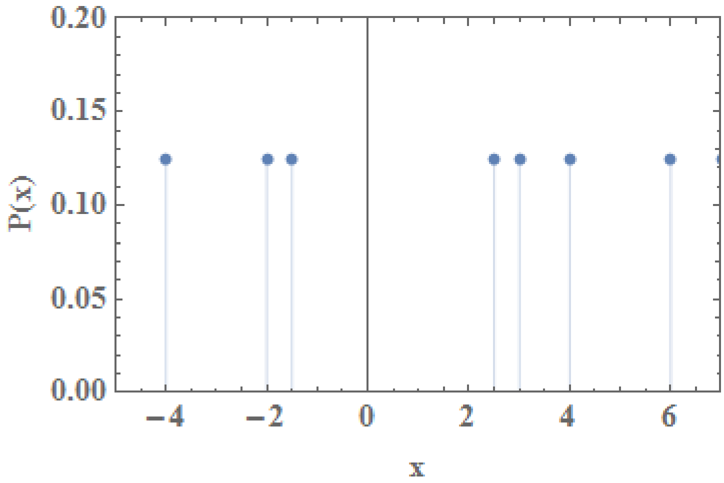
Rozkłady statystyczne dyskretnej zmiennej losowej

Rozkład równomierny

Opisuje **n** zdarzeń o jednakowym prawdopodobieństwie.



Parametry rozkładu:

- Wartość oczekiwana (średnia)

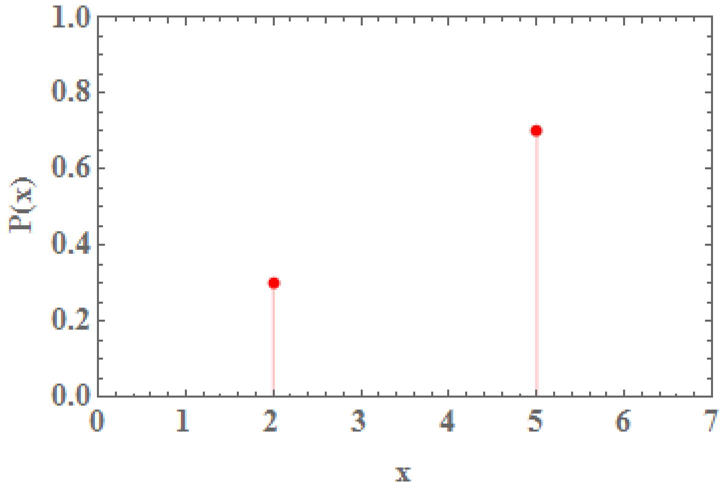
$$EX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Wariancja

$$D^2X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2$$

Rozkład dwupunktowy

Rozkład dyskretny, w którym zmienna losowa przyjmuje tylko dwie różne wartości x_1 i x_2 z prawdopodobieństwami **p** i **(1-p)** . Jest on na przykład rezultatem doświadczenia, w wyniku którego określone zdarzenie A wystąpi lub nie wystąpi.



Szczególnym przypadkiem rozkładu dwupunktowego jest *rozkład zero-jedynkowy*, gdzie $x_1 = 0$, a $x_2 = 1$.

Parametry rozkładu:

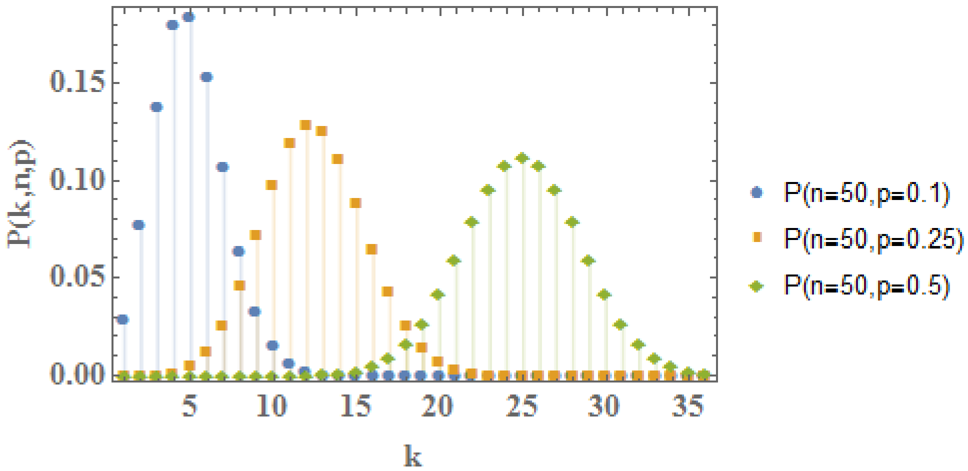
- Wartość oczekiwana (średnia) $EX = x_1 p + x_2(1 - p)$
- Wariancja $D^2X = (x_1 - x_2)^2\, p\,(1 - p)$

Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

Opisuje prawdopodobieństwo otrzymania **k** sukcesów w **n** losowaniach, które są niezależne. Prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest takie samo. Rozkład opisany jest wzorem:

$$\boldsymbol{P(k,n) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}}$$

gdzie: n – liczba losowań (prób, doświadczeń)
k – liczba sukcesów
p – prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie



Parametry rozkładu:

- Wartość najbardziej prawdopodobna $\boldsymbol{k_0 = [(n+1)p]}$
- Wartość oczekiwana (średnia) $\boldsymbol{EX = np}$
- Wariancja $\boldsymbol{D^2X = n\,p\,(1-p)}$

Przykłady

1) W urnie znajdują się 3 kule białe i 5 czarnych. Losujemy kulę pięciokrotnie, za każdym razem wrzucając ją z powrotem. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia 3 razy kuli białej?

$$P(kula\ biała\ w\ pojedynczym\ losowaniu) = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$P(3\ razy\ kula\ biała) = P(3{,}5) = \binom{5}{3} \cdot 0.375^3 \cdot 0.625^2 \approx 0.34$$

2) Wykonujemy do tarczy 5 strzałów, przy czym prawdopodobieństwo trafienia w tarczę jest takie samo w każdej próbie i wynosi 0.6. Jakie prawdopodobieństwo trafienia przynajmniej 3 razy?

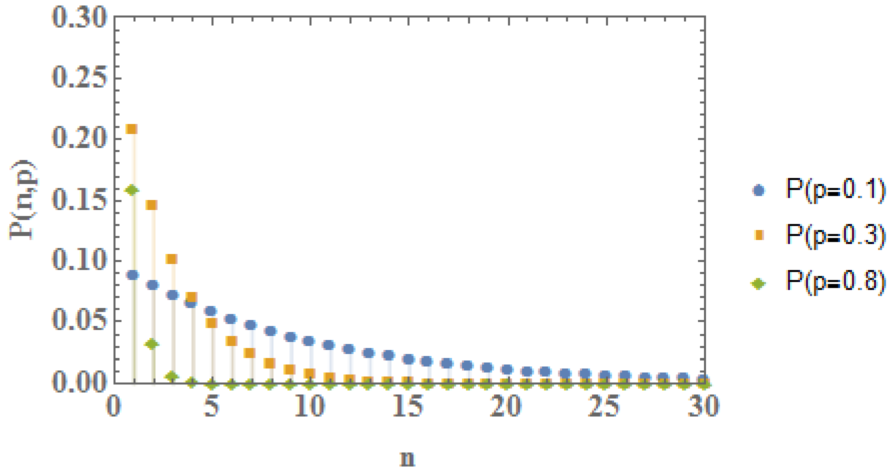
$$P(trafienie \geq 3\ razy) = P(3{,}5) + P(4{,}5) + P(5{,}5) =$$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 \approx 0.68$$

Rozkład geometryczny

Rozkład ten opisuje prawdopodobieństwo otrzymania sukcesu, w sekwencji doświadczeń przeprowadzonych zgodnie ze schematem Bernoulliego, dokładnie w **n-tej** próbie.
Rozkład ten jest opisany wzorem

$$\boldsymbol{P(n,p) = p\,(1-p)^{n-1}},$$

gdzie: n – numer próby, w której osiągnięto sukces
p – prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie.



Parametry rozkładu:

- Wartość oczekiwana (średnia) $\boldsymbol{EX = \frac{1}{p}}$
- Wariancja $\boldsymbol{D^2X = \frac{1-p}{p^2}}$

Przykłady

Kontrola jakości w fabryce produkującej żarówki pokazała, że prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego wyrobu jest równe $p = 0.1$.

W zadaniu tym mamy $p = 0.1$, zatem rozkład jest dany wzorem

$$P(n, 0.1) = 0.1 \cdot 0.9^{n-1} = f(n).$$

1) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsze 2 żarówki będą sprawne, a 3 żarówka będzie wadliwa?*
   Trzecia żarówka jest wadliwa, czyli $n = 3$, zatem $f(3) = 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.081$.

2) *Jakie jest prawdopodobieństwo natrafienia na wadliwą żarówkę w serii 100 wyprodukowanych żarówek?*
   Prawdopodobieństwo natrafienia na wadliwą żarówkę w n-tej próbie jest równe $f(n)$, zatem natrafienie na wadliwą żarówkę w serii 100 wyprodukowanych sztuk dane jest jako

$$\sum_{n=1}^{n=100} f(n) \approx 0.999973$$

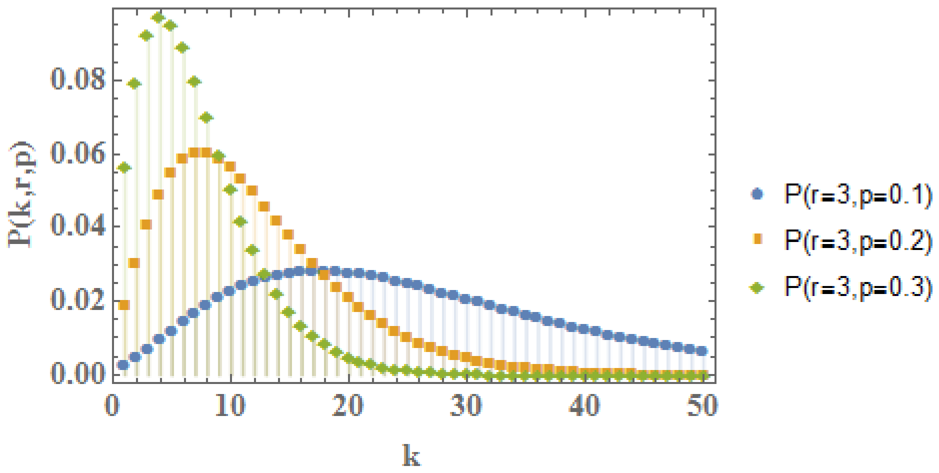
Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Opisuje prawdopodobieństwo otrzymania **k** sukcesów w sekwencji **n** losowań, które przeprowadzono zgodnie ze schematem Bernoulliego. Sekwencję obserwuje się dopóki nie nastąpi określona liczba porażek **r**, przy czym $\boldsymbol{k+r=n}$. Prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest takie samo i jest równe **p**.

Rozkład może być opisany wzorem

$$\boldsymbol{P(k,r,p)=\binom{k+r-1}{k-1}p^k\,(1-p)^r,}$$

gdzie: r – liczba porażek
k – liczba sukcesów
p – prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie



Parametry rozkładu:

- Wartość oczekiwana (średnia) $\boldsymbol{EX=\frac{k}{p}}$
- Wariancja $\boldsymbol{D^2X=k\frac{1-p}{p^2}}$

Przykłady

W Halloween Ola chodzi od domu do domu zbierając cukierki. Ma do odwiedzenia 30 domów w swojej okolicy. Nie wróci jednak do domu zanim nie dostanie słodyczy w 3 domach. Prawdopodobieństwo, że Ola otrzyma podarek jest równe 0.2.

W zadaniu tym mamy $p=0.2,\ k=3,\ r=n-3,$ zatem rozkład jest dany wzorem

$$P(3,n-3,0.2)=\binom{3+(n-3)-1}{3-1}\cdot 0.2^3\cdot 0.8^{n-3}=\binom{n-1}{2}\left(\frac{2}{8}\right)^3\cdot 0.8^n=f(n)$$

1) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ola odwiedzi 10 domów?*
   Ola ma odwiedzić 10 domów, czyli liczba prób musi być równa $n=10$, zatem $f(10)\approx 0.06$.

2) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ola odwiedzi nie więcej niż 5 domów?*
Ola ma odwiedzić nie więcej niż 5 domów, czyli musimy rozważyć przypadki, gdzie liczba odwiedzonych domów jest równa $n \in \{3, 4, 5\}$, a następnie posumować uzyskane prawdopodobieństwa. Mamy więc
$$f(n \leq 5) = f(3) + f(4) + f(5) \approx 0.058$$

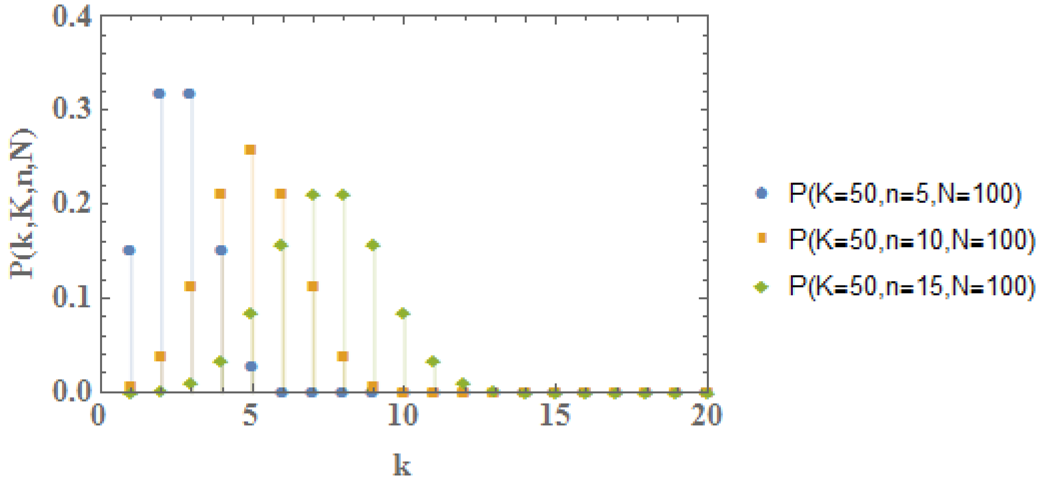
3) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ola odwiedzi wszystkie domy w okolicy i nie dostanie oczekiwanej liczby słodyczy?*
Ola odwiedzi wszystkie domy w okolicy jeżeli nie skończy zbierania cukierków przed odwiedzeniem domu 30.
Prawdopodobieństwo tego, że Ola skończy zbieranie cukierków przed wyczerpaniem się domów jest równe
$$f(n \leq 30) = \sum_{n=3}^{30} f(n) \approx 0.956$$
zatem prawdopodobieństwo, że Ola wyczerpie wszystkie domy nie zbierając oczekiwanej liczby cukierków jest równe $1 - f(n \leq 30) \approx 0.044$.

Rozkład hipergeometryczny

Rozkład ten opisuje osiągnięcie sukcesu w losowaniu bez zwracania **n** obiektów, z grupy **N** obiektów, wśród których jest **K** obiektów mających pożądaną cechę. Sytuację tę można opisać wzorem

$$\boldsymbol{P(k, K, n, N)} = \frac{\binom{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{k}}\binom{\boldsymbol{N-K}}{\boldsymbol{n-k}}}{\binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}}},$$

gdzie: k – liczba sukcesów
K – liczba elementów mająca pożądaną cechę
n – liczebność próbki
N – liczebność populacji



Parametry rozkładu:

- Wartość oczekiwana (średnia) $\boldsymbol{EX} = \frac{\boldsymbol{n\,K}}{\boldsymbol{N}}$
- Wariancja $\boldsymbol{D^2X} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}} \cdot \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{N}} \cdot \frac{\boldsymbol{(N-K)(N-n)}}{\boldsymbol{N-1}}$

Przykłady

Marek ma w szufladzie 8 par skarpetek, niestety aż 6 par jest dziurawych. Chłopak jedzie na 4-dniową wycieczkę, więc losuje 4 pary skarpet, które weźmie ze sobą. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych skarpetek znajdą się pary całe.

Pożądaną cechą obiektu w tym zadaniu jest cała skarpetka, zatem zmienna losowa może przyjmować wartości *k = 0, 1, 2*. Obiektów z pożądaną cechą jest *K = 2*, wszystkich skarpetek mamy *N = 8* par. Losujemy *n = 4* pary skarpetek.

Poszczególne prawdopodobieństwa są równe:

$$P(k=0, K=2, n=4, N=8) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8-2}{4-0}}{\binom{8}{4}} = \frac{1 \cdot 15}{70} \approx 0.214$$

$$P(k=1, K=2, n=4, N=8) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8-2}{4-1}}{\binom{8}{4}} = \frac{2 \cdot 20}{70} \approx 0.571$$

$$P(k=2, K=2, n=4, N=8) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8-2}{4-2}}{\binom{8}{4}} = 1 - (0.214 + 0.571) \approx 0.215$$

Czyli rozkład można zaprezentować w tabeli:

k	P(k)
0	0.214
1	0.571
2	0.215