

Fizyka w Szkole

CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI

332 (LIX) indeks 35810X

CENA 22,50 zł (w tym 5% VAT)

Rok 2014 Rokiem Krystalografii

Refleksja
i praktyczne porady

Historia jednego wynalazku
Kuchenka
mikrofalowa



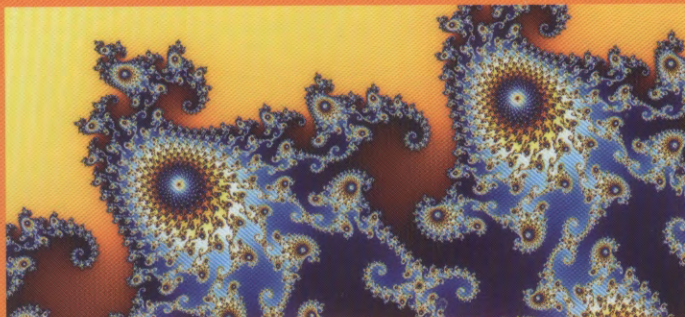
Problemy dydaktyki

Czy fizyką można
zaciekać każdego?

O nauczaniu przedmiotów ścisłych

Doświadczenia pouczające
i niebanalne

O żyroskopach...



Świat po przejściach
Fraktale i ekonomia



Przyszli
polscy
astronauci
i konstruktorzy

82070301405003

Fizyka w Szkole

3/14

15



Cena 22,50 zł Vat 5%

Harmonia wokół nas, czyli o rezonansie w gitarze i Kosmosie¹

Nauka zawsze łączyła się z muzyką. Pitagoras twierdził, że harmoniczne interwały w muzyce można przedstawić za pomocą prostych stosunków liczbowych. W 1619 roku Kepler opublikował dzieło *Harmonices mundi (Harmonia światów)*, w którym usiłował wyjaśnić proporcje w świecie (w szczególności w astronomicznych obiektach) w kategoriach muzycznych, odwołując się do koncepcji muzyki sfer Pitagorasa. Dziś odnajdujemy w Kosmosie wiele przykładów rezonansu objawiającego się np. w ruchach planet i drobnych ciał Układu Słonecznego.

Krzysztof Rochowicz

Pitagoras wyróżniał w swej filozofii trzy rodzaje muzyki. Pierwsza z nich to zwykła muzyka słyszalna, grana na lirze bądź flecie. To znana nam muzyka lub inaczej dźwięk. Następny rodzaj to niesłyszalna, lecz nieustanna muzyka wytwarzana przez każdego człowieka. Wyraża ona harmonię lub dysharmonię między ciałem a duszą. Trzecim rodzajem muzyki jest muzyka świata pochodząca z samego Kosmosu. Pitagorejczycy nazwali ją muzyką sfer. Według nich są to najpiękniejsze tony, wydają je ciała niebieskie podczas poruszania się ruchem najdoskonalszym zgodnie z liczbą i harmonią. Ten dźwięk nie jest słyszalny, ponieważ jesteśmy do niego przyzwyczajeni od urodzenia albo nasze uszy nie są przystosowane do jego odbioru.

Najważniejszym odkryciem Pitagorasa w dziedzinie muzyki jest rozpisanie stosunków arytmetycznych między współbrzmieniami harmonicznymi. Podobno kiedyś Pitagoras przechodził obok warsztatu kowalskiego, w którym usłyszał młoty kujące żelazo. W tych dźwiękach rozpoznał współbrzmienie oktawy, kwinty i kwarty. Rozpisał dźwięki, które są harmoniczne w stosunku do siebie. Takimi dźwiękami są *c* i *g*, które zagrane razem brzmią harmo-

nijnie. Muzycy często wykorzystują to współbrzmienie w ulubionych utworach słuchaczy. Wstawiając dodatkowo dźwięk *e*, otrzymujemy akord C-dur. Oktawa, łącząc oba dźwięki *c*, tworzy idealne współbrzmienie. Odtąd muzyka przestała być dziełem przypadku, a pojęcie proporcji jeszcze bardziej utrwaliło się w historii myśli ludzkiej. To odkrycie Pitagorasa było zalążkiem teorii muzyki. Człowiek mógł wyjaśnić uniwersalne prawdy przez systematyczne badania i przy użyciu symboli typu matematycznego. Jego odkrycie miało wpływ na dalsze badania nad światem.

Pitagorasowi przypisuje się wynalezienie około połowy VI wieku p.n.e. monochordu, czyli instru-

mentu muzycznego i jednocześnie przyrządu mierniczego służącego do określania stosunków długości struny do wysokości dźwięku. Zbudowany był z pudła rezonansowego wyposażonego w jedną strunę na przesuwalnym podstawku (błoczk), pozwalającym na zmianę dźwięków. Jako przyrządu (występował również pod nazwą *kanon*) używano go w ten sposób, że za pomocą podstawka dzielono strunę na odcinki o różnej długości i następnie w sposób geometryczny mierzono, a potem oznaczano wysokość odpowiednich dźwięków. Badania takie przeprowadzał m.in. Euklides w IV wieku p.n.e., który ich wyniki zawarł w traktacie *Podział monochordu*.

Tabela 1. Oktawy w muzyce

Nazwa oktawy	Częstotliwość dźwięku C oktawy w Hz	Oznaczenia dźwięków
Subkontra	16,351598	C ₂ D ₂ E ₂ F ₂ G ₂ A ₂ H ₂ lub <u>CDEFGAH</u>
Kontra	32,703196	C ₁ D ₁ E ₁ F ₁ G ₁ A ₁ H ₁ lub C D E F G A H
Wielka	65,406391	C D E F G A H
Mała	130,812783	c d e f g a h
Razkreślna	261,625565	c ¹ d ¹ e ¹ f ¹ g ¹ a ¹ h ¹
Dwukreślna	523,251132	c ² d ² e ² f ² g ² a ² h ²
Trzykreślna	1046,502261	c ³ d ³ e ³ f ³ g ³ a ³ h ³
Czterokreślna	2093,004249	c ⁴ d ⁴ e ⁴ f ⁴ g ⁴ a ⁴ h ⁴
Pięciokreślna	4186,009042	c ⁵ d ⁵ e ⁵ f ⁵ g ⁵ a ⁵ h ⁵
Sześciokreślna	8372,018085	c ⁶ d ⁶ e ⁶ f ⁶ g ⁶ a ⁶ h ⁶

Źródło: <http://pl.wikipedia.org>

¹ Inspiracją do napisania artykułu był plakat *Harmonia Kosmosu* – koncepcja: dr H. Nowakowska, współpraca: prof. dr hab. G. Karwasz, http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Pliki/Kwarki_plakaty/harmonia.pdf [dostęp: 14.04.2014].

Monochord dobrze ilustruje matematyczne własności skali dźwięków. W tradycyjnej muzyce europejskiej skalę tworzy osiem dźwięków, z których najwyższy jest powtórzeniem najniższego w interwale oktawy. Zakres dźwięków tradycyjnie używanych w muzyce podzielony jest na 10 oktaw. Podstawowym dźwiękiem każdej oktawy jest dźwięk C. Częstotliwości kolejnych dźwięków C są elementami ciągu geometrycznego o ilorazie 2, przy czym najniższemu C odpowiada w przybliżeniu dźwięk o częstotliwości 16 Hz (cykli na sekundę). Oktawy w muzyce przedstawiono w tabeli 1.

W instrumentach muzycznych i innych źródłach dźwięku o określonej wysokości przyczyną powstawania fali akustycznej są drgania struny, pręta, membrany lub słupa powietrza. Drgania te mają charakter fali stojącej, ponieważ budowa instrumentu wymusza powstawanie węzłów i strzałek na granicach drgającego ośrodka.

O wysokości tonu podstawowego generowanego przez strunę (monochord) decyduje naprężenie struny i jej długość. Ponieważ struna jest umocowana na końcach, powstają tam węzły fali stojącej. Fala poprzeczna o największej długości, jaka może powstać na strunie, ma długość dwukrotnie większą od długości struny. Częstotliwość drgań takiej fali równa jest częstotliwości emitowanego dźwięku, czyli częstotliwości tonu podstawowego. Częstotliwość tę można obliczyć, wychodząc ze wzoru:

$$f_0 = \frac{v}{\lambda},$$

gdzie:

v – prędkość fali poprzecznej na strunie;

λ – długość tej fali.

Prędkość v zależy z kolei od siły napinającej strunę oraz od grubości i gęstości materiału struny:

$$v = \sqrt{\frac{N}{\tau}},$$

gdzie:

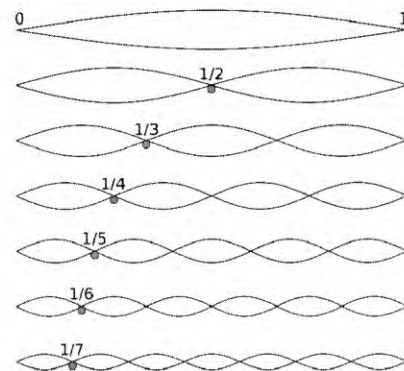
N – siła naciągu struny;

τ – gęstość liniowa struny.

Biorąc pod uwagę, że $\lambda = 2L$, gdzie L jest długością struny, ponieważ przy wytwarzaniu tonu podstawowego na strunie mieści się pół długości fali, można zapisać:

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{N}{\tau}}.$$

W większości instrumentów kolejne składowe tworzą szereg tonów będących naturalnymi wielokrotnościami składowej podstawowej. Ze względu na relacje między częstotliwościami kolejnych tonów składowych interwały między nimi stają się coraz mniejsze (rys. 1).



Rys. 1. Fale stojące na drgającej strunie – ton podstawowy i tony składowe

Źródło: Wikimedia Commons

Biorąc za przykład dźwięk C 32 Hz, można utworzyć następujący szereg harmoniczny (podajemy składowe do siódmej włącznie):

- druga składowa harmoniczna (64 Hz) odpowiada dźwiękowi C odległemu o oktawę od głównej harmonicznej;
- trzecia składowa harmoniczna (96 Hz) odpowiada dźwiękowi G odległemu o kwintę czystą od drugiej składowej harmonicznej;
- czwarta składowa harmoniczna (128 Hz) odpowiada dźwiękowi c odległemu o kwartę czystą od trzeciej składowej harmonicznej i o dwie oktawy od głównej składowej;
- piąta składowa harmoniczna (160 Hz) odpowiada dźwiękowi e odległemu o tercję wielką od czwartej składowej harmonicznej;
- szósta składowa harmoniczna (192 Hz) odpowiada dźwiękowi g odległemu o tercję małą od piątej składowej harmonicznej;
- siódma składowa harmoniczna (224 Hz) nie odpowiada żadnemu dźwiękowi w stroju równomiernie temperowanym, lecz jest najbliższa b.

Zapis nutowy przedstawia rys. 2.

Podsumowaniem tej części naszych rozważań jest diagram (rys. 3), który ilustruje możliwość uzyskania harmonicznych określonego tonu podstawowego na instrumencie strunowym.

Jeśli diagram na rys. 3 niektórych z Czytelników wydaje się nieco zagmatwany i mało przejrzysty, proponuję podsumowanie w znacznie prostszej formie (rys. 4).

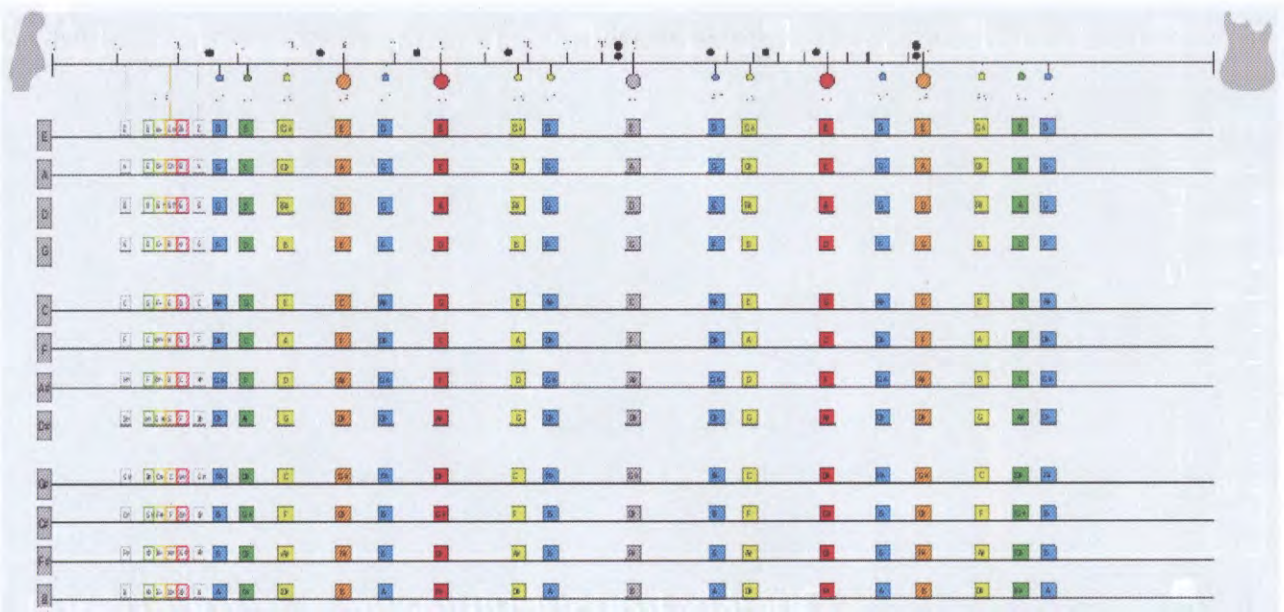
Wróćmy teraz do historii rozwoju poglądów na otaczający nas świat.

Zgodnie z ideą jedności źródeł muzyki i nauki wywodząca się od Pitagorasa muzyką i całym



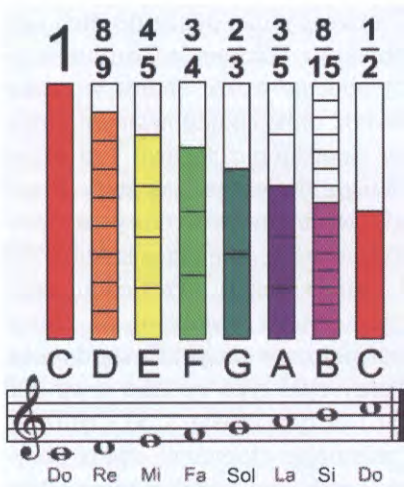
Rys. 2. Przykładowy zapis nutowy szeregu harmonicznego od dźwięku c (131 Hz)

Źródło: Wikimedia Commons



Rys. 3. Diagram ilustrujący możliwość uzyskania harmonicznych określonego tonu podstawowego na instrumencie strunowym. Poziome linie w kolorze czarnym oznaczają struny nastrojone na ton podstawowy o wysokości określonej oznaczeniem z lewej strony rysunku. Kolorowe kwadraty rozmieszczone wzdłuż struny oznaczają możliwość otrzymania kolejnych składowych harmonicznych (flażoletów), jeśli stłumimy drgania struny, przykładając palec w miejscu wskazanym przez kolorowy kwadrat; wysokość otrzymanego w ten sposób dźwięku (flażoletu) jest podana w każdym z kwadratów. Ułamki nad diagramami strun oznaczają pozycję kwadratu względem długości struny. Na przykład blokując drgania struny E (u góry diagramu) w punkcie oznaczonym ułamkiem $1/2$ (szary kwadrat), otrzymamy dźwięk E o oktawę wyższy od tonu podstawowego

Źródło: Wikimedia Commons



Rys. 4. Drgająca struna a wysokość dźwięku, czyli muzyka w ułamkach. Wysokość kolorowego słupka (w praktyce: długość struny) odpowiada kolejnym dźwiękom gamy C-dur

Źródło: Wikimedia Commons

Wszechświatem rządzą te same prawa harmonii dające się zapisać przy użyciu związków liczbowych. Skoro tak, to ruch planet opisany za pomocą praw harmonii musi generować muzykę pełną harmonii. I tak oto narodziła się legenda – idea muzyki sfer.

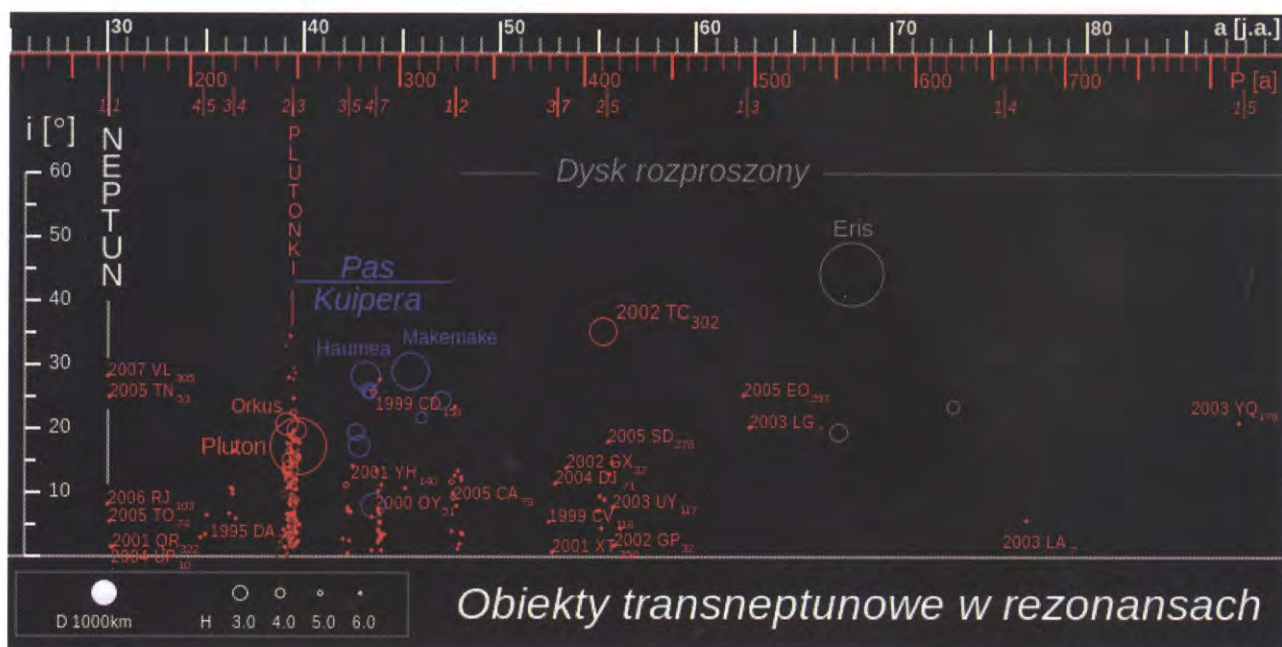
Postacią, która najbardziej wchłonęła idee harmonii sfer, był Johannes Kepler, który odkrył prawa ruchu planet, nie tylko opierając

się na obserwacjach ich ruchu, lecz także – jak sam pisał w swoich dziełach – w oparciu o założenia nauki Pitagorasa. „Ruchy ciał niebieskich – pisał Kepler – są niczym innym jak pewną wieczystą polifonią, która dociera do nas nie przez słuch, lecz przez rozum”. Idea muzyki sfer była mu tak bliska, że opracował nawet zapis nutowy muzyki, którą ruch planet powinien tworzyć. Keplerowska muzyka planet brzmi czysto dla każdej planety z osobna. Są jednak pewne problemy z polifonią, ponieważ w wyniku wzajemnego oddziaływania na siebie poszczególnych ruchów pojawiają się zaburzenia oczekiwanego ruchu planet. Doskonały kosmiczny instrument zaczyna „fałszować”...

Choć dziś patrzymy już na ideę muzyki sfer z zupełnie innym nastawieniem (bo przecież nawet samym pojęciem sfer od dawna w nauce się nie posługujemy), współczesna astronomia dostarcza nam wielu przykładów rezonansu – zjawiska po raz pierwszy opisanego przez Galileusza jako wniosek z jego badań wahadeł sprzężonych oraz strun instrumentów muzycznych w 1602 roku.

Przypomnijmy tu przede wszystkim o tzw. rezonansie orbitalnym w mechanice nieba. To zjawisko związane z obiegiem dwóch ciał niebieskich (np. planet) wokół masywnego obiektu (np. gwiazdy), przy czym obydwa ciała obiegające masywny obiekt pozostają ze sobą w pewnym związku grawitacyjnym, tak że na określoną liczbę okrążeń jednego wypada jakaś wielokrotność okrążeń drugiego. Należy dodać, że jedno z tych krążących ciał ma znacznie większą masę od drugiego i to jego oddziaływanie właśnie ma decydujący wpływ na powstanie rezonansu orbitalnego.

Typowymi przykładami rezonansu orbitalnego w Układzie Słonecznym są ruchy orbitalne wielu obiektów transneptunowych, które uzależnione są od oddziaływania grawitacyjnego masywnego Neptuna. Rezonansami najczęściej spotykanymi wśród tych planetoid z Pasa Kuipera są 1 : 2 (obiekty te nazywane są twotinami – na jeden obieg twotino wokół Słońca przypadają dwa obiegi Neptuna) oraz 2 : 3 (ciała te zwane są przez astronomów plutonkami – na dwa obiegi dookoła Słońca jakiegoś plutonka



Rys. 5. Kąt nachylenia orbity w funkcji kąta dla obiektów transneptunowych

Źródło: Wikimedia Commons

przypadają trzy obiegi Neptuna). Istnieją także inne obiekty pozostające w rezonansie orbitalnym z Neptunem. Ich ruchy orbitalne są ściśle związane z ruchem orbitalnym ósmej planety, która wymusza na nich synchronizację w ruchu obiegowym, doprowadzając do powstania stałej zależności w ruchu obiegowym między tymi ciałami. Wyróżnia się wiele rezonansów spowodowanych oddziaływaniem Neptuna. Do najważniejszych zalicza się: rezonans 1 : 1 – planetoidy trojańskie Neptuna, wspomniane już 1 : 2 (twotina) i 2 : 3 (plutonki) oraz dodatkowo 2 : 5, 3 : 5, 4 : 5, 3 : 4 i 4 : 7 (patrz rys. 5).

Innymi przykładami rezonansu orbitalnego są uzależnione od siebie ruchy księżyców Jowisza (Io jest w rezonansie z Europą 1 : 2, podobnie Europa z Ganymedem, a Ganymedes z Kallisto w stosunku 3 : 7) lub Saturna, ale też ruch planetoidy 3753 Cruithne, która jest w rezonansie z Ziemią. Z kolei najwyraźniejszą współokresowość planetarna to rezonans Jowisza z Saturnem (2 : 5).

Bardzo ciekawą ilustracją zjawiska rezonansu są przerwy w występowaniu planetoid pasa głównego (czyli położonych między orbitami Marsa i Jowisza), tzw. Przerwy

Kirkwooda. Główną przyczyną ich powstawania jest przyciąganie Jowisza, które wyrzuca z orbit planetoidy będące w ruchu synchronicznym z tą planetą. Przerwy te jako pierwszy zaobserwował Daniel Kirkwood w roku 1857, który także poprawnie wyjaśnił ich związek z rezonansem orbitalnym planetoid i Jowisza. Najwyraźniejsze wyrażone przerwy (zob. rys. 6):

- 2,06 j.a. (rezonans 4 : 1);
- 2,5 j.a. (rezonans 3 : 1), rodzina planetoidy Alinda;
- 2,82 j.a. (rezonans 5 : 2);
- 2,95 j.a. (rezonans 7 : 3);
- 3,27 j.a. (rezonans 2 : 1), rodzina planetoidy Griqua.

Wspomniana już planetoida 3753 Cruithne krąży wokół Słońca w rezonansie 1 : 1 z Ziemią. Ze względu na powiązanie grawitacyjne niektórzy uważają ją za drugi księżyc Ziemi, ale nie jest to określenie precyzyjne, gdyż 3753 Cruithne nie obiega naszej planety, lecz porusza się po skomplikowanej orbicie wokół Słońca. Mimośród planetoidy sprawia, że w swoim ruchu orbitalnym 3753 Cruithne w peryhelium przecina orbitę Wenus, a w aphelium orbitę Marsa. Warto obejrzeć animację obiegu Słońca przez Ziemię i tę planetoidę

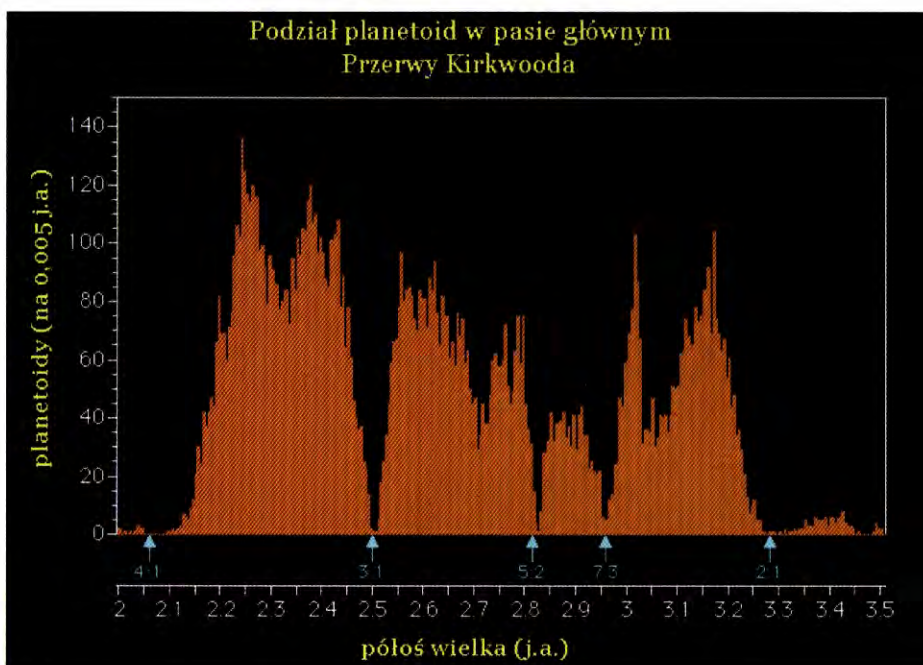
na stronie Wikipedii (http://en.wikipedia.org/wiki/3753_Cruithne). Pierwszy panel pokazuje ruch obu obiektów. Planetoida Cruithne krąży obecnie wokół Słońca w czasie 364,02 dnia, co odpowiada niemalże ziemskiemu rokowi. Ten okres obiegu nie jest jednak stały. Przez 190 lat jest nieco krótszy od ziemskiego, następnie przez kolejne 190 lat nieco dłuższy, przez co planetoida najpierw oddala się od Ziemi, później znów przybliża się do niej. Pełny cykl tych ruchów trwa 380 lat i w tym czasie 3753 Cruithne, zmieniając stopniowo swoją pozycję względem Ziemi, zatacza jakby podkowę (orbitę względem Ziemi przedstawia drugi panel). Najmniejsza odległość, na jaką może ona się zbliżyć do naszej planety, wynosi około 15 mln km.

Polecamy też ciekawą opowieść o odkryciu i własnościach orbity innej planetoidy, która jest w rezonansie 1 : 1 z Ziemią (http://pl.wikipedia.org/wiki/2002_AA29). Podobną towarzyszkę ma też Wenus – jest to obiekt 2002 VE₆₈.

Znane są od dawna inne przykłady kosmicznych rezonansów. Najprostsze są rezonanse związane z okresem obiegu, np. ruch obiegowy Księżyca (wokół Ziemi) jest w rezo-

nansie 1 : 1 z jego ruchem obrotu wokół osi. Obrót Księżyca wokół jego osi trwa tyle samo co obieg Księżyca wokół Ziemi. To dlatego z Ziemi widzimy zawsze tę samą stronę Księżyca. We wczesnej historii ziemskiego satelity tempo jego rotacji spadło i zostało zatrzymane na obecnym poziomie wskutek procesów związanych ze zjawiskami pływowymi. Tak na marginesie, Księżyc był kiedyś bliżej Ziemi (był zatem większy na niebie), a doba ziemską była o kilka godzin krótsza. Ziemia jednak zwolniła (i nadal zwalnia) z tego samego powodu co Księżyc. Większość księżyców, a nawet planety, które są zbyt blisko swojej gwiazdy, są na tzw. orbicie synchronicznej (lub obrocie synchronicznym) z większym ciałem i są zawsze zwrócone do niego tą samą stroną.

Oddziaływania grawitacyjne i pływowe nie zawsze doprowadzają do rezonansu 1 : 1. Na przykład obrót Merkurego jest w rezonansie 3 : 2 z jego ruchem wokół Słońca (planeta obraca się trzy razy wokół siebie w takim czasie, w jakim dwa razy obiega Słońce). Neptun i Pluton są w rezonansie 3 : 2 (Neptun trzy razy obiega Słońce, a w tym samym czasie Pluton robi to dwa razy). Wiele systemów ma różne częstotliwości rezonansowe. Rezonans występuje, gdy układ łatwo pobiera energię ze źródła, które go pobudza, i może ją przechowywać. Jednakże zazwyczaj w układzie są pewne straty energii zwane tłumieniem. Zależą one od amplitudy drgań układu, dlatego przy stałym wymuszaniu w końcu dochodzi do jakiegoś stanu równowagi.



Rys. 6. Diagram przedstawia ilość planetoid na orbitach o podanej wielkiej półosi
 Źródło: Wikimedia Commons

Gdy orbity są wydłużone i/albo bardzo nachylone, to ważne mogą być także inne czynniki, np. wzajemne perturbacje między planetami mogą obracać orbity, powodować precesję. Prędkość precesji również może być w rezonansie, bo rezonans może występować między prędkością precesji i/lub ruchami średnimi.

Widzimy więc, że pojęcie harmonii świata we współczesnej nauce zupełnie zmieniło swój sens, ale wciąż przypomina nam o wzajemnym wpływie i oddziaływaniu na siebie różnych obiektów. Harmonia Kosmosu, jak zresztą zauważył już sam Kepler, brzmi w naszych **umysłach**, nie w uszach. Składają się na nią ściśle określone stałe kosmologii

i oddziaływań, które utrzymują nasz Wszechświat.

Gdyby jednak Czytelnicy tęsknili za doznaniem muzycznymi inspirowanymi współczesnymi odkryciami, to polecam stronę młodego amerykańskiego astronoma Alexa Parkera: <http://www.astro.uvic.ca/~alexhp/new/home#>, który w dźwięki fortepianu zamienił odkrycie układu sześciu planet okrążających jedną z gwiazd badanych podczas misji Kepler (*Sonata Kepler*), w dźwięki fortepianu i kontrabasu zaś – odkrycia supernowych w ramach programu CFHT Legacy Survey (*Sonata Supernova*). Czyż i ten współczesny Kosmos nie jest pełny harmonii?

dr Krzysztof Rochowicz
 Zakład Dydaktyki Fizyki UMK w Toruniu