

ZADANIE 15.20. Obliczyć całkę $\int (\ln x)^2 dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = (\ln x)^2, \quad dv = dx, \quad \text{skąd} \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \quad v = \int dx = x.$$

Obliczamy

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx.$$

Na podstawie zadania 15.18 mamy w dalszym ciągu

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x (\ln x - 1) + C = x ((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C.$$

ZADANIE 15.21. Obliczyć całkę $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx, \quad \text{skąd} \quad du = \frac{dx}{x^2+1}, \quad v = \int dx = x.$$

Wówczas mamy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2+1}.$$

Ostatnią całkę obliczamy podstawiając $x^2+1=t$, skąd $x dx = \frac{1}{2} dt$ (por. zad. 15.8). Zauważmy, że $t > 0$. Mamy

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln (x^2+1).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C.$$

Zadania

Obliczyć całki (zad. 15.22 - 15.83):

15.22. $\int \left(5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx.$

15.24. $\int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) dx.$

15.26. $\int \frac{x dx}{1+x^2}.$

15.28. $\int \frac{x^2 dx}{a^3+x^3}; a \neq 0.$

15.23. $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx.$

15.25. $\int (x^2+4)^5 x dx.$

15.27. $\int \frac{x dx}{(x^2+3)^6}.$

15.29. $\int \frac{x^3 \sqrt{x} + 4 \sqrt{x}}{x^2} dx.$

$$15.30. \int \frac{x\sqrt{x-x^4}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$15.32. \int \frac{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$15.34. \int \sqrt{3x+1} dx.$$

$$15.36. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}}.$$

$$15.38. \int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}} dx.$$

$$15.40. \int \frac{x}{\sqrt{x^2-6}} dx.$$

$$15.42. \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$15.44. \int \frac{dx}{2 \cos^2 3x}.$$

$$15.46. \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$15.48. \int \frac{\sin x}{a+b \cos x} dx, b \neq 0.$$

$$15.50. \int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$$

$$15.52. \int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3+1)}$$

$$15.54. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$15.56. \int x \ln(1+x^2) dx.$$

$$15.58. \int 6^{1-x} dx.$$

$$15.60. \int \frac{\ln |\operatorname{arctg} x| dx}{1+x^2}.$$

$$15.31. \int (3+2\sqrt[4]{x})^3 dx.$$

$$15.33. \int \frac{3+5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx.$$

$$15.35. \int \sqrt{a+bx} dx.$$

$$15.37. \int x \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$15.39. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$15.41. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}.$$

$$15.43. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$15.45. \int x \sin(2x^2+1) dx.$$

$$15.47. \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx.$$

$$15.49. \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx.$$

$$15.51. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$15.53. \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

$$15.55. \int \frac{e^x dx}{2e^x+1}.$$

$$15.57. \int \frac{\sqrt{2+\ln|x|}}{x} dx.$$

$$15.59. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2|x|}}.$$

$$15.61. \int x e^{x^2(x^2+1)} dx.$$

15.62. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

15.64. $\int \frac{(\pi - \arcsin x) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

15.66. $\int x^4(1+x)^3 dx.$

15.68. $\int x^3 e^x dx.$

15.70. $\int x \cos x dx.$

15.72. $\int x^2 \sin 5x dx.$

15.74. $\int e^{-2x} \sin 3x dx.$

15.76. $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

15.78. $\int \frac{(\ln|x|)^2}{x^5} dx.$

15.80. $\int \frac{\ln|x|}{x^4} dx.$

15.82. $\int x^3(\ln x)^2 dx.$

15.63. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$

15.65. $\int \frac{x dx}{x^4+1}.$

15.67. $\int x^2 e^x dx.$

15.69. $\int x^4 e^{2x} dx.$

15.71. $\int x^2 \cos x dx.$

15.73. $\int e^x \cos x dx.$

15.75. $\int e^x \cos \frac{2}{3}x dx.$

15.77. $\int (\ln|x|)^3 dx.$

15.79. $\int \sqrt{x}(\ln|x|)^3 dx.$

15.81. $\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} dx.$

15.83. $\int x^n \ln x dx, n \neq -1.$