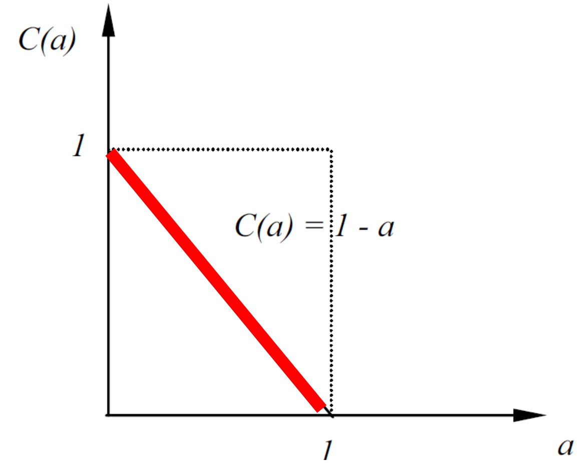
$$\mu_A(x) = a,\ \mu_A(y) = b,\ x,\ y \in X,$$

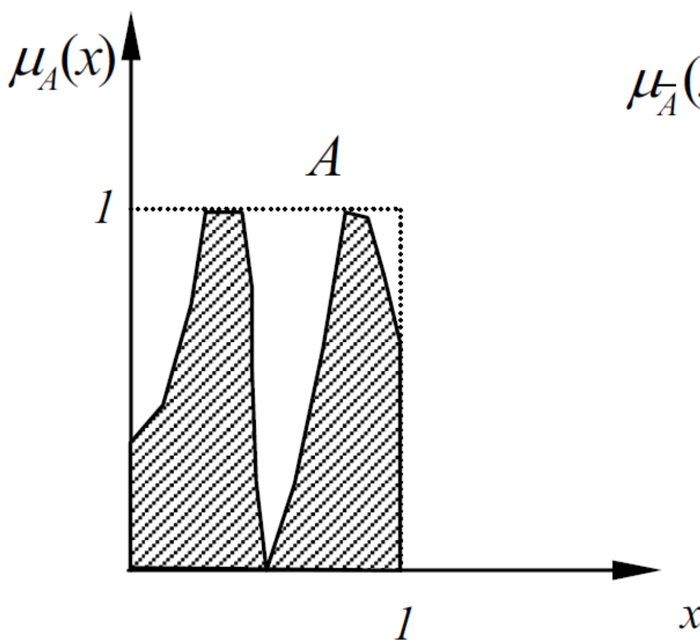
$$\text{if } \mu_A(x) < \mu_A(y),\ C(\mu_A(x)) \geq C(\mu_A(y))$$

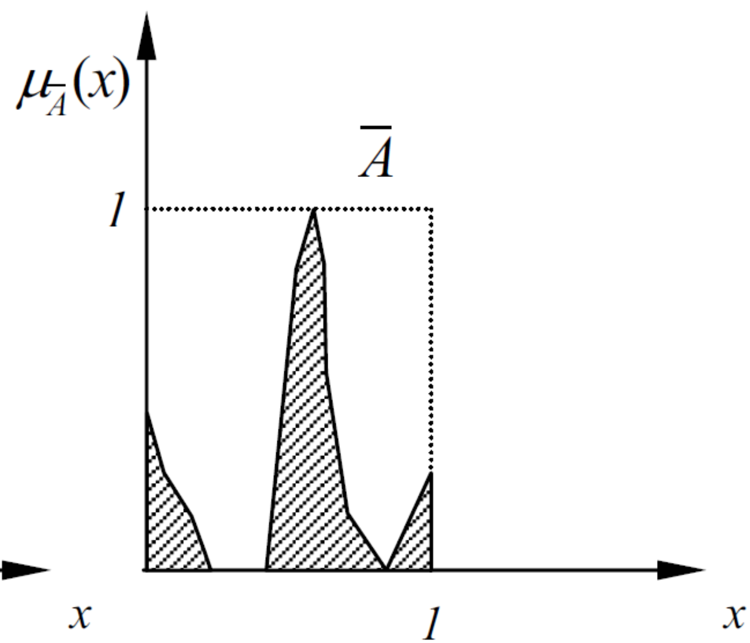
$$\boxed{C(C(a)) = a \text{ for all } a \in [0,1]}$$

Przykłady

$$C(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$

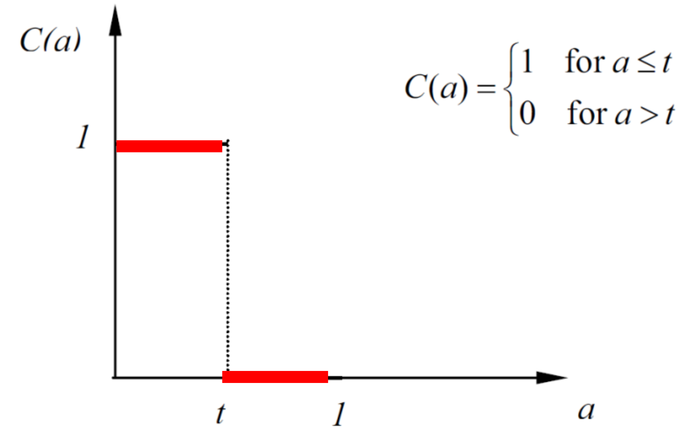






Przykłady

$$C(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a \le t \\ 0 & \text{for } a > t \end{cases}$$



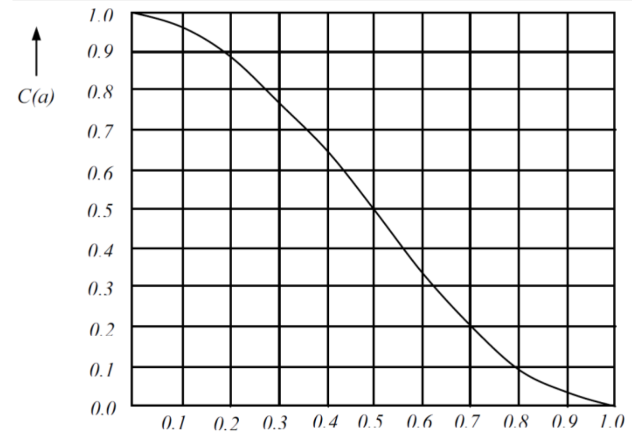
$$\boxed{C(C(a)) \neq a} \text{ for all } a \in [0,1]$$

Przykłady

$$C(a) = 0.5(1 + \cos \pi a)$$

$$a = 0.33,\ C(0.33) = 0.75$$

$$C(0.75) = 0.15 \neq 0.33$$



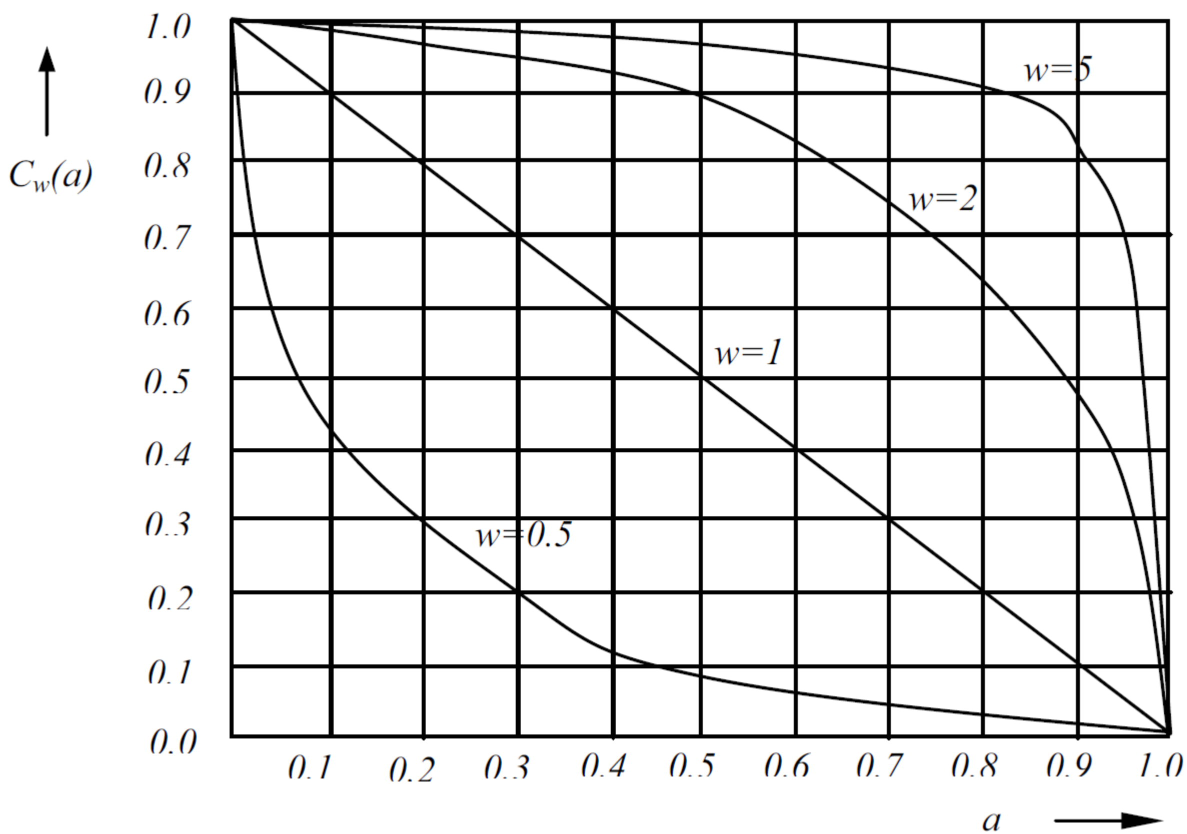
$\boxed{C(C(a)) \neq a}$ for all $a \in [0,1]$

Przykłady

Negacja Yagera

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{1/w} \quad w \in (-1, \infty)$$

Ronald Robert Yager



Podział zbiorów rozmytych

Dla zbiorów klasycznych $(A, \overline{A})$ jest podziałem uniwersum X

pod warunkiem $A \neq \emptyset$ and $A \neq X$

Dla zbiorów rozmytych $(A, \overline{A})$ jest podziałem uniwersum X

pod warunkiem $A \neq \emptyset$ and $A \neq X$

Podział zbiorów rozmytych (cd)

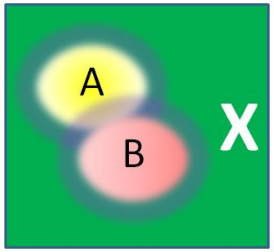
Rozmyty podział $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n})$

$$\text{i)} \quad \forall i, \quad A_i \neq \varnothing$$

$$\text{ii)} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{for} \quad i \neq j$$

$$\text{iii)} \quad \forall x \in X, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(x) = 1$$

Funkcje przynależności sumy zbiorów rozmytych



Ciągła

$$U:[0,1] \times [0,1] \xrightarrow{\text{Ciągła}} [0,1] \quad \mu_{A\cup B}(x) = U[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$

$$U(0,0) = 0,\ U(0,1) = 1,\ U(1,0) = 1,\ U(1,1) = 1$$

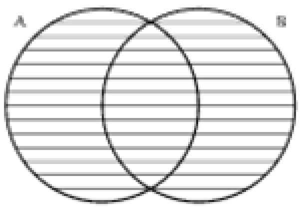
$$U(a,b) = U(b,a)$$

If $a \le a'$ and $b \le b'$, $U(a,\ b) \le U(a',\ b')$ monotoniczność

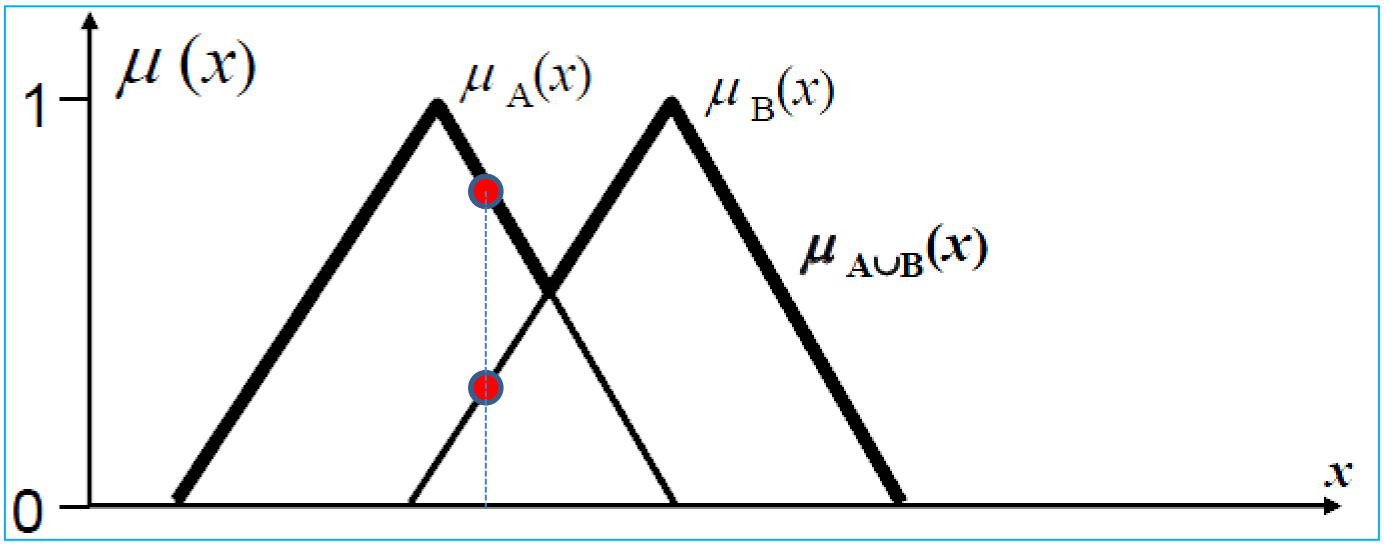
$$U(U(a,\ b),\ c) = U(a,\ U(b,\ c))$$

$$U(a,\ a) = a$$

Operacji na zbiorach rozmytych. **Suma**



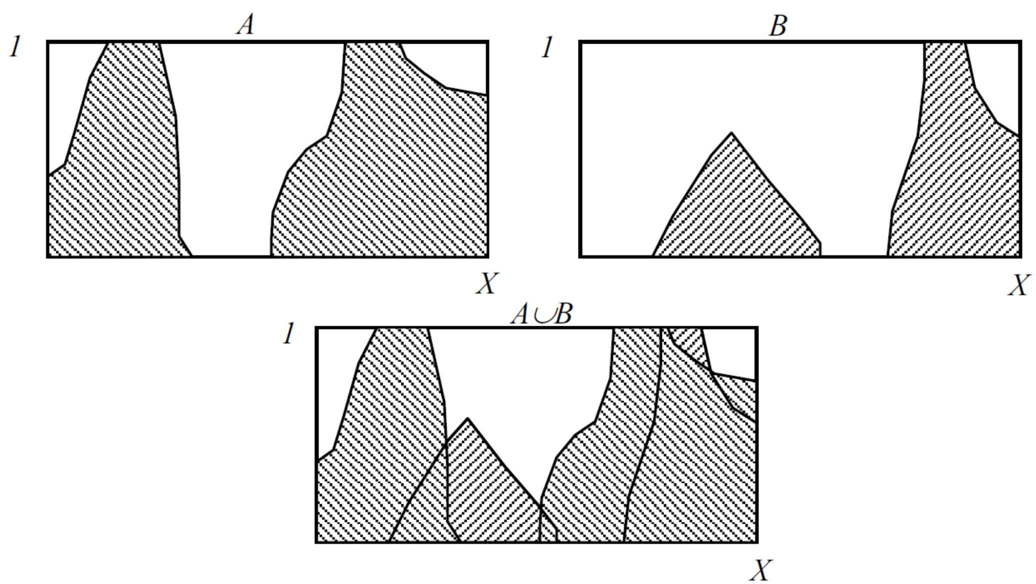
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



Przykłady sum rozmytych

$$U[\mu_A(x),\ \mu_B(x)] = Max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$

lub
$$\mu_{A\cup B}(x) = Max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$



Przykłady sum rozmytych

Suma Yagera

$$U_w(a,b) = \mathrm{Min}[1, (a^w + b^w)^{1/w}], \quad w \in (0, \infty)$$

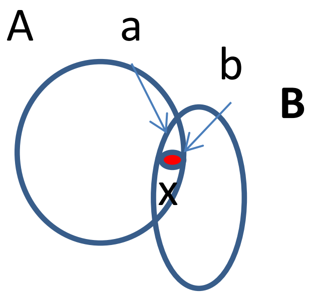
$$U(a, a) \neq a$$

$$U_1(a, b) = Min[1, a+b]$$

$$U_2(a, b) = Min[1, \sqrt{a^2 + b^2}\,]$$

$$\lim_{w \to \infty} \mathrm{Min}[1, (a^w + b^w)^{1/w}] = \mathrm{Max}(a, b)$$

Przykład



b / a	0	0.25	0.5
1	1	1	1
0.75	0.75	1	1
0.25	0.25	0.5	0.75

$U_1(a,b) = \mathrm{Min}[1, a+b]$

$w = 1$

b / a	0	0.25	0.5
1	1	1	1
0.75	0.75	0.79	0.9
0.25	0.25	0.35	0.55

$U_2(a,b) = \mathrm{Min}[1, \sqrt{a^2 + b^2}\,]$

$w = 2$

b / a	0	0.25	0.5
1	1	1	1
0.75	0.75	0.75	0.75
0.25	0.25	0.25	0.5

$U_\infty(a,b) = \mathrm{Max}[\, a, b]$

$w \to \infty$

Przykłady sum rozmytych

Suma algebraiczna $$A \hat{+} B$$

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

$$A \hat{+} X = X$$

Suma ograniczona $$A \oplus B$$ To jest suma Yagera dla w=1

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \oplus B}(x) = \mathrm{Min}[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$$

$$A \oplus X = X$$

$$A \oplus \overline{A} = X$$

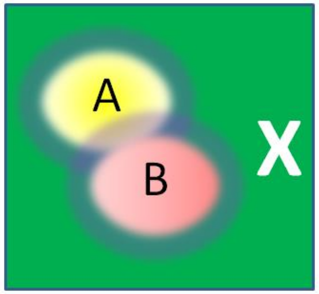
Przykłady sum rozmytych

Drastyczna suma $A \dot{\cup} B$

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \dot{\cup} B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{when } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), & \text{when } \mu_A(x) = 0 \\ 1, & \text{for others} \end{cases}$$

Suma Hamachera $A \cup B$

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \cup B}(x) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - (2-\gamma)\mu_A(x)\mu_B(x)}{1-(1-\gamma)\mu_A(x)\mu_B(x)}, \quad \gamma \geq 0$$



nkcje przynależności przecięcia zbiorów rozmytych

ciągła

$$A \cap B \qquad I:[0,1] \times [0,1] \xrightarrow{} [0,1]$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = I[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\mathrm{I}(1, 1) = 1, \mathrm{I}(1, 0) = 0, \mathrm{I}(0, 1) = 0, \mathrm{I}(0, 0) = 0$$

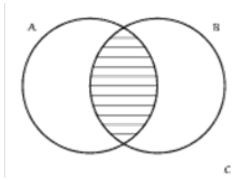
$$I(a, b) = I(b, a)$$

If $a \le a'$ and $b \le b'$, $I(a, b) \le I(a', b')$ monotoniczność

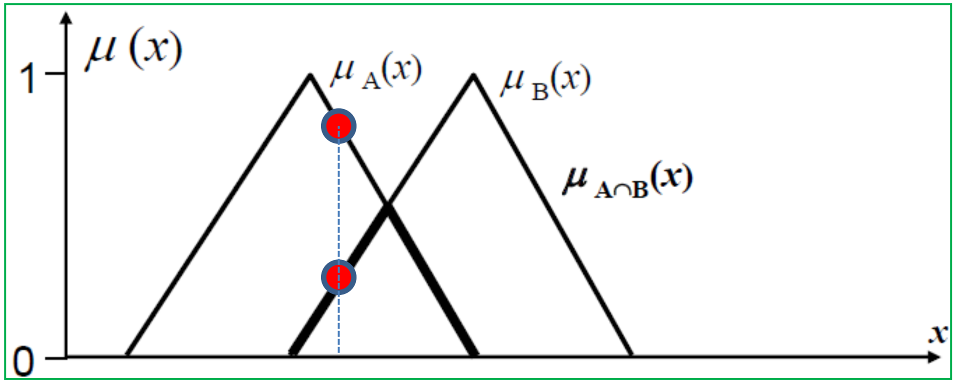
$$I(I(a, b), c) = I(a, I(b, c))$$

$$I(a, a) = a$$

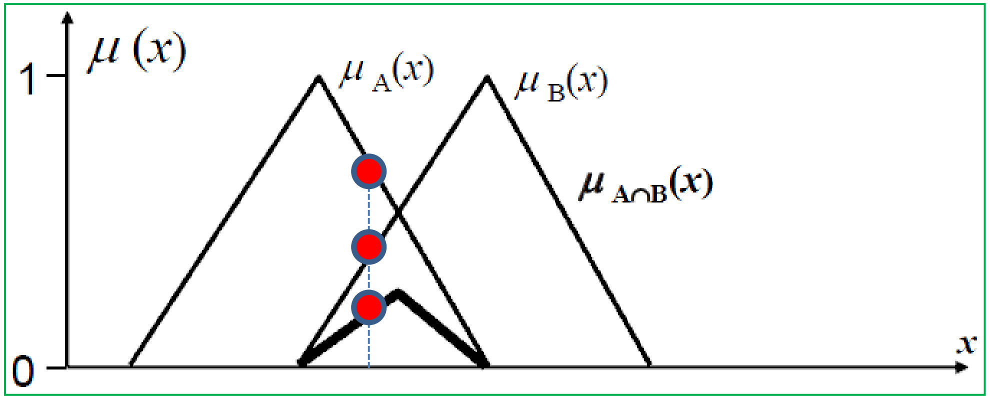
Przecięcie



$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$



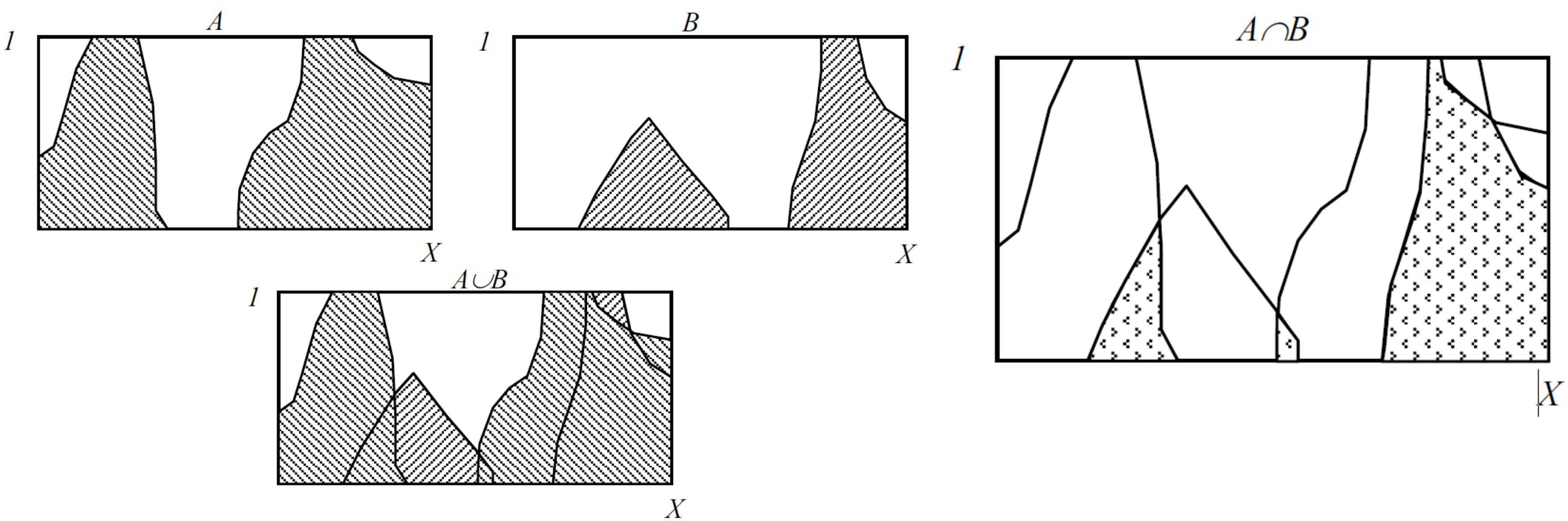
$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$$



Przykłady przecięć rozmytych

$$I[\mu_A(x),\ \mu_B(x)] = Min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$

lub $$\mu_{A\cap B}(x) = Min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$



Przykłady przecięć rozmytych

Przecięcie Yagera

$$I_w(a,b) = 1 - \mathrm{Min}[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}] \qquad \mathrm{w} \in (0, \infty)$$

$$I_1(a, b) = 1\text{-}Min[1, 2\text{-}a\text{-}b]$$

$$I_2(a, b) = 1\text{-}Min[1, \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}\ ]$$

$$\lim_{w \to \infty} (1 - \mathrm{Min}[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}]) = \mathrm{Min}(a, b)$$

Przykład

"young" and "senior"

$a = 0.4 \qquad b = 0.6$

$I_1 = 1 - \text{Min}[1, 2\text{-}(a+b)] = 1 - \text{Min}[1, 2\text{-}1] = 1 - 1 = 0$

$a = 0.5$

$I_1 = 1 - \text{Min}[1, 2\text{-}1.1] = 1 - \text{Min}[1, 0.9] = 1 - 0.9 = 0.1$

$a = 0.3$

$I_\infty(a, b) = \text{Min}[0.3, 0.6] = 0.3$

$I_1(a, b) = 1 - \text{Min}[1, 2 - 0.9] = 1 - \text{Min}[1, 1.1] = 1 - 1 = 0$

Przykład

b \ a	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0.5
0.75	0	0	0.25
0.25	0	0	0

$I_1(a,b) = 1 - \mathrm{Min}[1, 2-a-b]$

$w = 1$

b \ a	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0.5
0.75	0	0.21	0.44
0.25	0	0	0.1

$I_2(a,b) = 1-$

$\mathrm{Min}[1, \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}\ ]$

$w = 2$

b \ a	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0.5
0.75	0	0.25	0.5
0.25	0	0.25	0.25

$I_\infty(a,b) = \mathrm{Min}[\ a, b]$

$w \to \infty$

Przykłady przecięć rozmytych

Iloczyn algebraiczny

$$A \bullet B$$

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \bullet B}(x) = \mu_A(x) \bullet \mu_B(x)$$

Iloczyn ograniczony

$$A \odot B$$

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \odot B}(x) = \mathrm{Max}[0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$$

$$A \odot \varnothing = \varnothing$$

$$A \odot \overline{A} = \varnothing$$

To jest przecięcie Yagera dla w=1

$$I_1(a, b) = 1 - \mathrm{Min}[1, 2 - a - b]$$

Przykłady przecięć rozmytych

Iloczyn drastyczny

$$A \odot B$$

$$\forall x \in X, \qquad \mu_{A \odot B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & \text{when } \mu_A(x) = 1 \\ \mu_B(x), & \text{when } \mu_B(x) = 1 \\ 0, & \text{when } \mu_A(x), \quad \mu_B(x) < 1 \end{cases}$$

Przecięcie Hamachera

$$A \cap B$$

$$\forall x \in X, \ \mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x)\mu_B(x)}{\gamma + (1-\gamma)(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))}, \quad \gamma \geq 0$$

Przykład

$$\mathbf{X} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$A = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.7}{7}$$

$$B = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{5} + \frac{1}{6}$$

Przecięcie:

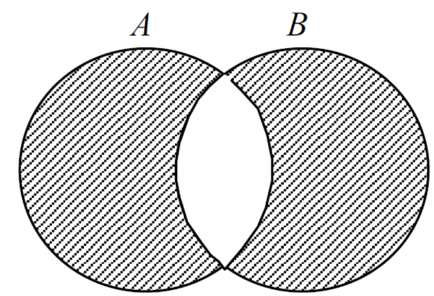
$$A \cap B = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{5}$$

Suma:

$$A \cup B = \frac{0.8}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7}$$

Suma rozłączna XOR

$$A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$



Prosta suma rozłączna

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)\,, \quad \mu_{\overline{B}}(x) = 1 - \mu_B(x)$$

$$\mu_{A \cap \overline{B}}(x) = Min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)]$$

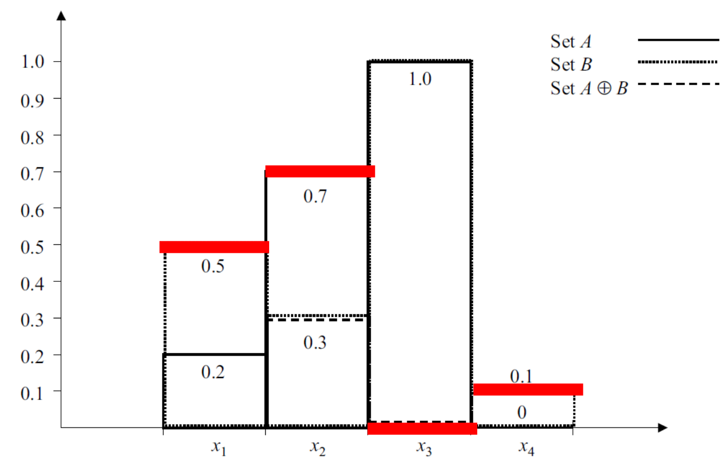
$$\mu_{\overline{A} \cap B}(x) = Min[1 - \mu_A(x)\,, \ \mu_B(x)]$$

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B), \ \text{then}$$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = Max\{Min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)], \ Min[1 - \mu_A(x)\,, \mu_B(x)]\}$$

Przykład

$$A = \{(x_1,\ 0.2), (x_2,\ 0.7), (x_3,\ 1), (x_4,\ 0)\}$$
$$B = \{(x_1,\ 0.5), (x_2,\ 0.3), (x_3,\ 1), (x_4,\ 0.1)\}$$
$$\overline{A} = \{(x_1,\ 0.8), (x_2,\ 0.3), (x_3,\ 0), (x_4,\ 1)\}$$
$$\overline{B} = \{(x_1,\ 0.5), (x_2,\ 0.7), (x_3,\ 0), (x_4,\ 0.9)\}$$
$$A \cap \overline{B} = \{(x_1,\ 0.2), (x_2,\ 0.7), (x_3,\ 0), (x_4,\ 0)\}$$
$$\overline{A} \cap B = \{(x_1,\ 0.5), (x_2,\ 0.3), (x_3,\ 0), (x_4,\ 0.1)$$

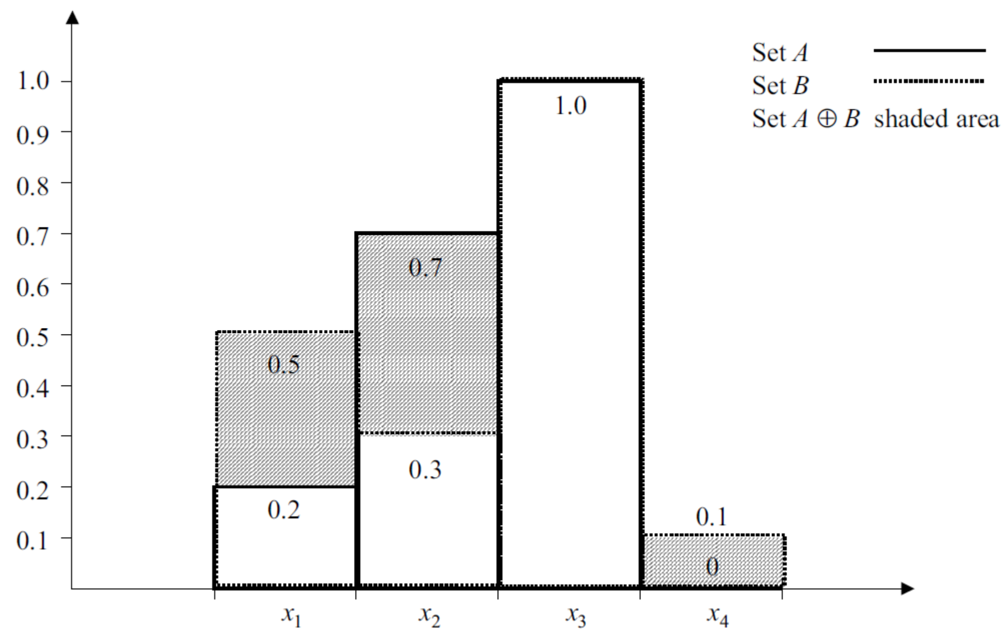


$$A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \{(x_1,\ 0.5), (x_2,\ 0.7), (x_3,\ 0), (x_4,\ 0.1)\}$$

Suma rozłączna II

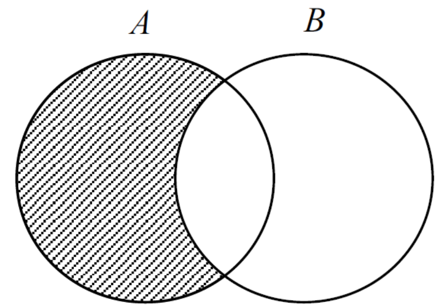
$$\mu_{A\Delta B}(x) = \left|\mu_A(x) - \mu_B(x)\right|$$

A = {(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0)}
B = {(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1)}
A△B = {(x_1, 0.3), (x_2, 0.4), (x_3, 0), (x_4, 0.1)}

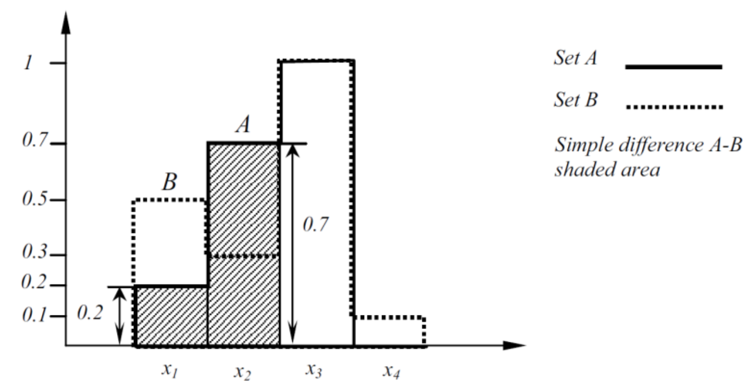


Różnica zbiorów rozmytych

$$A - B = A \cap \overline{B}$$



$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$
$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1)\}$
$\overline{B} = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0.9)\}$
$A - B = A \cap \overline{B} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$

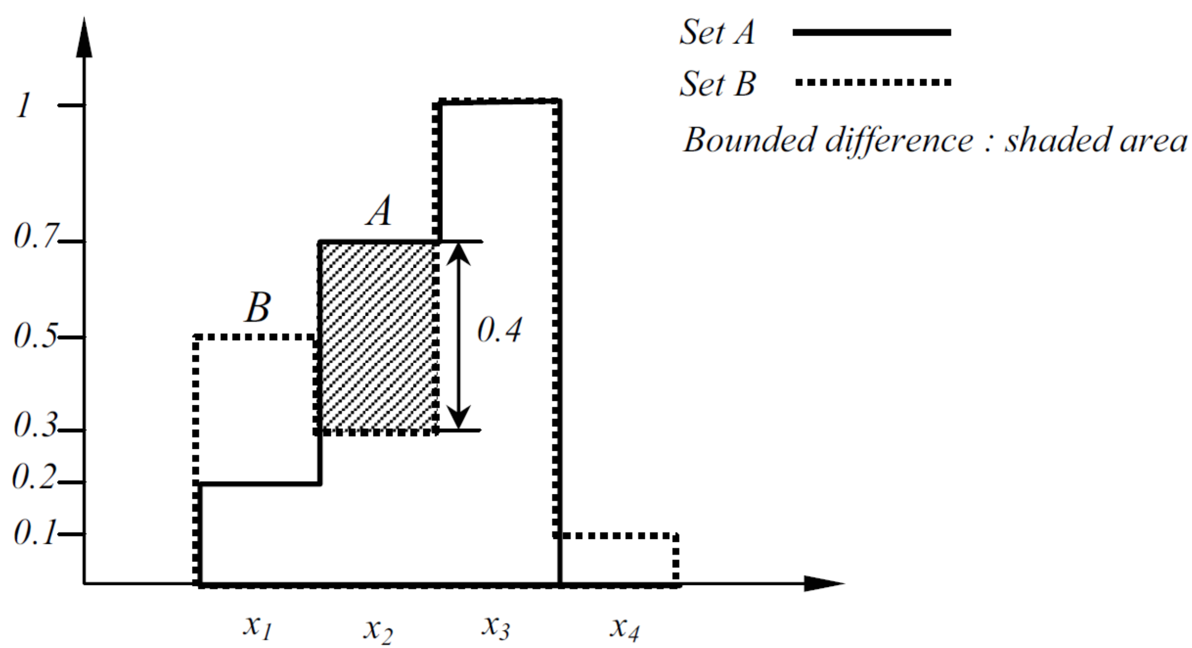


Różnica zbiorów rozmytych

Różnica ograniczona

$$\mu_{A\theta B}(x) = \mathrm{Max}[0, \mu_A(x) - \mu_B(x)]$$

$A = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$
$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0.1)\}$



Odległość między zbiorami rozmytymi

Odległość Hamminga

$$d(A, B) = \sum_{i=1,\, x_i \in X}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|$$

$$A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.8), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$$
$$B = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.3), (x_3, 0), (x_4, 0)\}$$

$$d(A, B) = |0| + |0.5| + |1| + |0| = 1.5$$

Właściwości

(1) $d(A, B) \geq 0$

(2) $d(A, B) = d(B, A)$

(3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

(4) $d(A, A) = 0$

Względna odległość Hamminga

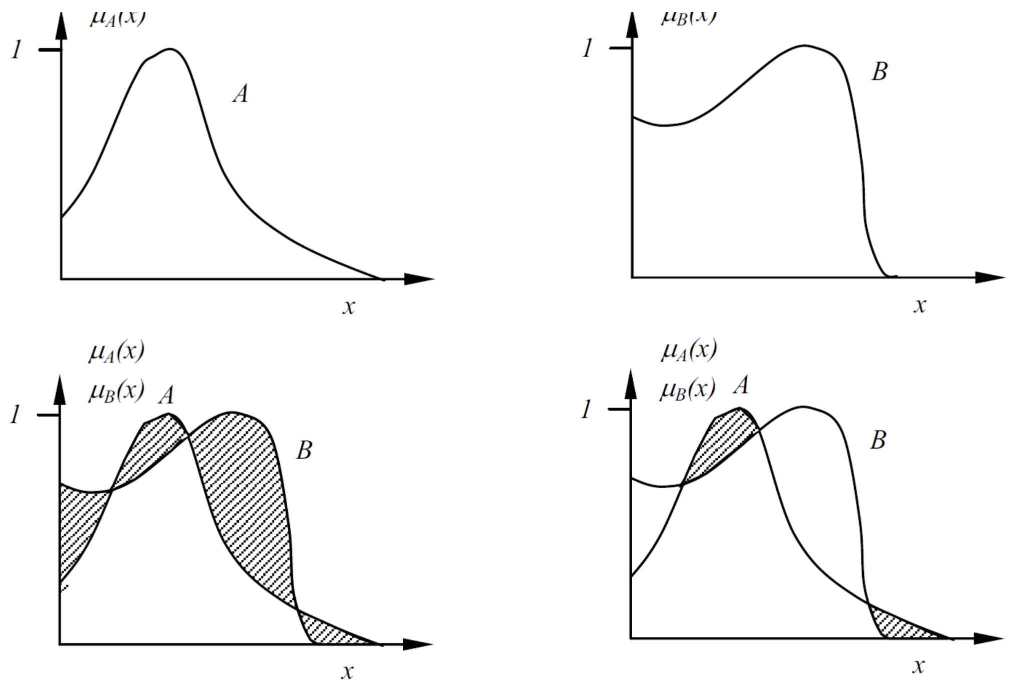
$$|X| = n \qquad \delta(A, B) = \frac{1}{n} d(A, B)$$

Odległość symetryczna

$$\forall x \in X, \quad \mu_{A \nabla B}(x) = | \mu_A(x) - \mu_B(x) |$$

Odległość Euklidesowa

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2}$$



$d(A, B)$ $A - B$

Przykład

$$A = \{(x_1,\ 0.4), (x_2,\ 0.8), (x_3,\ 1), (x_4,\ 0)\}$$
$$B = \{(x_1,\ 0.4), (x_2,\ 0.3), (x_3,\ 0), (x_4,\ 0)\}$$

$$e(A, B) = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1.25} = 1.12$$

Względna odległość Euklidesowa

$$\varepsilon(A,\ B) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}$$

Odległość Minkowskiego

$$d_w(A, B) = \left(\sum_{x \in X} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right|^w \right)^{1/w} \qquad w \in [1, \infty]$$

Iloczyn kartezjański

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x,y) takich, że x∈A i y∈B oznaczamy A×B.

2 stopień zbioru

$$\mu_{A^2}(x) = [\mu_A(x)]^2, \quad \forall x \in X$$

M-ty stopień zbioru

$$\mu_{A^m}(x) = [\mu_A(x)]^m, \quad \forall x \in X$$

$$\mu_{A_1}(x), \quad \mu_{A_2}(x), \quad \ldots, \mu_{A_n}(x)$$

$$\forall x_1 \in A_1, \quad x_2 \in A_2, \quad \ldots, x_n \in A_n$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$\boxed{\mu_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{Min}[\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)]}$$

Koncentracja i rozciągnięcie

$$\neg \mathrm{A} = \int_U \left(1 - \mu_A(u)\right) / u \qquad A + B = \int_U \left(\mu_A(u) \vee \mu_B(u)\right) / u$$

$$A \cap B = \int_U \left(\mu_A(A) \wedge \mu_B(u)\right) / u, \quad AB = \int_U \mu_A(u)\mu_B(u) / u$$

$$\alpha A = \int_U \alpha\mu_A(u) / u$$

$$A^\alpha = \int_U \left(\mu_A(u)\right)^\alpha / u$$

$$\mathrm{CON}(A) = A^2$$ koncentracja

$$DIL(A) = A^{0.5}$$ Rozciągnięcie

T-norma

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\forall x, y, x', y', z \in [0,1]$$

i) $T(x, 0) = 0,\ T(x, 1) = x$

ii) $T(x, y) = T(y, x)$

iii) $(x \leq x', y \leq y') \rightarrow T(x, y) \leq T(x', y')$

iv) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$

$x\mathrm{T}y$: t-norm

Przykłady

(1) Intersection operator ($\cap$)

(2) Algebraic product operator ($\bullet$)

(3) Bounded product operator ($\odot$)

(4) Drastic product operator ($\hat{\bullet}$)

$$\forall_{.} T(a, b) \leq Min[a, b]$$

T-conorm (S-norma)

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\forall x, y, x', y', z \in [0,1]$$

i) $T(x, 0) = x,\ T(x, 1) = 1$

ii) $T(x, y) = T(y, x)$

iii) $(x \le x', y \le y') \rightarrow T(x, y) \le T(x', y')$

iv) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$

$$x \perp y : \text{t-conorm}$$

Przykłady

(1) Union operator ($\cup$)
(2) Algebraic sum operator ($\hat{+}$)
(3) Bounded sum operator ($\oplus$)
(4) Drastic sum operator ($\dot{\cup}$)
(5) Disjoint sum operator (Δ)

$$\forall_{.} \perp(a, b) \leq Max[a, b]$$

Przykłady Ti S norm

Nr	$T(a, b)$	$S(a, b)$
1	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$
2	ab	$a + b - ab$
3	$\max(a + b - 1, 0)$	$\min(a + b, 1)$
4	$\begin{cases} a & \text{gdy} \quad b = 1 \\ b & \text{gdy} \quad a = 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad a, b \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a & \text{gdy} \quad \mathrm{b} = 0 \\ b & \text{gdy} \quad \mathrm{a} = 0 \\ 1 & \text{gdy} \quad \mathrm{a,b} \neq 0 \end{cases}$

Własności działań w klasycznej teorii zbiorów

Inwolucja (podwójna negacja)	$A=\neg(\neg A)$
Przemienność	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Łączność	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Rozdzielność	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencja	$A = A \cap A,\ A = A \cup A$
Pochłanianie (absorpcja)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Własności działań w klasycznej teorii zbiorów

Pochłanianie dopełnienia	$A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\neg A \cup B) = A \cap B$
Pochłanianie przez $\varnothing$ i U	$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identyczność	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Prawo zaprzeczenia	$A \cap \neg A = \varnothing$
Prawo wyłączonego środka	$A \cup \neg A = U$
Prawa de Morgana	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

U – uniwersum do którego należą rozważane zbiory A, B i C

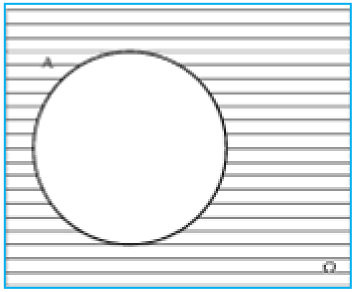
$\varnothing$ - zbiór pusty, jego funkcja charakterystyczna jest stała i równa zero

Własności spełniane przez działania mnogościowe na zbiorach rozmytych

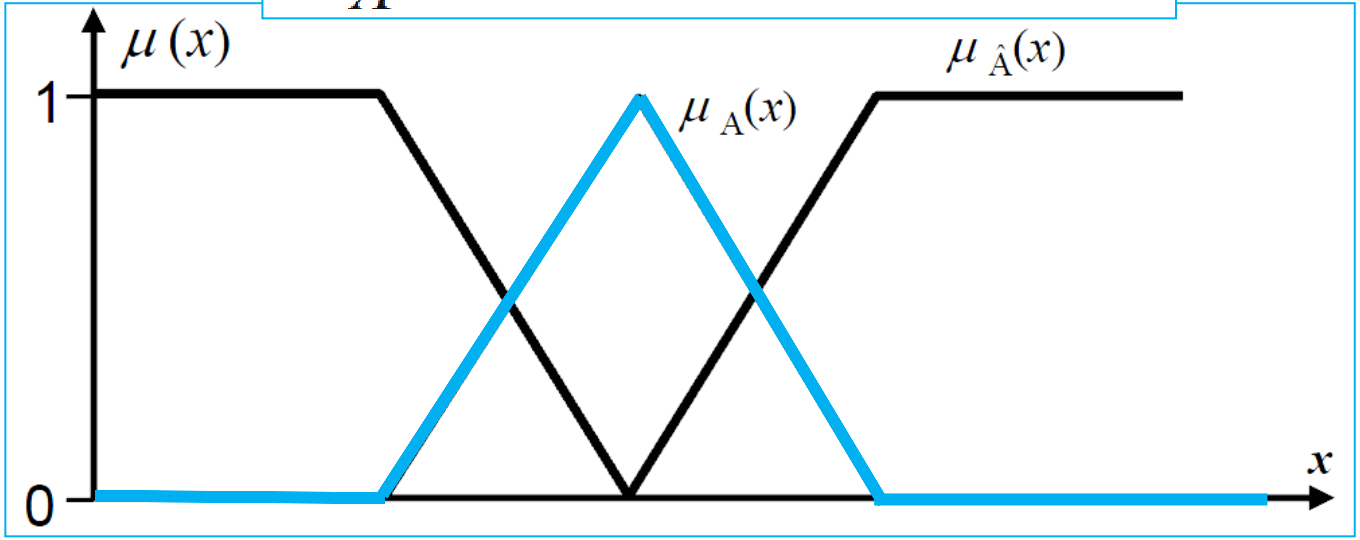
Inwolucja	tak
Przemienność	tak
Łączność	tak
Rozdzielność	tak
Idempotencja	tak
Pochłanianie	tak
Pochłanianie dopełnienia	nie
Pochłanianie przez $\varnothing$ i U	tak
Identyczność	tak
Prawo zaprzeczenia	nie
Prawo wyłączonego środka	nie
Prawa de Morgana	tak

Operacji na zbiorach rozmytych.

Dopełnienie

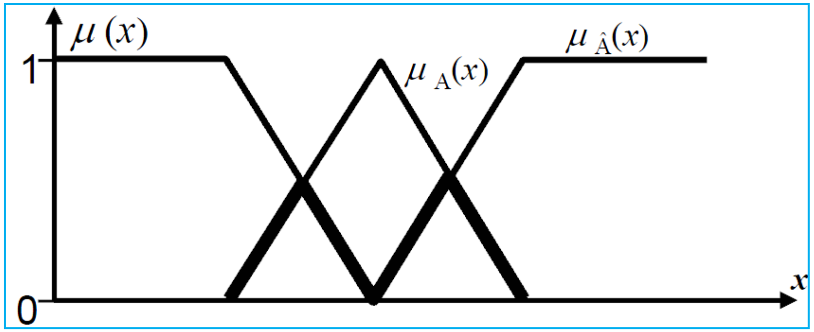


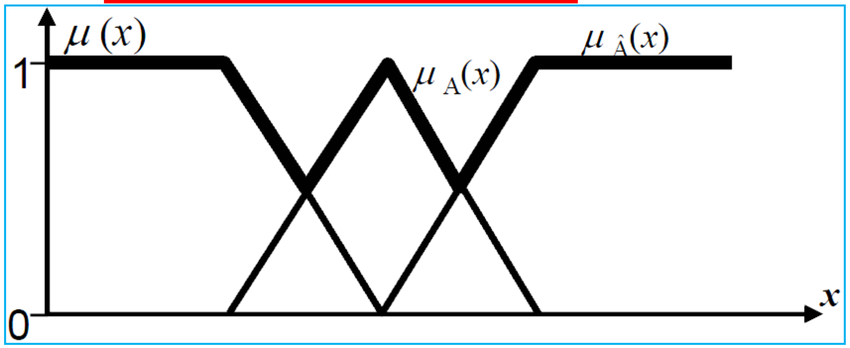
$$\mu_{\hat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



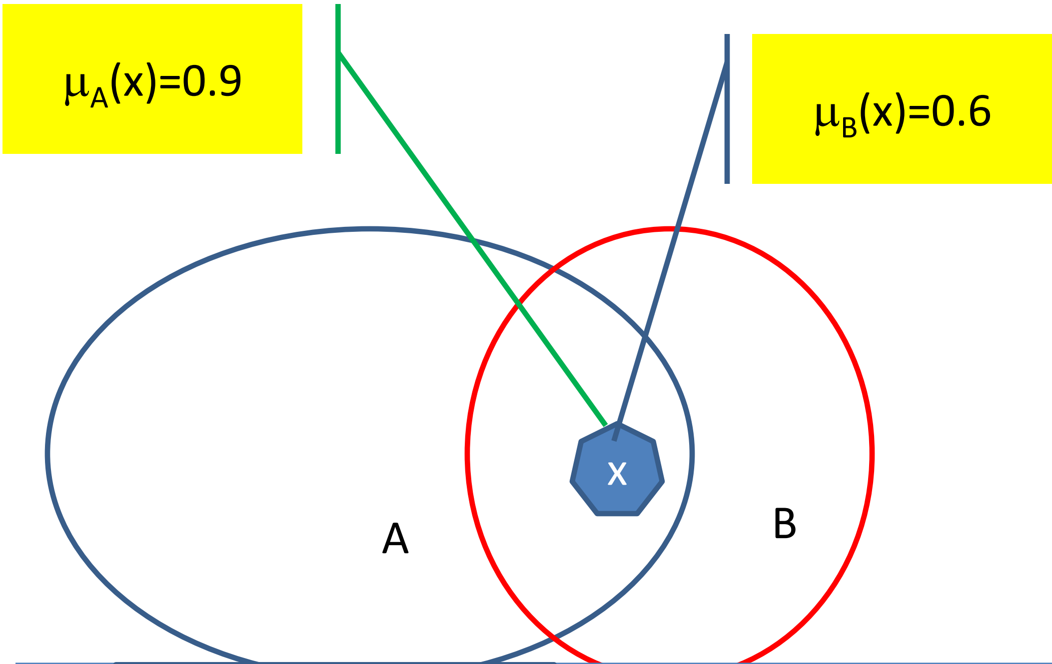
$$A \cap \hat{A} \neq \varnothing$$

$$A \cup \hat{A} \neq \mathbf{X}$$





Przykład



$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\cap$	$\cup$
0.9	0.6	**0.6**	**0.9**
0.9	0.6	**0.54**	**0.96**
0.9	0.6	**0.5**	**1**

MaxMin

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Algebraiczne

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \quad \mu_{A\cap B} = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

Ograniczone

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

Operacje na zbiorach rozmytych

iloczyn $\mu_{A\cap B}(x) =$

Minimum

$\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Algebraic product

$\mu_A(x)\mu_B(x)$

Drastic product

$\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$

0 otherwise

Lukasiewicz AND (Bounded Difference)

$\mathrm{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$

Einstein product

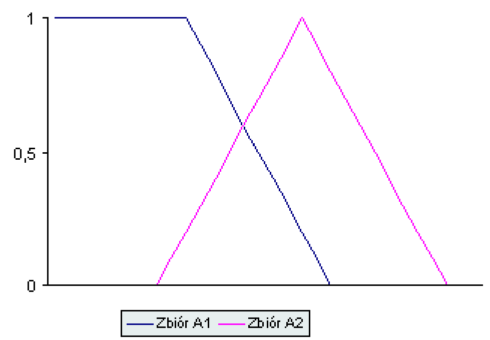
$\mu_A(x)\mu_B(x)/(2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)))$

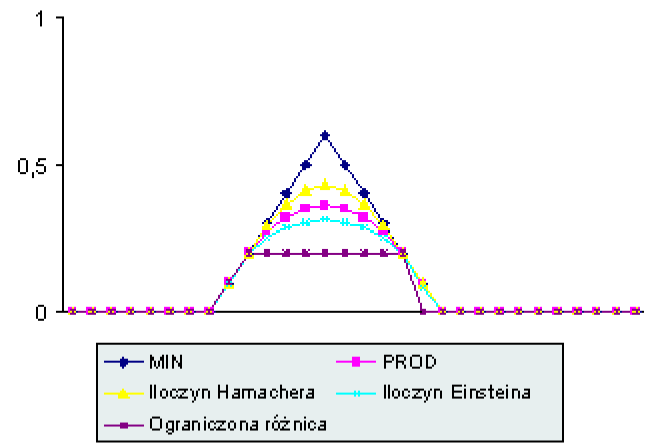
Hamacher product

$\mu_A(x)\mu_B(x)/(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))$

Yager operator

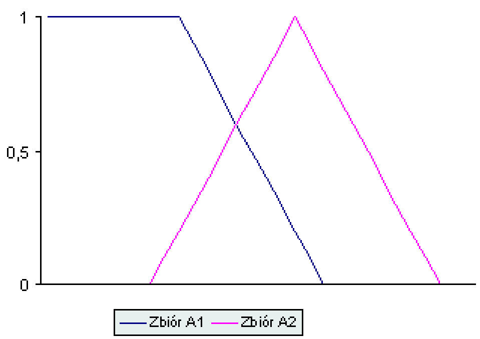
$1 - \mathrm{MIN}(1, ((1 - \mu_A(x))^b + (1 - \mu_B(x)^b)^{1/b}))$





Operacje na zbiorach rozmytych

suma



Maximum

$\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Algebraic sum

$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$

Drastic sum

$\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$

1 otherwise

Lukasiewicz OR (Bounded Sum)

$\mathrm{MIN}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$

Einstein sum

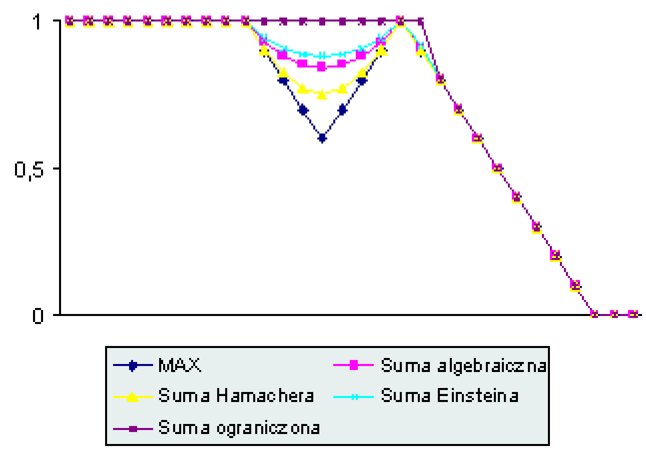
$(\mu_A(x) + \mu_B(x))/(1 + \mu_A(x)\mu_B(x))$

Hamacher sum

$(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x))/(1 - \mu_A(x)\mu_B(x))$

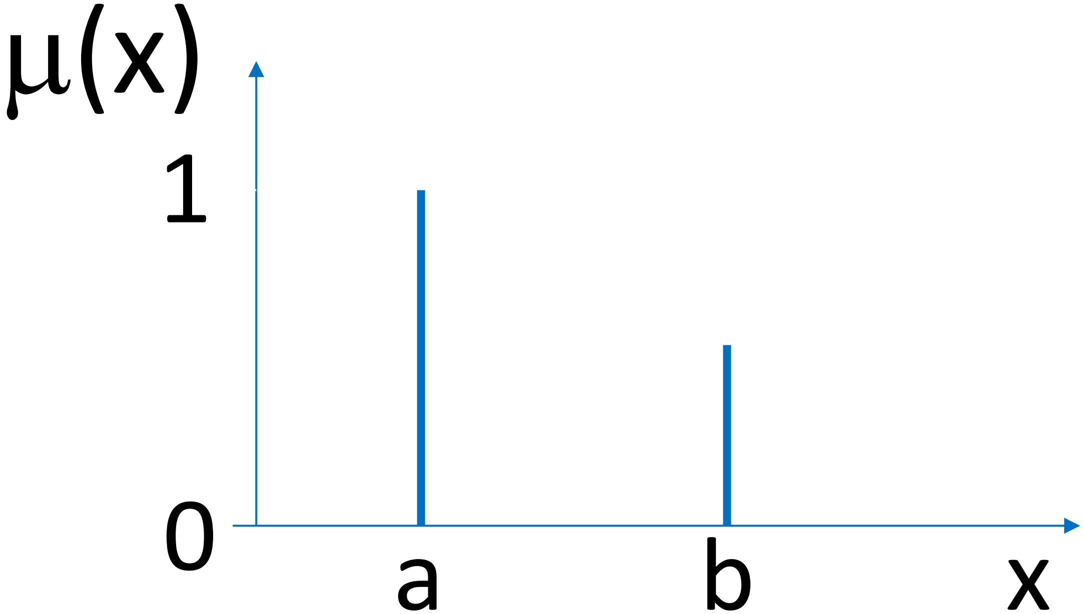
Yager operator

$\mathrm{MIN}(1, (\mu_A(x)^b + \mu_B(x)^b)^{1/b})$



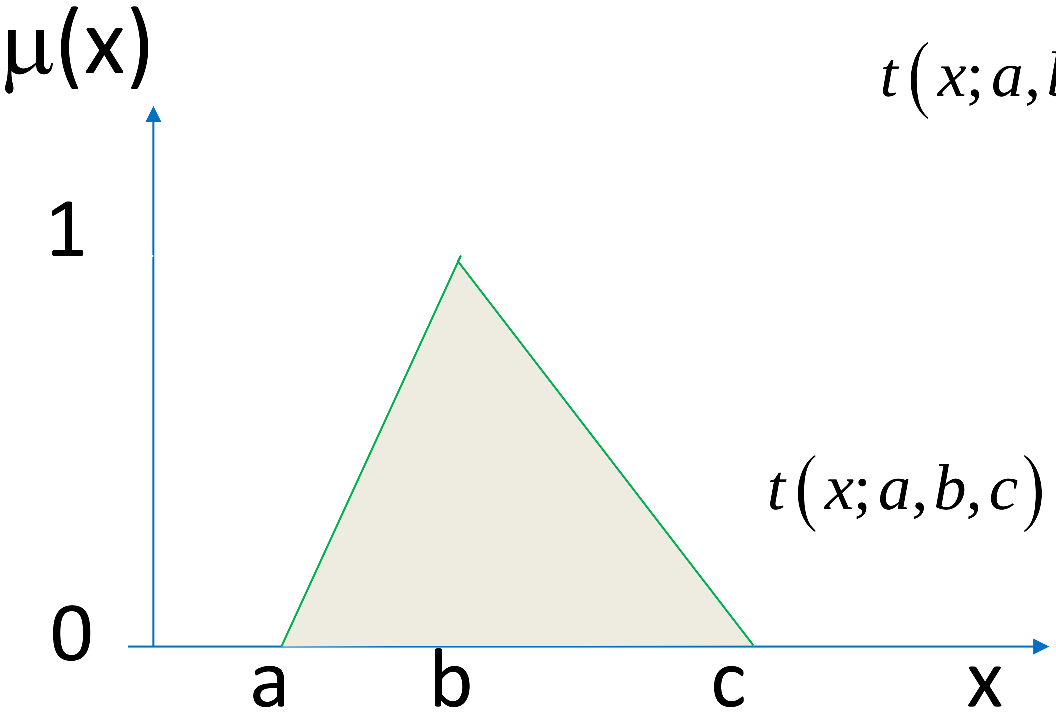
Typy funkcji przynależności

Singleton: (a,1) i (b,0.6)



Typy funkcji przynależności

Trójkątna: <a,b,c>

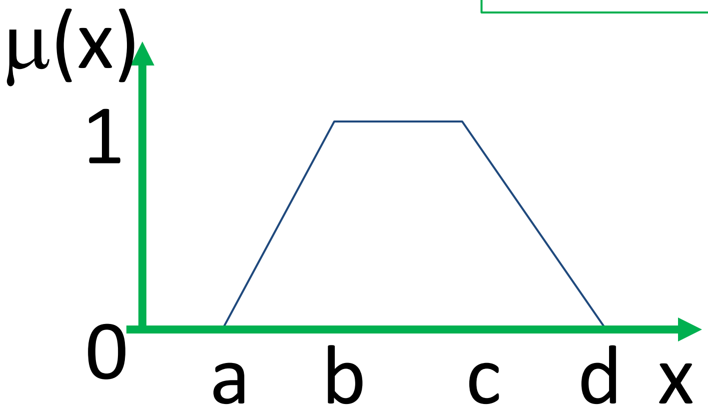


$$t(x;a,b,c)=\begin{cases} 0 & dla\; x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & dla\; a\le x\le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & dla\; b\le x\le c \\ 0 & dla\; x\ge c \end{cases}$$

$$t(x;a,b,c)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{c-x}{c-b}\right),0\right)$$

Typy funkcji przynależności

Trapezoid: <a,b,c,d>

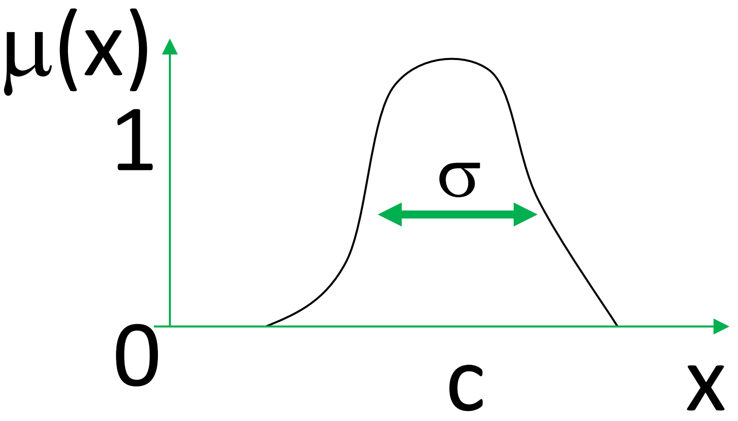


$$Trap(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & dla\, x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & dla\, a \le x \le b \\ 1 & dla\, b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & dla\, c \le x \le d \\ 0 & dla\, x \ge d \end{cases}$$

$$Trap(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{d-x}{d-c}, 1 \right), 0 \right)$$

Typy funkcji przynależności

Gaus/Bell: N(m,s)



$$G(x;a) = e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

$$B(x;a,b) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-a}{b}\right|^{2b}}$$

Matlab Membership Function Gallery

```
mf = [...
    fismf('trapmf',[-19 -17 -12 -7]) ...
    fismf('gbellmf',[3 4 -8]) ...
    fismf('trimf',[-9 -1 2]) ...
    fismf('gaussmf',[3 5]) ...
    fismf('gauss2mf',[3 10 5 13]) ...
    fismf('smf',[11 17]) ...
    fismf('zmf',[-18 -10]) ...
    fismf('psigmf',[2 -11 -5 -4]) ...
    fismf('dsigmf',[5 -3 1 5]) ...
    fismf('pimf',[0 7 11 15]) ...
    fismf('sigmf',[2 15]) ...
    ];
```