Logika rozmyta. Ćwiczenia 1

Zadanie1

Dla zbiorów

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$
$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{b, c, e\}$$
$$C = \{b, e, f, g\}$$

zbuduj zbiory rozmyte A,B,C i sprawdź, jak spełniają się te właściwości na tych zbiorach.

Inwolucja (podwójna negacja)	$A = \neg(\neg A)$
Przemienność	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Łączność	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Rozdzielność	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencja	$A = A \cap A, A = A \cup A$
Pochłanianie (absorpcja)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Pochłanianie dopełnienia	$A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\neg A \cup B) = A \cap B$
Pochłanianie przez ∅ i U	$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identyczność	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Prawo zaprzeczenia	$A \cap \neg A = \varnothing$
Prawo wyłączonego środka	$A \cup \neg A = U$
Prawa de Morgana	$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Inwolucja	tak
Przemienność	tak
Łączność	tak
Rozdzielność	tak
Idempotencja	tak
Pochłanianie	tak
Pochłanianie dopełnienia	nie
Pochłanianie przez ∅ i U	tak
Identyczność	tak
Prawo zaprzeczenia	nie
Prawo wyłączonego środka	nie
Prawa de Morgana	tak

$$\overline{A} \qquad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mathrm{Max}[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad \forall x \in X.$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{Min}[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad \forall x \in X.$$

Zadanie 2

Zapisz zbiory

$$A = \{(2, 1.0), (3, 0.4), (4, 0.5)\}$$

$$B = \{(a, \mu_B(a)), (b, \mu_B(b)), (c, \mu_B(c)), (d, \mu_B(d))\}$$

w notacji $A = \sum_{i=1,n} \mu_A(x_i) / x_i$

Zadanie 3

wzrost

cm	niski	średni	wysoki
140	1	0	0
150	1	0	0
160	0.9	0.1	0
170	0.7	1	0
180	0.3	0.8	0.3
190	0	0	1

a) Porównaj elementy ‚baza, jądro' dla każdego zbioru.
b) Czy zbiory są znormalizowane?
c) Znajdź zbiory warstw α w każdym zbiorze.
d) Porównaj zbiory α- cięcia każdego zbioru, dla α = 0,5 i α = 0,3.

Zadanie 4

Czy zbiory

$$A = \int \mu_A(x) / x \qquad \mu_A(x) = 1/(1 + x^2)$$

$$B = \int \mu_B(x) / x \qquad \mu_B(x) = \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2+2}$$

są zbiorami wypukłymi? $x \in X = [-1, 3]$

Zadanie 5

Oblicz liczbę kardynalną skalarną $|A| = \sum \mu_A(x)$

i rozmytą $\mu_{|A|}(|A_\alpha|) = \alpha$

$\alpha \in \Lambda_A$ (level set), A_α is α-cut set

dla każdego z następujący zbiorów rozmytych.

a) A = {(x, 0.4), (y, 0.5), (z, 0.9), (w, 1)}
b) B = {0.5/u + 0.8/v + 0.9/w + 0.1/x}
c) C= $\sum \mu_C(x)/x$ where $\mu_C(x) = (x/(x+1))^2$ $x \in \{0,1,2,\cdots 10\}$

Zadanie 6

Niech zbiory A, B i C będą zbiorami rozmytymi zdefiniowanymi na liczbach rzeczywistych przez funkcje przynależności

$$\mu_A(x) = \frac{x}{x+1}, \; \mu_B(x) = \frac{1}{x^2+10}, \; \mu_C(x) = \frac{1}{10^x}$$

Określ matematyczne funkcje przynależności każdego z poniższych zbiorów na podstawie wybranej T i S normy. Zrób wykresy wyników

a) $A \cup B, \quad B \cap C,$

b) $A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C$

c) $A \cap \overline{C}, \quad \overline{B} \cup C$

d) $\overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cup \overline{B}$

Zadanie 7

Pokaż, że dwa rozmyte zbiory spełniają prawo De Morgana

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$
$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 10)}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Zrób to w sposób graficzny

Zadanie 8

Pokaż, że poniższe zbiory **nie są zgodne** z prawem sprzeczności $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$

i prawem wykluczonego środka $A \cup \overline{A} \neq X$

a) $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+x}$

b) $A = \{(a,\ 0.4),\ (b,\ 0.5),\ (c,\ 0.9),\ (d,\ 1)\}$

Zadanie 9

Oblicz dopełnienia następujących zbiorów przez negacje Yagera w = 0.5,1, 2.

$$\text{a) } \bar{A} = \{(a,\ 0.5),\ (b,\ 0.9),\ (c,\ 0.3)\}$$

$$\text{b) } \mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-1)}$$

Zadanie 10

Określ dopełnienia, sumy i przecięcia następujących zbiorów, używając operatorów Yagera dla w = 0.5,1, 2. Jaki wnioski można zrobić?
Przykłady: nie wysoki, wysoki lub średniego wzrostu, niski i średniego wzrostu.

cm	short	middle	tall
140	1	0	0
150	1	0	0
160	0.9	0.1	0
170	0.7	1	0
180	0.3	0.8	0.3
190	0	0	1

Zadanie 11

Oblicz za pomocą T i S norm sumę i przecięcie dwóch zbiorów.
Jaki wnioski można zrobić?

$$A = \{(x,\ 0.5), (y,\ 0.4), (z,\ 0.9), (w,\ 0.1)\}$$
$$B = \{(x,\ 0.4), (y,\ 0.8), (z,\ 0.1), (w,\ 1)\}$$

Nr	$T(a, b)$	$S(a, b)$
1	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$
2	ab	$a + b - ab$
3	$\max(a + b - 1, 0)$	$\min(a + b, 1)$
4	$\begin{cases} a & \text{gdy} \quad b = 1 \\ b & \text{gdy} \quad a = 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad a, b \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a & \text{gdy} \quad \text{b} = 0 \\ b & \text{gdy} \quad \text{a} = 0 \\ 1 & \text{gdy} \quad \text{a,b} \neq 0 \end{cases}$

Zadanie 12

Wyznacz odległości (Hamminga, Euklidesa i Minkowskiego dla w =3) pomiędzy kolejnymi zbiorami

cm	niski	średni	wysoki
140	1	0	0
150	1	0	0
160	0.9	0.1	0
170	0.7	1	0
180	0.3	0.8	0.3
190	0	0	1

Zadanie 13

Określ najbliższą parę spośród następujących zbiorów

cm	niski	średni	wysoki
140	1	0	0
150	1	0	0
160	0.9	0.1	0
170	0.7	1	0
180	0.3	0.8	0.3
190	0	0	1

Zadanie 14

Pokaż, że operator **Max lub a+b-a*b** spełnia właściwości S-normy, a **MIN lub a*b** – T – normy

$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

$\forall x, y, x', y', z \in [0,1]$

i) $T(x, 0) = 0, T(x, 1) = x$

ii) $T(x, y) = T(y, x)$

iii) $(x \leq x', y \leq y') \rightarrow T(x, y) \leq T(x', y')$

iv) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$

Definition (t-conorm (s-norm))

$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

$\forall x, y, x', y', z \in [0,1]$

i) $T(x, 0) = x, T(x, 1) = 1$: boundary condition

ii) $T(x, y) = T(y, x)$: commutativity

iii) $(x \leq x', y \leq y') \rightarrow T(x, y) \leq T(x', y')$: monotonicity

iv) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$: associativity □

Zadanie 15

Dane są zbiory rozmyte: **A**={μ(a)/a,μ(b)/b,μ(c)/c} i **B**={μ(x)/x,μ(y)/y}.
Oblicz funkcje przynależności Iloczynu kartezjańskiego

A×**B** = {(a,x), (a,y), (b,x), (b,y), (c,x), (c,y)}.
B×**A** = {(x,a), (x,b), (x,c), (y,a), (y,b), (y,c)}.
A×**A** = {(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)}.
B×**B** = {(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)}.