

1. Przekształć podaną niżej gramatykę do postaci Chomsky'ego:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid aY \mid bZ \\ X &\rightarrow aaY \mid abZ \mid \lambda \\ Y &\rightarrow bbX \\ Z &\rightarrow ZYa \mid ZXZ \end{aligned}$$

2. Zbuduj gramatykę bezkontekstową dla języka $L = \{a^m b^n c^k : k \neq m + n, m, n, k \geq 0\}$.

WSKAZÓWKA: Rozważ przypadki $k > m + n$ i $k < m + n$.

3. Czy dopełnienie języka L poprawnie zagnieżdżonych nawiasów jest językiem bezkontekstowym?

WSKAZÓWKA: Oznaczając odpowiednio przez $N_o(\alpha, k)$ i $N_z(\alpha, k)$ liczbę otwierających i zamykających nawiasów wśród początkowych k znaków słowa α , język L opisany jest warunkiem: $N_o(\alpha, k) \geq N_z(\alpha, k)$ dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, n-1$ oraz $N_o(\alpha, n) = N_z(\alpha, n)$, gdzie $n = |\alpha|$.

4. Pokaż, że $L = \{a^p b^{pq} c^q : p, q > 0\}$ nie jest językiem bezkontekstowym.

5. Taśma maszyny Turinga zawiera napis a^n . Jej działanie polega na “podzieleniu” tego słowa przez 2, czyli na usunięciu z taśmy połowy liter a i zatrzymaniu się w stanie akceptującym. Jeśli n jest nieparzyste, maszyna powinna zatrzymać się w stanie nieakceptującym i w tym wypadku końcowa zawartość taśmy jest nieistotna. Narysuj deterministyczny graf przejść dla tej maszyny.

1. Przekształć podaną niżej gramatykę do postaci Chomsky'ego:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid aY \mid bZ \\ X &\rightarrow aaY \mid abZ \mid \lambda \\ Y &\rightarrow bbX \\ Z &\rightarrow ZYa \mid ZXZ \end{aligned}$$

2. Zbuduj gramatykę bezkontekstową dla języka $L = \{a^m b^n c^k : k \neq m + n, m, n, k \geq 0\}$.

WSKAZÓWKA: Rozważ przypadki $k > m + n$ i $k < m + n$.

3. Czy dopełnienie języka L poprawnie zagnieżdżonych nawiasów jest językiem bezkontekstowym?

WSKAZÓWKA: Oznaczając odpowiednio przez $N_o(\alpha, k)$ i $N_z(\alpha, k)$ liczbę otwierających i zamykających nawiasów wśród początkowych k znaków słowa α , język L opisany jest warunkiem: $N_o(\alpha, k) \geq N_z(\alpha, k)$ dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, n-1$ oraz $N_o(\alpha, n) = N_z(\alpha, n)$, gdzie $n = |\alpha|$.

4. Pokaż, że $L = \{a^p b^{pq} c^q : p, q > 0\}$ nie jest językiem bezkontekstowym.

5. Taśma maszyny Turinga zawiera napis a^n . Jej działanie polega na “podzieleniu” tego słowa przez 2, czyli na usunięciu z taśmy połowy liter a i zatrzymaniu się w stanie akceptującym. Jeśli n jest nieparzyste, maszyna powinna zatrzymać się w stanie nieakceptującym i w tym wypadku końcowa zawartość taśmy jest nieistotna. Narysuj deterministyczny graf przejść dla tej maszyny.

Rozwiązania

1. Gramatyka po eliminacji produkcji $X \rightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid aY \mid bZ \mid Y \\ X &\rightarrow aaY \mid abZ \\ Y &\rightarrow bbX \mid bb \\ Z &\rightarrow ZYa \mid ZXZ \mid ZZ \end{aligned}$$

Po eliminacji produkcji jednostkowej $S \rightarrow Y$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid aY \mid bZ \mid bbX \mid bb \\ X &\rightarrow aaY \mid abZ \\ Y &\rightarrow bbX \mid bb \\ Z &\rightarrow ZYa \mid ZXZ \mid ZZ \end{aligned}$$

Symbol Z nie wyprowadza napisu terminalnego, jest więc bezużyteczny. Usuwamy produkcje zawierające Z :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid aY \mid bbX \mid bb \\ X &\rightarrow aaY \\ Y &\rightarrow bbX \mid bb \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu dodatkowych symboli nieterminalnych P, Q oraz produkcji $A \rightarrow a$ i $B \rightarrow b$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XY \mid AY \mid BP \mid BB \\ P &\rightarrow BX \\ X &\rightarrow AQ \\ Q &\rightarrow AY \\ Y &\rightarrow BP \mid BB \end{aligned}$$

2. Utwórzmy najpierw gramatykę generującą język $L = \{a^m b^n c^{m+n} : n, m \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow aPc \mid Q \\ Q &\rightarrow bQc \mid \lambda \end{aligned}$$

Język L_1 dla przypadku $k > n + m$ opisany jest przez produkcje $S \rightarrow PC$ oraz $C \rightarrow cC \mid c$.

Drugi przypadek $k < m + n$, czyli język L_2 , generuje gramatyka

$$\begin{aligned} R &\rightarrow aRc \mid ABQ \mid AQ \mid BQ \\ A &\rightarrow aA \mid a \\ B &\rightarrow bB \mid b \end{aligned}$$

Ostatecznie produkcje $S \rightarrow PC \mid R$ generują język $L_1 \cup L_2$.

3. Słowa języka L^c charakteryzuje zaprzeczenie warunku podanego we wskazówce: $N_o(\alpha, n) \neq N_z(\alpha, n)$ (język L_1) lub, jeśli te liczby są równe, wówczas istnieje $1 \leq k < n$ takie, że $N_o(\alpha, k) < N_z(\alpha, k)$ (język L_2). Mamy więc $L^c = L_1 \cup L_2$. Zbudujemy gramatyki bezkontekstowe dla obydwu tych języków. Słowa w L_1 zawierają przewagę nawiasów otwierających lub zamykających. Gramatyka dla L_1 (por. jedno z zadań domowych) składa się więc z produkcji $S_1 \rightarrow S_o \mid S_z$ oraz

$$S_o \rightarrow (P \mid PS_o \mid S_o S_o, \quad S_z \rightarrow)P \mid PS_z \mid S_z S_z,$$

gdzie P generuje słowa o równej liczbie znaków '(' i ')': $P \rightarrow (P) \mid)P(\mid PP \mid \lambda$.

Zauważmy, że gramatyka dla L_2 nie może ograniczyć się do produkcji z samym P : o ile bowiem P wyprowadza wszystkie słowa z języka L_2 , wyprowadza także słowa spoza niego — te o poprawnie zagnieżdżonych nawiasach. Słowa w L_2 charakteryzują się tym, że oglądając ich kolejne znaki napotkamy w pewnym miejscu pierwszy nawias ')' nie do pary. Poprzedzająca go część jest więc słowem o poprawnie zagnieżdżonych nawiasach. Gdzieś dalej musi się też znaleźć uzupełniający nawias '(', by ostatecznie liczby N_o i N_z były równe. Innymi słowy

$$\omega \in L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \alpha) \beta (\gamma, \quad \text{gdzie} \quad Q \Rightarrow^* \alpha, \quad P \Rightarrow^* \beta \quad \text{i} \quad P \Rightarrow^* \gamma,$$

przy czym $Q \rightarrow (Q) \mid QQ \mid \lambda$. Ostatecznie język L_2 generowany jest przez $S_2 \rightarrow Q)P(P$.

4. Załóżmy, że L jest bezkontekstowy i niech m będzie stałą z lematu o pompowaniu. Weźmy słowo $\alpha = a^m b^{m^2} c^m$. Jeśli w podziale $\alpha = \beta\gamma\delta\epsilon\eta$ fragmenty podlegające pompowaniu γ i ϵ zbudowane są wyłącznie z a , b lub c , pompowanie w oczywisty sposób naruszy relację między liczbą liter b oraz a i c . Jedynie przypadki $\gamma = a^r$ i $\epsilon = b^s$ oraz symetrycznie $\gamma = b^s$ i $\epsilon = c^r$, $r, s > 0$, mogłyby prowadzić do pompowania zachowującego strukturę słów języka. Musi przy tym zachodzić $r + s \leq m$. W pierwszym przypadku pompowanie produkuje słowa

$$\alpha_k = a^{m+kr} b^{m^2+ks} c^m, \quad k = 1, 2, \dots$$

dla których powinna być spełniona relacja $m^2 + ks = (m + kr)m$ jeśli α_k miałyby należeć do L . To jest jednak możliwe jedynie gdy $s = rm$, co w połączeniu z $s \leq m - r$ prowadzi natychmiast do sprzeczności $rm \leq m - r$, czyli $r(m + 1) \leq m$. Drugi przypadek jest analogiczny.

m			m^2			m		
aaa			bbb			ccc		
β	γ	δ	ϵ	η				
β				γ	δ	ϵ	η	

5. Maszyna zamienia pierwszą literę a na symbol A i przesuwą głowicę w prawo do końca napisu wejściowego. Tam zamienia ostatnią literę a na symbol pusty O (przejście do stanu S_3). Następnie przesuwą głowicę w lewo aż do napotkania symbolu A . Powraca do stanu S_0 wykonując ruch w prawo. Cykl powtarza się dopóki na taśmie pozostają litery a niezamienione na A . Jeśli początkowa liczba liter a była parzysta, w stanie S_0 pod głowicą pojawi się symbol pusty O . Maszyna przedzie wówczas do stanu akceptującego S_4 i poruszając się w lewo pozamienia symbole A na powrót w a . Ich liczba będzie o połowę mniejsza od początkowej. Jeśli jednak na początku liczba a jest nieparzysta, maszyna w kolejnym cyklu zatrzyma się w stanie S_2 z głowicą ustawioną na ostatnim symbolu A , nie mogąc wykonać kolejnego ruchu.

