

Matematyka Dyskretna — Lista zadań 1

M. Michalski, 24.02.2021

1. Zamień liczby na postać dziesiętną: $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{35}{11}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{33}{20}$.
2. Zamień liczby na postać wymierną: 3.52, 0.(75), 1.(1), 0.234(56), 0.3267(123), 0.77(9).
3. Przedstaw liczby z zad. 1 i 2 w postaci: binarnej, trójkowej, szóstkowej, szesnastkowej.
4. Pokaż, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest wymierna.
5. Udowodnij, że liczba jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie pozycyjne w dowolnej podstawie jest od pewnego miejsca okresowe.
6. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą następujące relacje podzielności:

$$\text{a) } 6 \mid 10^n - 4, \quad \text{b) } 133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1} \quad \text{c) } 43 \mid 6^n + 7^{2n+3} \quad \text{d) } 3 \mid \frac{n(n^2 + 5)}{2} .$$

7. Udowodnij, że istnieje liczba postaci $11\dots 1$, która dzieli się przez 197.
8. Algorytmem Euklidesa wyznacz: $\text{NWP}(18, 84)$, $\text{NWP}(546, 308)$, $\text{NWP}(231, 95)$, $\text{NWP}(256, 42)$.
9. Zastosuj rozszerzony algorytm Euklidesa w zad. 8 do wyznaczenia stałych x i y w tożsamości Bezout

$$mx + ny = \text{NWP}(m, n)$$

10. Zaimplementuj algorytm Euklidesa w wersji podstawowej i rozszerzonej w dowolnym języku programowania.
11. Rozłóż następujące liczby na czynniki pierwsze: 24, 32, 105, 252, 1073, 6325, 75600.
12. Rozłóż liczbę $100!$ na czynniki pierwsze.
13. Iloma zerami zakończona jest liczba $1000!$?
14. Wyznacz wzór na najwyższą potęgę k liczby pierwszej p , która dzieli liczbę $n!$.
15. Zbuduj tabliczki dodawania i mnożenia modularnego w \mathbb{Z}_n dla n od 2 do 9. Opisz jakie różnice zachodzą między tabelkami dla n pierwszych i złożonych.
16. Korzystając z utworzonych tabelk wyznacz wszystkie rozwiązania następujących kongruencji liniowych:

(a) $5x = 2 \pmod{7}$	(e) $5x = 2 \pmod{6}$	(i) $5x + 1 = 4 \pmod{8}$
(b) $4x = 2 \pmod{7}$	(f) $4x = 2 \pmod{6}$	(j) $6x + 4 = 0 \pmod{8}$
(c) $4x = 3 \pmod{7}$	(g) $4x = 3 \pmod{6}$	(k) $6x + 8 = 5 \pmod{9}$
(d) $5x + 2 = 3 \pmod{7}$	(h) $3x + 2 = 5 \pmod{6}$	(l) $3x + 5 = 7 \pmod{9}$

17. Znajdź wszystkie rozwiązania następujących kongruencji:

(a) $9x + 6 = 0 \pmod{18}$	(d) $6x = 9 \pmod{15}$	(g) $24x = 40 \pmod{64}$
(b) $4x + 5 = 1 \pmod{15}$	(e) $20x + 2 = 10 \pmod{36}$	(h) $15x + 72 = 3 \pmod{111}$
(c) $6x = 10 \pmod{15}$	(f) $14x + 2 = 9 \pmod{21}$	(i) $75x = 48 \pmod{90}$