GRAFIKA 2D — ANALIZA FOURIEROWSKA

Miłosz Michalski

Institute of Physics
Nicolaus Copernicus University

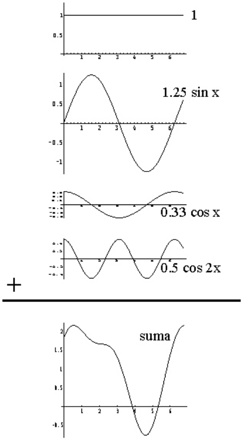
Maj 2020

Plan wykładu

- Zaawansowana korekta obrazów barwnych wg kolorów neutralnych lub karnacji
- Warstwy, tryby łączenia i efekty przeźroczystości
- Nieinwazyjna korekta obrazu na przykładzie operacji *Burn* i *Dodge*
- Konstrukcja filtrów konwolucyjnych (rozmycie, wykrywanie krawędzi)
- Filtry wyostrzające — konstrukcja macierzowa i warstwowa
- **Analiza Fourierowska — usuwanie rastrów i korekta obrazów poruszonych**
- Resampling
- Formaty plików graficznych, metody kompresji
- PostScript i PDF — techniki i narzędzia

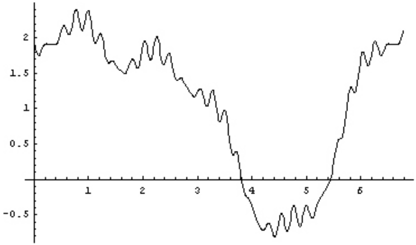
Funkcje okresowe

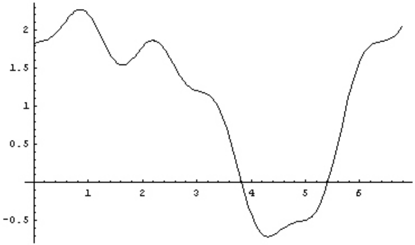
Sumy funkcji trygonometrycznych



$$f(x) \;=\; 1\,{\color{red}(\cos 0x)}\;+1.25\sin x+0.33\cos x+0.5\cos 2x$$

Reprezentacja przez funkcje okresowe





$$f(x) = 1 + 1.25 \sin x + 0.33 \cos x + 0.5 \cos 2x - 0.2 \sin 5x + 0.1 \cos 25x - 0.07 \sin 30x$$

$$[1.0 \quad 1.25 \quad 0.33 \quad 0.0 \quad 0.5 \quad 0.0 \quad \ldots \quad -0.2 \quad 0.0 \quad \ldots \quad 0.1 \quad 0.0 \quad \ldots \quad -0.07]$$

Twierdzenie o rozwijalności funkcji w szereg Fouriera

Funkcja różniczkowalna $f : [-T, T] \to \mathbb{R}$ *posiada jednostajnie zbieżny do niej szereg Fouriera*

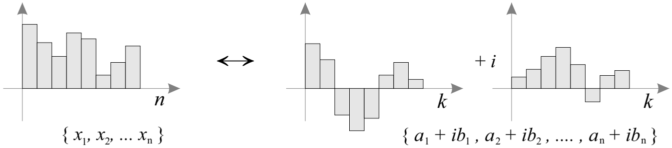
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x \Big),$$

gdzie $\omega = \frac{\pi}{T}$. *Współczynniki* a_k *i* b_k *wyrażają się wzorami*

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos k\omega x \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin k\omega x \, dx.$$

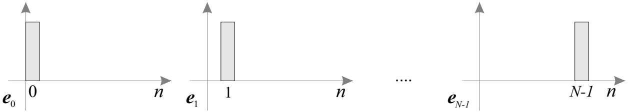
$$f(x) \longleftrightarrow \{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$$

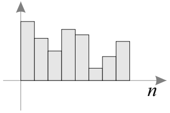
Dyskretna transformata Fouriera



$$Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \frac{2\pi k n}{N} + i \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin \frac{2\pi k n}{N} \right)$$

Transformata Fouriera jako operacja zmiany bazy



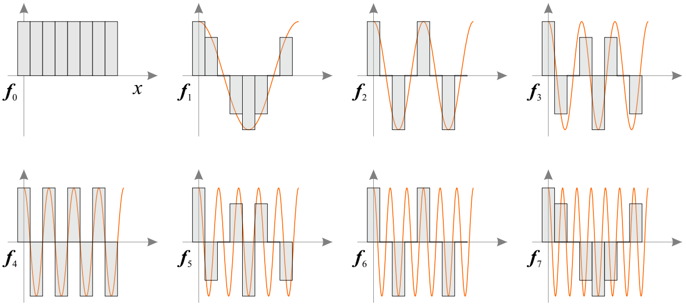


$$= \quad x_0 e_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_{N-1} e_{N-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-2\pi i / N} & \cdots & e^{-2\pi i (N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-2\pi i (N-1)/N} & \cdots & e^{-2\pi i (N-1)^2 / N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

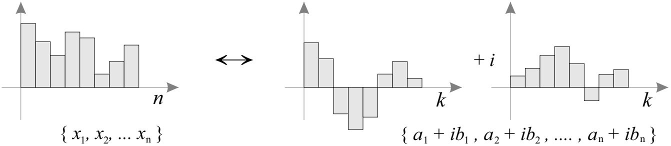
Transformata Fouriera jako operacja zmiany bazy

$$\left[\quad e^{-2\pi i k n/N} \quad\right] = \left[\quad \cos\frac{2\pi k n}{N} \quad\right] - i\left[\quad \sin\frac{2\pi k n}{N} \quad\right]$$



$$f_{kn} = \cos\frac{2\pi k n}{8} \qquad k = 0, 1, ..., 7$$

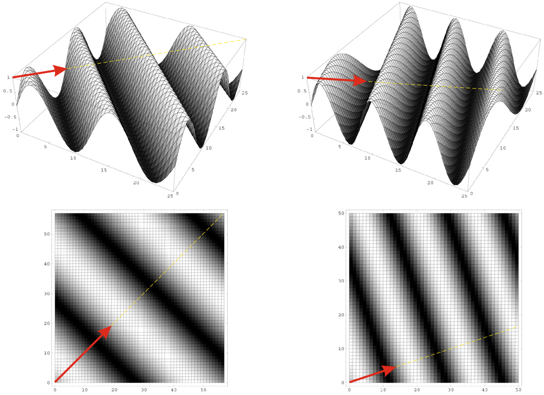
Transformata Fouriera jako operacja zmiany bazy



$$\sum x_n \boldsymbol{e}_n \quad \leftrightarrow \quad \sum a_k \boldsymbol{f}_k + i \sum b_k \boldsymbol{g}_k$$

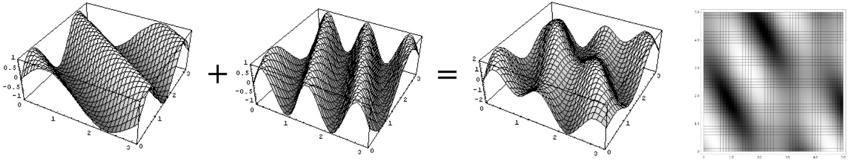
$$|a_k + ib_k| = \text{udział sygnału częstotliwości } \frac{2\pi}{N} k \text{ w próbce } \boldsymbol{x}$$

$$\sin(ax+by), \qquad \cos(ax+by), \qquad e^{(-2\pi i(ax+by))}$$



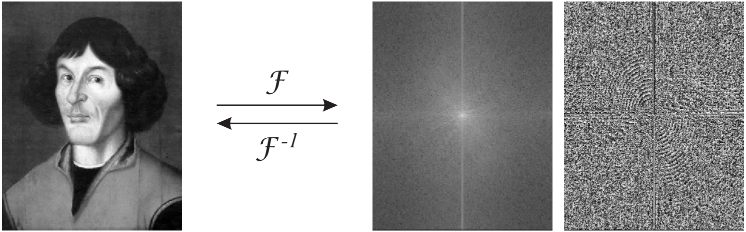
Wykresy funkcji $\sin(x+y)$ i $\sin(3x+y)$.

Transformata Fouriera 2D



Więcej składników – więcej szczegółów

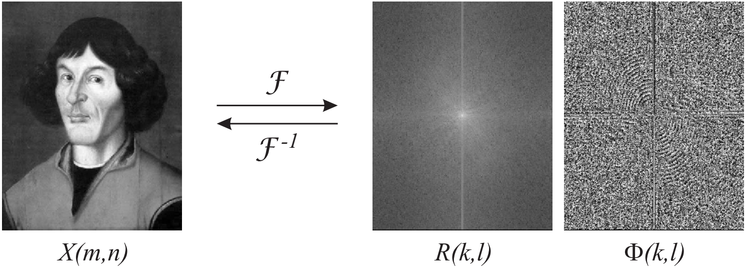
Transformata Fouriera 2D



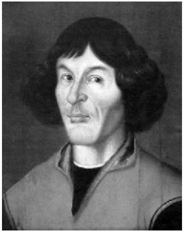
$X(m,n)$ $R(k,l)$ $\Phi(k,l)$

$$
\begin{aligned}
\hat{X}(k,l) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m,n) e^{-2\pi i (mk/M + nl/N)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m,n) \Big(\cos 2\pi(\ldots) \; - \; i \, \sin 2\pi(\ldots) \Big) \\
&= R(k,l)\, e^{i\Phi(k,l)}, \qquad 0 \le k \le M-1, \quad 0 \le l \le N-1 \,.
\end{aligned}
$$

Własności transformat Fouriera 2D

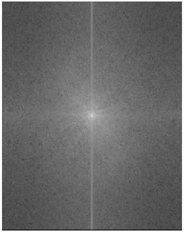


Własności transformat Fouriera 2D

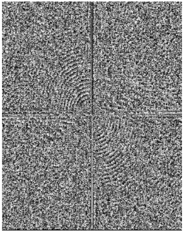


$X(m,n)$

$$\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}$$



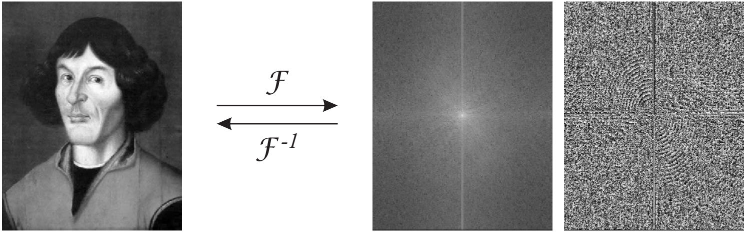
$R(k,l)$



$\Phi(k,l)$

- $\mathcal{F}^{-1}$: $$X(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{X}(k,l) e^{2\pi i (km/M + ln/N)}$$

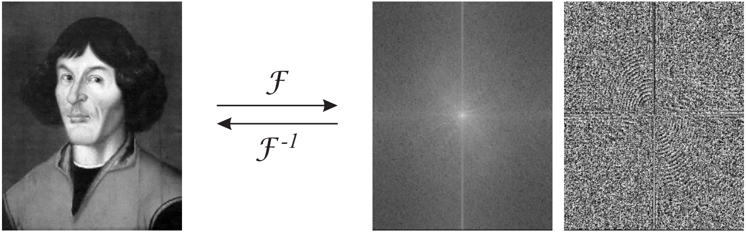
Własności transformat Fouriera 2D



$X(m,n)$ $R(k,l)$ $\Phi(k,l)$

- $\mathcal{F}^{-1}$: $$X(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{X}(k,l) e^{2\pi i (km/M + ln/N)}$$
- Obraz $X(m,n)$ zawiera MN pikselków, natomiast $\hat{X}(k,l)$ ma ich dwukrotnie więcej ?!

Własności transformat Fouriera 2D



$X(m,n)$ $R(k,l)$ $\Phi(k,l)$

- $\mathcal{F}^{-1}$: $$X(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{X}(k,l) e^{2\pi i (km/M + ln/N)}$$
- Obraz $X(m,n)$ zawiera MN pikselków, natomiast $\hat{X}(k,l)$ ma ich dwukrotnie więcej ?!
- Gdy X jest rzeczywiste, transformata Fouriera ma specyficzną symetrię ($\hat{X}$ zawiera redundantną informację)

$$\hat{X}(k,l) = \overline{\hat{X}(-k,-l)}$$

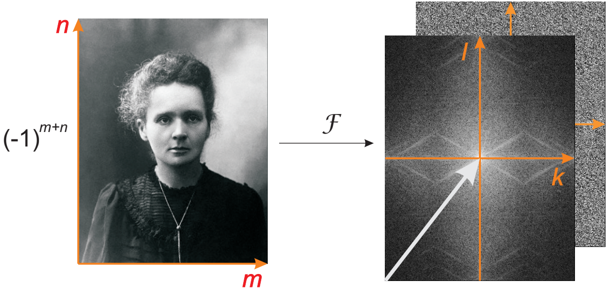
Własności transformat Fouriera 2D

Własności transformat Fouriera 2D

- Proste przekształcenie obrazu X przed działaniem $\mathcal{F}$ sprawi, że obrazy R i Θ będą poręcznie "wycentrowane" w ramce $M \times N$:

$$X(m,n) \longmapsto (-1)^{m+n} X(m,n) \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \hat{X}(k - M/2, l - N/2)$$

t.j. że punkt $(k,l) = (0,0)$ zostanie przesunięty do środka ramki $(M/2, N/2)$ itd.



Własności transformat Fouriera 2D

- Za sprawą symetrii $\hat{X}(k,l) = \overline{\hat{X}(-k,-l)}$ każdy z obrazów R i Θ zawiera jedynie $MN/2$ niezależnych pikseli.

Własności transformat Fouriera 2D

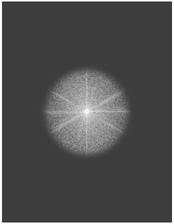
- Za sprawą symetrii $\hat{X}(k,l) = \overline{\hat{X}(-k,-l)}$ każdy z obrazów R i Θ zawiera jedynie $MN/2$ niezależnych pikseli.
- Obrazy $R(k,l)$ i $\Phi(k,l)$ dla jednokanałowego obrazu (grayscale) $X(m,n)$ zapisywane są zwykle w oddzielnych kanałach barwnych (R i G, B – nieużywany). Gdy X jest obrazem barwnym (RGB) — potrzeba 6 kanałów wynikowych na przechowanie $\hat{X}$, po 2 na każdy kanał wejściowy.

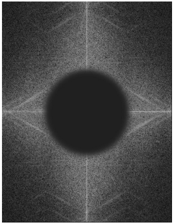
Własności transformat Fouriera 2D

- Za sprawą symetrii $\hat{X}(k,l) = \overline{\hat{X}(-k,-l)}$ każdy z obrazów R i Θ zawiera jedynie $MN/2$ niezależnych pikseli.
- Obrazy $R(k,l)$ i $\Phi(k,l)$ dla jednokanałowego obrazu (grayscale) $X(m,n)$ zapisywane są zwykle w oddzielnych kanałach barwnych (R i G, B – nieużywany). Gdy X jest obrazem barwnym (RGB) — potrzeba 6 kanałów wynikowych na przechowanie $\hat{X}$, po 2 na każdy kanał wejściowy.
- Wartości R i Θ są pamiętane jako liczby zmiennopozycyjne, często zwiększonej precyzji (minimalizacja błędów numerycznych podczas przetwarzania). Dla sensownej wizualizacji są dyskretyzowane w skali logarytmicznej (ze względu na typowo znaczne różnice wielkości R) do 256 poziomów, przy czym dla Θ odcień 127 oznacza wartość 0.

Filtry dolno- i górno-przepustowe

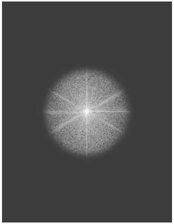
Zaciemnianie fragmentów obrazów R i Θ odpowiada zerowaniu (lub zmniejszaniu) wybranych wartości $R(k,l)$, $\Theta(k,l)$.

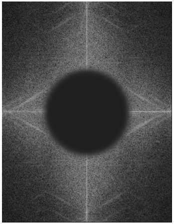




Filtry dolno- i górno-przepustowe

Zaciemnianie fragmentów obrazów R i Θ odpowiada zerowaniu (lub zmniejszaniu) wybranych wartości $R(k,l)$, $\Theta(k,l)$.

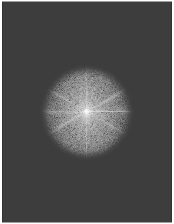


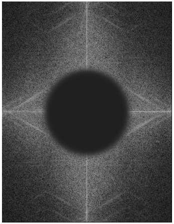


- Eliminacja wysokich częstotliwości (duże k, l) odpowiada usunięciu z oryginalnego obrazu drobnych szczegółów, a więc jego **rozmyciu**

Filtry dolno- i górno-przepustowe

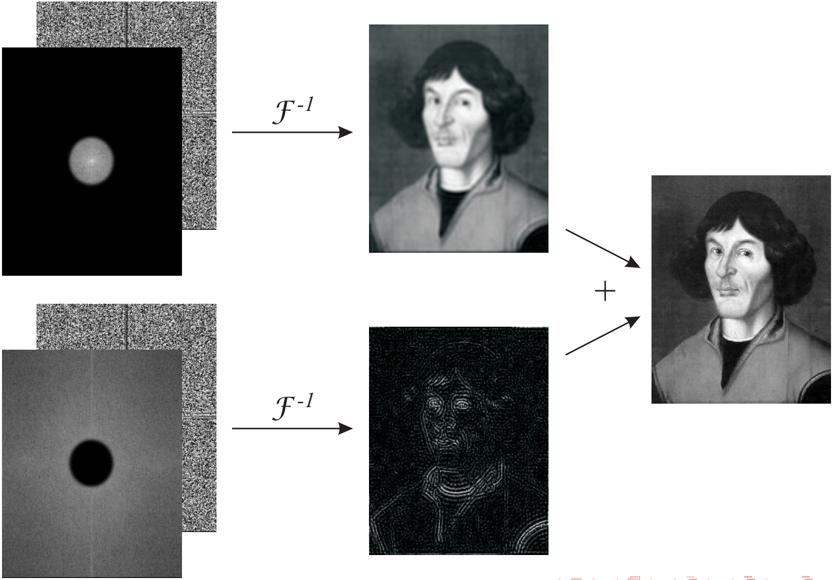
Zaciemnianie fragmentów obrazów R i Θ odpowiada zerowaniu (lub zmniejszaniu) wybranych wartości $R(k,l)$, $\Theta(k,l)$.





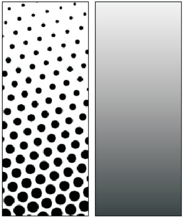
- Eliminacja wysokich częstotliwości (duże k, l) odpowiada usunięciu z oryginalnego obrazu drobnych szczegółów, a więc jego **rozmyciu**
- Eliminacja niskich częstotliwości prowadzi do wyodrębnienia z obrazu drobnych szczegółów.

Filtry dolno- i górno-przepustowe



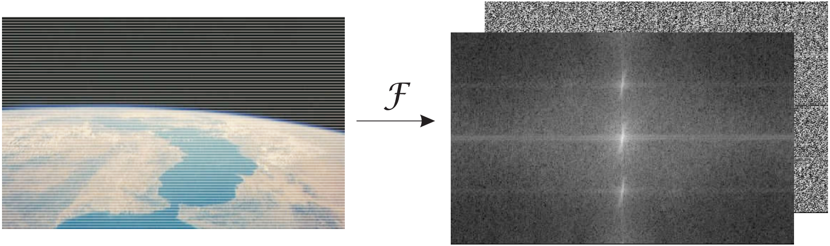
Periodyczne zakłócenia obrazu

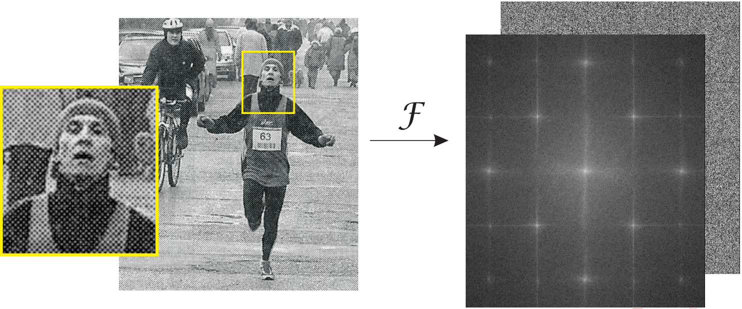
W poligrafii stosowane są rastrowe wyciągi półtonowe w celu optycznej reprezentacji wielu odcieni przy użyciu jednej farby drukarskiej.



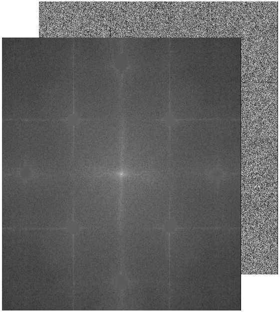
Wzór rastra, podobnie jak prążki interferencyjne w obrazie TV, uważamy za periodyczne zakłócenia jasności obrazu. W obrazie fourierowskim takie zakłócenia uwidaczniają się jako punkty o bardzo dużej amplitudzie $R(k, l)$. Usuwanie zakłóceń periodycznych polega na eliminacji składników o nieproporcjonalnie wielkich, rezonansowych amplitudach.

Wyodrębnianie rastra



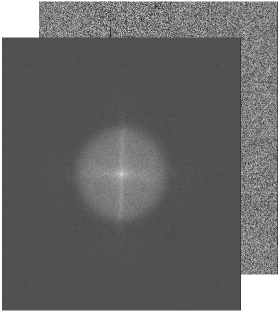


Usuwanie rastra 1



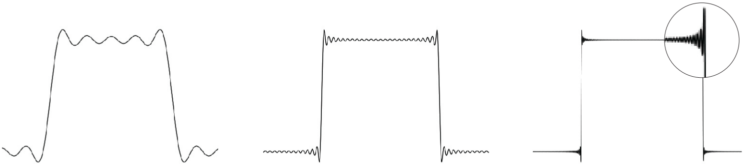
$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

Usuwanie rastra 2



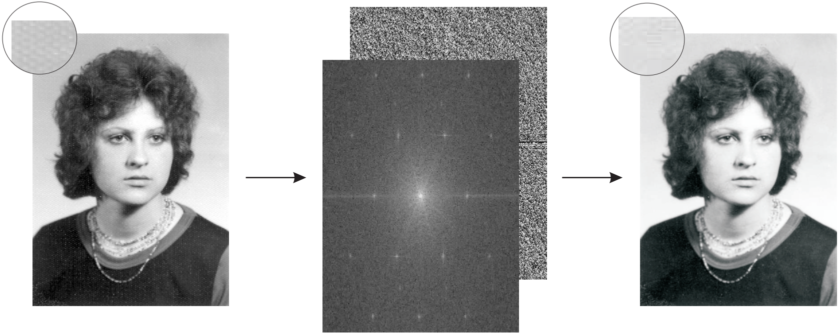
$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

Fenomen Gibbsa



Nieusuwalne wady trygonometrycznego przybliżenia nieciągłości — stały błąd na poziomie 9% wielkości skoku

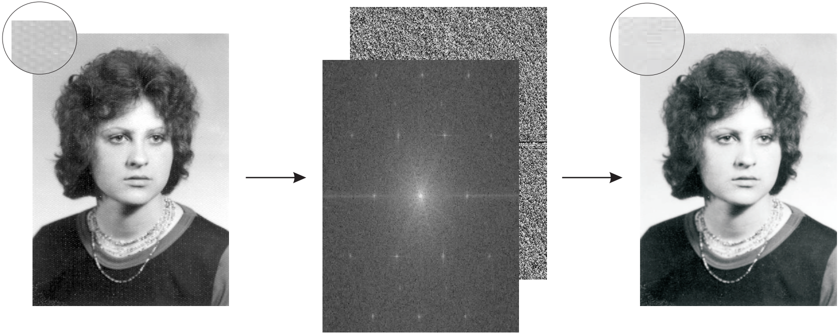
Zjawisko Gibbsa



Efekt Gibbsa widoczny jest głównie w okolicach krawędzi obrazu.

Metody przeciwdziałania:

Zjawisko Gibbsa

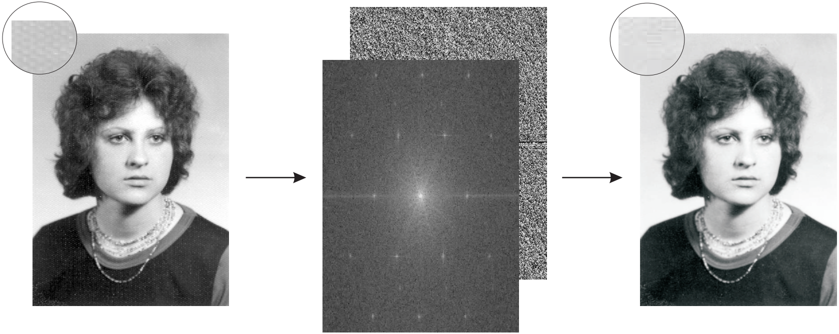


Efekt Gibbsa widoczny jest głównie w okolicach krawędzi obrazu.

Metody przeciwdziałania:

- "wtapianie" roboczej wersji w większą kopię obrazu

Zjawisko Gibbsa



Efekt Gibbsa widoczny jest głównie w okolicach krawędzi obrazu.

Metody przeciwdziałania:

- "wtapianie" roboczej wersji w większą kopię obrazu
- domykanie "cykliczne"

Struktura transformaty Fouriera 1

- $$\hat{X}(0,0) \;=\; \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(m,n)e^{0} \;=\; E(X)$$

zatem $R(0,0) = E(X)$, $\Phi(0,0) = 0$.

Struktura transformaty Fouriera 1

- $$\hat{X}(0,0) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(m,n)e^0 = E(X)$$

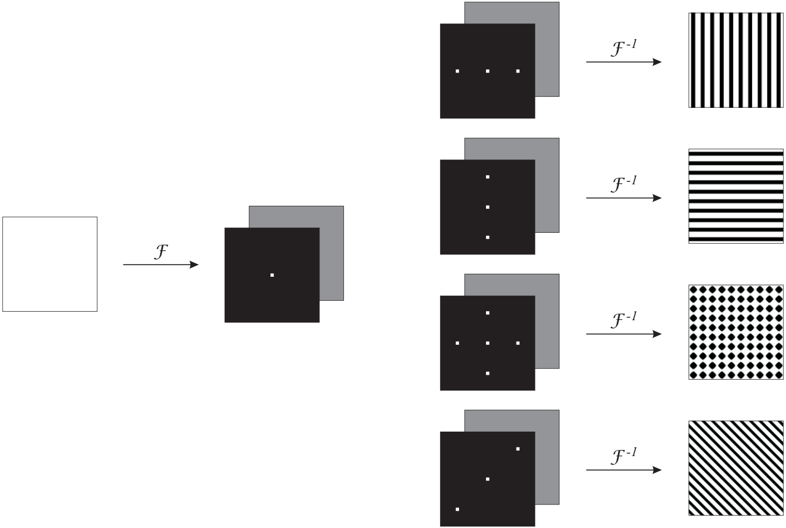
  zatem $R(0,0) = E(X)$, $\Phi(0,0) = 0$.

- Biały obraz $X(m,n) = 255$,

  $$\hat{X}(k,l) = \frac{255}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i(mk/M + nl/N)} = \begin{cases} 255 & k = l = 0 \\ 0 & k,l \neq 0 \end{cases}$$

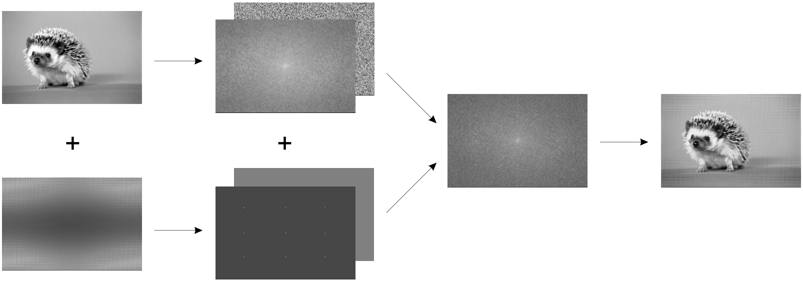
  zatem $R(0,0) = 255$, $R(k,l) = 0$ dla pozostałych k,l.

Struktura transformaty Fouriera 2



Liniowość transformaty Fouriera

$$\alpha X(m,n) + \beta Y(m,n) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \alpha \hat{X}(k,l) + \beta \hat{Y}(k,l)$$



Twierdzenie o splocie

- Splot obrazów X i Y:

$$(X * Y)(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} X(i,j) Y(k-i, l-j)$$

Twierdzenie o splocie

- Splot obrazów X i Y:

$$(X * Y)(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} X(i,j) Y(k-i, l-j)$$

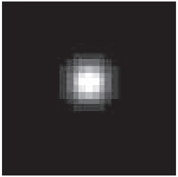
- **Twierdzenie o splocie:** $X * Y \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X} \cdot \hat{Y}$

  Także $X \cdot Y \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{X} * \hat{Y}$

Twierdzenie o splocie 2

GIMP — zniekształcenie macierzowe: współczynniki macierzy traktujemy jako jasności pikselków obrazu M biorącego udział w konwolucji. Dla Gaussowskiego rozmycia obrazem macierzy konwolucji może być np.

$$\frac{1}{N}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 8 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

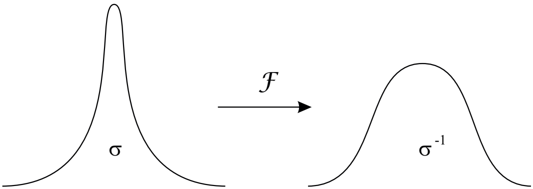


Graficzną reprezentację macierzy filtra można uzyskać działając nią na obraz z pojedynczym białym pikselem w centrum

$$M * \delta_0 \;=\; M$$

Transformata Fouriera funkcji Gaussa

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2(1/\sigma)^2}}$$



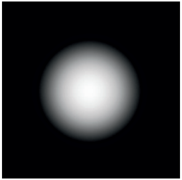
Zniekształcenie konwolucyjne obrazu

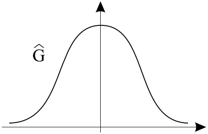
Przykład – rozmycie Gaussowskie obrazu

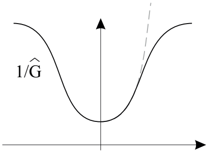
$$Y = X * G \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{X} \cdot \hat{G} = \hat{Y}$$

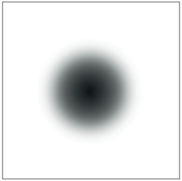
Zatem

$$\hat{X} = \hat{Y} \cdot \frac{1}{\hat{G}} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad X$$









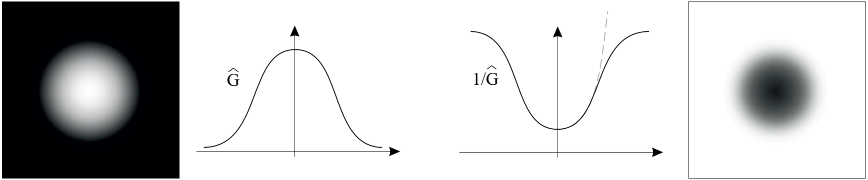
Zniekształcenie konwolucyjne obrazu 2

Przykład – rozmycie Gaussowskie obrazu

$$Y \;=\; X * G \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad \hat{X} \cdot \hat{G} \;=\; \hat{Y}$$

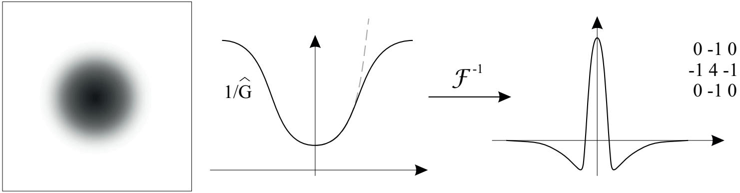
Zatem

$$\hat{X} \;=\; \hat{Y} \cdot \frac{1}{\hat{G}} \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \qquad X$$

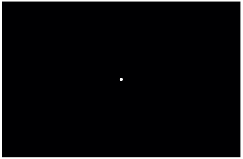


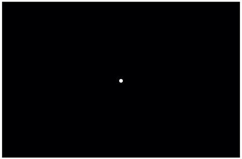
Dekonwolucja – dzielenie w dziedzinie częstotliwości przez transformatę filtra

Zniekształcenie konwolucyjne obrazu 3



Odpowiedź impulsowa





Odpowiedź impulsowa 2

Jeśli znamy odpowiedź impulsową dla systematycznego zakłócenia, potrafimy (teoretycznie) obliczyć transformację dekonwolucyjną

$$M * \delta \;=\; M \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{M}$$

Zakłócony obraz

$$X * M \;=\; Y \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{Y} \;=\; \hat{X} \cdot \hat{M}$$

Dzieląc $\hat{Y}$ przez $\hat{M}$ otrzymamy $\hat{X}$, stąd przez odwrotną transformatę niezakłócony obraz X.
Problem: dzielenie przez małe liczby wprowadza numeryczną niestabilność.

Filtracja odwrotna w obecności szumu

Problemem jest także obecność addytywnego szumu

$$Y \;=\; X * M \;+\; H \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{Y} \;=\; \hat{X} \cdot \hat{M} \;+\; \hat{H}$$

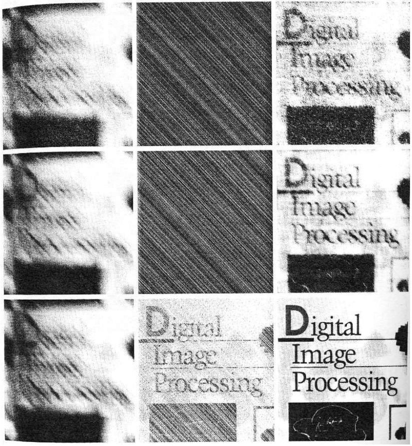
Stąd

$$\hat{X}_H \;=\; \hat{Y} \cdot \frac{1}{\hat{M}} \;=\; \hat{X} + \hat{H} \cdot \frac{1}{\hat{M}}$$

Złe własności numeryczne $\hat{M}$ mogą w ten sposób wzmacniać działanie szumu. By ograniczyć mianownik $\hat{M}$ od dołu, stosuje się zmodyfikowany filtr Wienera (minimalizacja średniokwadratowego błędu)

$$\frac{1}{\hat{M}} \quad \longrightarrow \quad \frac{\hat{M}^*}{|\hat{M}|^2 + K}, \qquad K > 0$$

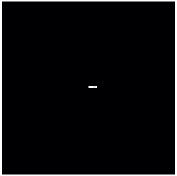
Filtracja Wienera



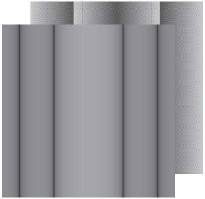
Obraz poruszony zakłócony szumem o różnym natężeniu (kolumna 1), filtracja odwrotna (koumna 2), filtracja Wienera (kolumna 3).

R.C. Goznalez, R.E. Woods, Digital Image Processing, Prentice Hall, 2002

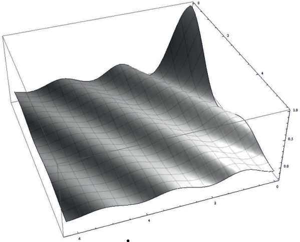
Dekonwolucja poruszonych obrazów



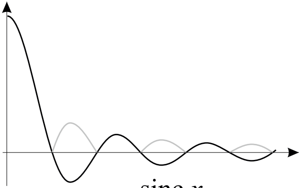
$M*\delta$



$\hat{M}$



sinc $x+y$



sinc x

Pakiet Focus Magic