Grupa I

1. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $15x = 24 \pmod{51}$.

2. Oblicz $5^{65} + 6^{56} \pmod{32}$.

3. Podaj rozwiązanie układu kongruencji

$$\begin{cases} x = 2 & (\text{mod } 3) \\ x = 1 & (\text{mod } 4) \\ x = 3 & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

4. Wyznacz 2 ostatnie cyfry liczby 6^{183}.

5. Wyznacz wszystkie rozwiązania $2x^6 + 3x - 5 = 0 \pmod{14}$ korzystając z Chińskiego Tw. o Resztach.

ROZWIĄZANIA

1. Ponieważ NWP$(51, 15) = 3$ oraz 24 także dzieli się przez 3, równanie równoważne jest $5x = 8 \pmod{17}$. Odwrotnością 5 mod 17 jest 7 ($5 \cdot 7 = 35 = 1 \pmod{17}$), a więc $x = 8 \cdot 7 = 5 \pmod{17}$. Rozwiązanie ogólne

$$x \;=\; 5 + 17k \;=\; 5,\ 22,\ 39\ +\ 51k, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. $\phi(32) = \phi(2^5) = 2^4 \cdot 1 = 16$. Ponieważ NWP$(32, 5) = 1$, na podstawie tw. Eulera mamy $5^{16} = 1 \pmod{32}$, a więc $5^{65} = (5^{16})^4 \cdot 5 = 5 \pmod{32}$. Dalej NWP$(32, 6) = 2$, ale $6^{56} = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 6^{51} = 0 \pmod{32}$. Ostatecznie $5^{65} + 6^{56} = 5 + 0 \pmod{32}$.

3. Obliczamy $M = 60$ i kolejno

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl} M_1 &=& 20 & M_2 &=& 15 & M_3 &=& 12 \\ M_1^{-1} &=& 2\,(\text{mod } 3) & M_2^{-1} &=& 3\,(\text{mod } 4) & M_3^{-1} &=& 3\,(\text{mod } 5) \end{array}$$

Stąd $x \;=\; 2 \cdot 20 \cdot 2 \;+\; 1 \cdot 15 \cdot 3 \;+\; 3 \cdot 12 \cdot 3 \;=\; 233 \;=\; 53\,(\text{mod } 60)$.

4. Ponieważ NWP$(100, 6) = 2 \neq 1$, rozkładamy $100 = 2^2 \cdot 5^2$ i tożsamość $x = 6^{183}\,(\text{mod } 100)$ zamieniamy w podwójny układ, od razu go upraszczając mod 4 i mod 25:

$$\begin{array}{rcl} x &=& 6^{183}\,(\text{mod } 4) \\ x &=& 6^{183}\,(\text{mod } 25) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x &=& 0\,(\text{mod } 4) \\ x &=& 16\,(\text{mod } 25)\,. \end{array}$$

Pierwsze równanie wynika z tego że $x = 6^{183} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^{181}$ dzieli się przez 4, a drugie z zastosowania tw. Eulera: $\phi(25) = 5 \cdot 4 = 20$ i $6^{183} = (6^{20})^9 \cdot 6^3 = 216 = 16\,(\text{mod } 25)$. Mamy więc $M^1 = 25$, $M_1^{-1} = 1\,(\text{mod } 4)$ oraz $M_2 = 4$, $M_2^{-1} = 19\,(\text{mod } 25)$. Stąd

$$x \;=\; 0 \cdot 25 \cdot 1 \;+\; 16 \cdot 4 \cdot 19 \;=\; 1216 \;=\; 16\,(\text{mod } 100)\,.$$

5. Rozkładając $14 = 2 \cdot 7$, zapisujemy i upraszczamy układ 2 równań odpowiednio mod 2 i mod 7:

$$\begin{array}{rcl} 2x^6 + 3x - 5 &=& 0\,(\text{mod } 2) \\ 2x^6 + 3x - 5 &=& 0\,(\text{mod } 7) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x &=& 1\,(\text{mod } 2) \\ x &=& 1\,(\text{mod } 7)\,. \end{array}$$

Pierwsze z uproszczonych równań otrzymamy podstawiając kolejno $x = 0$ i $x = 1$ w oryginalnym. Drugie równanie wynika z zastosowania tw. Eulera: $\phi(7) = 6$, a więc $x^6 = 1\,(\text{mod } 7)$ dla $x \neq 0$, a ponadto $x = 0$ nie jest rozwiązaniem. Stosując teraz Chińskie Tw. mamy $M_1 = 7$, $M_1^{-1} = 1\,(\text{mod } 2)$, $M_2 = 2$, $M_2^{-1} = 4\,(\text{mod } 7)$, a zatem

$$x \;=\; 1 \cdot 7 \cdot 1 \;+\; 1 \cdot 2 \cdot 4 \;=\; 15 \;=\; 1\,(\text{mod } 14)\,.$$

Grupa II

1. Wyznacz wszystkie rozwiązania kongruencji liniowej $57x = 38 \pmod{95}$.

2. Oblicz $3^{443} - 2^{121} \pmod{55}$.

3. Podaj rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x = 2 \pmod{13} \\ x = 5 \pmod{16} \end{cases}$$

4. Wyznacz 2 ostatnie cyfry liczby 18^{121}.

5. Wyznacz wszystkie rozwiązania kongruencji $x^{20} + 3 = 0 \pmod{14}$ korzystając z Chińskiego Tw. o Resztach.

ROZWIĄZANIA

1. Ponieważ $\mathrm{NWP}(95, 57) = 19$ oraz 38 także dzieli się przez 19, redukujemy równanie dzieląc wszystko przez 19: $3x = 2 \pmod 5$. Odwrotność 3 mod 5 to 2, mnożąc równanie stronami przez 2 otrzymujemy

$$x = 4 + 5k = 4,\, 9,\, 14,\, 19,\, \ldots,\, 89,\, 94 + 95k, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

2. Ponieważ $\mathrm{NWP}(55, 3) = \mathrm{NWP}(55, 2) = 1$, do obydwu składników można zastosować tw. Eulera: $\phi(55) = \phi(5) \cdot \phi(11) = 40$, a więc

$$3^{443} - 2^{121} = (3^{40})^{11} \cdot 3^3 - (2^{40})^3 \cdot 2 = 27 - 2 = 25 \pmod{55}\,.$$

3. Stosujemy Chińskie Tw. obliczając $M = 208$ oraz

$$\begin{array}{rclrcl} M_1 & = & 16 & M_2 & = & 13 \\ M_1^{-1} & = & 9 \pmod{13} & M_2^{-1} & = & 5 \pmod{16}\,. \end{array}$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie

$$x = 2 \cdot 16 \cdot 9 + 5 \cdot 13 \cdot 5 = 613 = 197 \pmod{208}\,.$$

4. Ponieważ $\mathrm{NWP}(100, 18) = 2 \neq 1$, rozkładamy $100 = 2^2 \cdot 5^2$ i tożsamość $x = 18^{121} \pmod{100}$ zamieniamy w podwójny układ, od razu go upraszczając mod 4 i mod 25:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 18^{121} \pmod 4 \\ x & = & 18^{121} \pmod{25} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 0 \pmod 4 \\ x & = & 18 \pmod{25}\,. \end{array}$$

Pierwsze równanie wynika z tego że $x = 18^{121} = 2^2 \cdot 9^2 \cdot 18^{119}$ dzieli się przez 4, a drugie z zastosowania tw. Eulera: $\phi(25) = 5 \cdot 4 = 20$ i $18^{121} = (18^{20})^6 \cdot 18 = 18 \pmod{25}$. Mamy więc $M^1 = 25$, $M_1^{-1} = 1 \pmod 4$ oraz $M_2 = 4$, $M_2^{-1} = 19 \pmod{25}$. Stąd

$$x = 0 \cdot 25 \cdot 1 + 18 \cdot 4 \cdot 19 = 1368 = 68 \pmod{100}\,.$$

5. Rozbijamy tożsamość na układ 2 równań, rozkładając liczbę $14 = 2 \cdot 7$. Upraszczamy równania odpowiednio mod 2 i mod 7 i otrzymujemy

$$\begin{array}{rcl} x^{20} + 3 & = & 0 \pmod 2 \\ x^{20} + 3 & = & 0 \pmod 7 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 1 \pmod 2 \\ x & = & a \pmod 7), \quad a = 2,\, 5\,. \end{array}$$

Pierwsze z uproszczonych równań otrzymamy podstawiając kolejno $x = 0$ i $x = 1$ w oryginalnym. Drugie równanie wynika z zastosowania tw. Eulera: $\phi(7) = 6$, a więc $x^{20} = (x^6)^3 \cdot x^2 = x^2 \pmod 7$, czyli równanie redukuje się do $x^2 + 3 = 0 \pmod 7$ albo równoważnie $x^2 = 4 \pmod 7$ dla $x \neq 0$. Podstawiając kolejno $x = 1, 2, \ldots, 6$, znajdujemy $x = 2$ i $x = 5$ jako rozwiązania, ponadto $x = 0$ nie jest rozwiązaniem. Stosując teraz Chińskie Tw. mamy $M_1 = 7$, $M_1^{-1} = 1 \pmod 2$, $M_2 = 2$, $M_2^{-1} = 4 \pmod 7$, a zatem

$$x = 1 \cdot 7 \cdot 1 + a \cdot 2 \cdot 4 = 8a + 7 = 5 \text{ lub } 9 \pmod{14}\,.$$