Matematyka Dyskretna — Lista zadań 2

M. Michalski, 23.03.2021

1. Oblicz reszty z następujących działań bez użycia kalkulatora:

(a) $5^{36} \pmod{13}$
(b) $10^{49} + 5^3 \pmod 7$
(c) $37^{13} \pmod{17}$
(d) $2^{83} - 1 \pmod{167}$
(e) $3^{12} + 5^{10} \pmod{11}$
(f) $15^{61} - 1 \pmod 7$
(g) $5^{13} + 6^{13} \pmod 9$
(h) $10^{30} - 7^8 \pmod{15}$
(i) $6^6 + 14^{14} \pmod{128}$

2. Pokaż, że liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3.

3. Wyprowadź podobne kryteria podzielności przez 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 i 13.

4. Ile wynosi reszta z dzielenia liczby $1! + 2! + \cdots + 100!$ przez 12?

5. Oblicz wartości funkcji Eulera: $\phi(15)$, $\phi(16)$, $\phi(19)$, $\phi(24)$, $\phi(675)$.

6. Rozwiąż ponownie zadanie 1 posługując się — jeśli to możliwe — twierdzeniem Eulera

7. Stosując twierdzenie Eulera uprość, a następnie rozwiąż następujące kongruencje:

(a) $2x^5 + x + 1 = 0 \pmod 5$
(b) $x^{19} + 3x^6 - 4x = 1 \pmod 7$
(c) $4x^{13} + 7x^{12} + x = 5 \pmod{13}$
(d) $13^{100}x = 15^{81} \pmod{16}$
(e) $2x^{13} - 6x = 3 \pmod{21}$
(f) $x^{30} + 101x^{25} + x = 3 \pmod 4$

8. Oblicz przy pomocy algorytmu modularnego potęgowania:

(a) $3^{41} \pmod{12}$
(b) $5^{78} \pmod{15}$
(c) $12^{36} \pmod{15}$
(d) $4^{24} \pmod 6$
(e) $11^{12} \pmod{22}$
(f) $7^{50} \pmod{21}$

9. Stosując Chińskie Twierdzenie o Resztach rozwiąż następujące układy kongruencji liniowych

(a) $\begin{cases} x = 2 \pmod 3 \\ x = 3 \pmod 5 \\ x = 4 \pmod{11} \end{cases}$
(b) $\begin{cases} x = 3 \pmod 7 \\ x = 4 \pmod 5 \\ x = 1 \pmod 9 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x = 1 \pmod 3 \\ x = 6 \pmod 8 \\ x = 5 \pmod{11} \\ x = 4 \pmod{25} \end{cases}$
(d) $\begin{cases} 2x + 1 = 3 \pmod 5 \\ 3x + 4 = 2 \pmod 7 \\ 2x - 3 = 1 \pmod 6 \end{cases}$

10. Korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach rozwiązać kongruencje

(a) $24x = 6 \pmod{105}$
(b) $2x^2 + 6 = 0 \pmod{21}$
(c) $x^2 + x = 2 \pmod{28}$
(d) $x^3 + x^2 + x = 29 \pmod{30}$
(e) $2x^3 + x = 3 \pmod{35}$
(f) $x^7 - 2x = 16 \pmod{28}$

11. Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby a) 7^{1000}, b) 3^{763}, c) 11^{889}?

12. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby a) 2^{1000}, b) 6^{1001}.

13. Wykonaj "długie" dzielenie wielomianów $p(x)/s(x)$ obliczając iloraz $q(x)$ i resztę $r(x)$, a następnie sprawdź poprawność obliczeń wg wzoru: $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$.

(a) $p(x) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 13x - 3, \qquad s(x) = x^2 + 2$
(b) $p(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 3x - 1, \qquad s(x) = x^2 - x - 2$
(c) $p(x) = 2x^5 + 3x^4 + 8x^2 + 2x - 15, \qquad s(x) = 2x + 3$
(d) $p(x) = 2x^5 + x^3 + x^2 - 3x - 1, \qquad s(x) = x^3 - x$
(e) $p(x) = 6x^5 - 3x^2 + 2x + 5, \qquad s(x) = 2x^2 + 1$
(f) $p(x) = x^6 - 1, \qquad s(x) = x - 1$

14. Jak w zad. 13, tym razem jednak dzielenie należy wykonać we wskazanej arytmetyce modularnej.

(a) $p(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 1, \qquad s(x) = 3x^2 + 2 \pmod 5$

(b) $p(x) = 3x^3 + x^2, \qquad s(x) = 2x + 1 \pmod 5$

(c) $p(x) = x^4 + x^3, \qquad s(x) = x^2 - 1 \pmod 3$

(d) $p(x) = x^5 + 5, \qquad s(x) = x^2 + 2 \pmod 7$

(e) $p(x) = x^5 + x^2 + x + 1, \qquad s(x) = x^2 + 1 \pmod 2$

(f) $p(x) = x^4, \qquad s(x) = x + 1 \pmod 2$

(g) $p(x) = x^6 + x^2 + 1, \qquad s(x) = x^3 + x + 1 \pmod 2$

(h) $p(x) = 2x^4 + x^2 + 3, \qquad s(x) = 3x + 1 \pmod 4$

15. Zastosuj algorytm Euklidesa dla wielomianów $p(x)$ i $q(x)$ by wyznaczyć ich NWP. W przypadku arytmetyki modularnej, gdy wielomiany są względnie pierwsze, zastosuj rozszerzoną procedurę do znalezienia multiplikatywnej odwrotności $p(x)$ względem $q(x)$ i odwrotnie.

(a) $p(x) = x^2 + 4x + 3, \qquad q(x) = x^2 + x - 6$

(b) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15, \qquad q(x) = x^2 - 3x - 10$

(c) $p(x) = x^3 + x + 2, \qquad q(x) = x^2 + 2 \pmod 3$

(d) $p(x) = x^3 - 1, \qquad q(x) = x^2 + 2x + 2 \pmod 3$

(e) $p(x) = x^4 + x^3 + x, \qquad q(x) = x^2 + 1 \pmod 2$