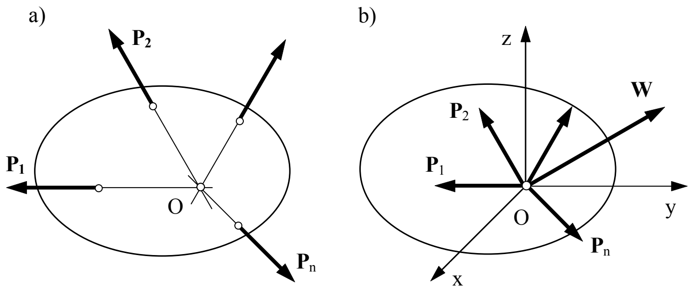
3.4.1. Wypadkowa zbieżnego układu sił

Przestrzenny układ sił

Siłami zbieżnymi nazywamy siły, których linie działania przecinają się w jednym punkcie, nazywanym punktem zbieżności (rys. 3.12a). Ponieważ siły działające na ciało sztywne można przesuwać wzdłuż linii ich działania, można je uważać za siły przyłożone do jednego punktu (rys. 3.12b). W konsekwencji otrzymaliśmy układ sił $\mathbf{P}_k$ (k = 1, 2, 3, . . . , n) przyłożonych w jednym punkcie.



Rys. 3.12. Przestrzenny zbieżny układ sił

W punkcie 3.1.1 powiedzieliśmy, że siły przyłożone w jednym punkcie można zastąpić jedną siłą równoważną, czyli wypadkową. Zatem wypadkowa zbieżnego układu sił jest równa sumie geometrycznej wszystkich sił, a linia jej działania przechodzi przez punkt zbieżności:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k . \tag{3.10}$$

W celu obliczenia współrzędnych wypadkowej w punkcie zbieżności O (rys. 3.12b) wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych x, y, z i wyrazimy wszystkie siły $\mathbf{P}_k$ oraz wypadkową $\mathbf{W}$ za pomocą współrzędnych w tym układzie:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= P_{kx}\,\mathbf{i} + P_{ky}\,\mathbf{j} + P_{kz}\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{W} &= W_x\,\mathbf{i} + W_y\,\mathbf{j} + W_z\,\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Po podstawieniu tych wzorów do zależności (3.10) otrzymamy:

$$W_x\,\mathbf{i} + W_y\,\mathbf{j} + W_z\,\mathbf{k} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}\,\mathbf{i} + \sum_{k=1}^{n} P_{ky}\,\mathbf{j} + \sum_{k=1}^{n} P_{kz}\,\mathbf{k}.$$

Z obustronnego porównania wyrazów przy tych samych wersorach otrzymujemy wzory na współrzędne wypadkowej:

$$W_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}, W_y = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}, W_z = \sum_{k=1}^{n} P_{kz}. \tag{3.11}$$

Powyższe wzory można było napisać bezpośrednio na podstawie twierdzenia, że rzut sumy wektorów na dowolną oś jest równy sumie rzutów wszystkich wektorów na tę oś (twierdzenie Charles'a).

Po wyznaczeniu współrzędnych wypadkowej można wyznaczyć jej wartość liczbową (moduł) oraz kosinusy kierunkowe ze wzorów:

$$\left.\begin{aligned} & W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}, \\ & \cos\alpha = \frac{W_x}{W}, \cos\beta = \frac{W_y}{W}, \quad \cos\gamma = \frac{W_z}{W}, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

gdzie α, β i γ są kątami, które wypadkowa **W** tworzy odpowiednio z osiami x, y i z.

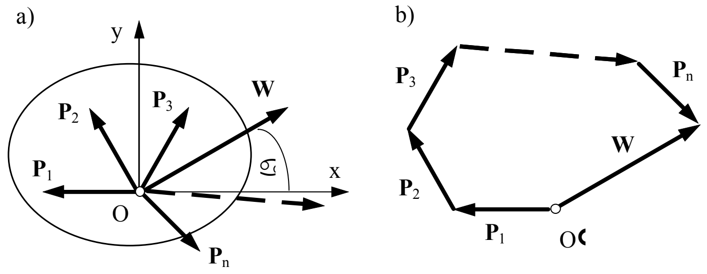
Płaski układ sił

Płaskim układem sił zbieżnych będziemy nazywać układ sił $\mathbf{P}_k$ (k = 1, 2, . . . , n), których linie działania leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie.

Podobnie jak w przypadku przestrzennego układu sił zbieżnych, siły te można przesunąć do punktu zbieżności i traktować jak siły przyłożone do jednego punktu (rys. 3.13a). Wypadkowa **W** płaskiego układu sił zbieżnych będzie leżeć w płaszczyźnie działania sił i będzie przechodzić przez punkt zbieżności. Będzie ona równa sumie geometrycznej sił składowych:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k. \tag{3.13}$$

Wypadkową płaskiego układu sił zbieżnych można wyznaczyć sposobem geometrycznym i analitycznym.



Rys. 3.13. Wyznaczanie wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił za pomocą wieloboku sił

Sposób geometryczny polega na zbudowaniu wieloboku sił, w którym z dowolnego punktu O' (rys. 3.13b) odkładamy równolegle siłę $\mathbf{P}_1$, a z jej końca równolegle siłę $\mathbf{P}_2$, a następnie kolejne siły aż do $\mathbf{P}_n$. Wektor **W** łączący początek siły $\mathbf{P}_1$ i koniec siły $\mathbf{P}_n$ jest sumą geometryczną sił składowych. Otrzymany wektor **W** przyłożony w punkcie O (rys. 3.13a) jest wypadkową układu sił zbieżnych.

Dla analitycznego obliczenia wypadkowej przyjmiemy w punkcie zbieżności O (rys. 3.13a) układ współrzędnych o osiach x i y leżących w płaszczyźnie sił. Wtedy współrzędne P_{kz} wszystkich sił $\mathbf{P}_k$ będą tożsamościowo równe zeru: $P_{kz} \equiv 0$. W tej sytuacji wzory na współrzędne wypadkowej płaskiego układu sił zbieżnych otrzymamy ze wzorów (3.11) po podstawieniu do nich $P_{kz} = 0$:

$$W_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}, \quad W_y = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}. \tag{3.14}$$

Z kolei moduł wypadkowej oraz kąt α, który ona tworzy z osią x, obliczymy ze wzorów:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{W_y}{W_x}. \tag{3.15}$$

3.4.2. Warunki równowagi zbieżnego układu sił

Przestrzenny układ sił

Gdy wypadkowa **W** przestrzennego układu sił zbieżnych jest równa zeru, układ sił będzie w równowadze. Prowadzi to do wektorowego warunku równowagi w postaci:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k = 0. \tag{3.16}$$

Aby przestrzenny układ sił zbieżnych był w równowadze, warunkiem koniecznym jest, by suma wektorowa tego układu sił była równa zeru.

Wypadkowa **W** omawianego układu sił będzie równa zeru, jeżeli jej współrzędne w przyjętym układzie współrzędnych będą równe zeru. Stąd na podstawie wzorów (3.11) można napisać trzy skalarne równania równowagi:

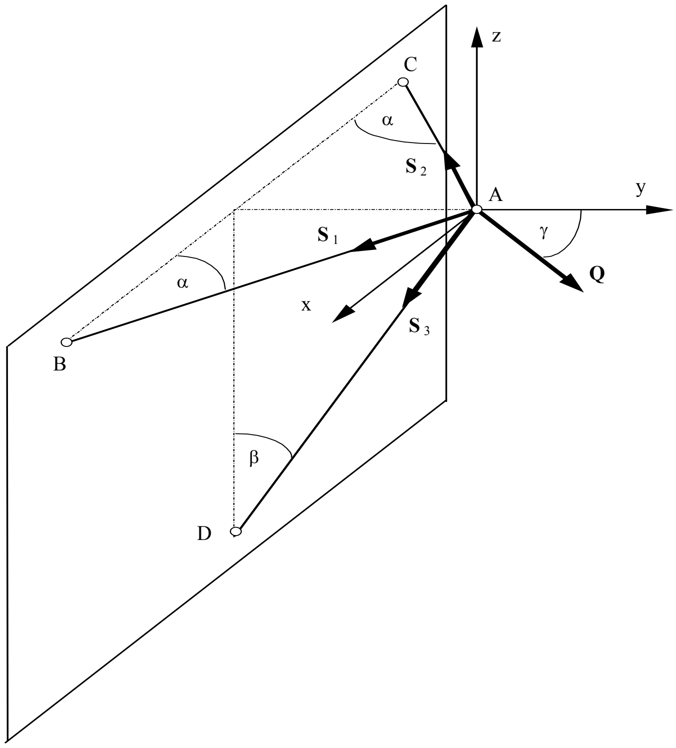
$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0. \tag{3.17}$$

Powyższe warunki równowagi można wypowiedzieć słownie.

Aby przestrzenny układ sił zbieżnych był w równowadze, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by suma rzutów tych sił na każdą oś układu współrzędnych była równa zeru.

Z równań równowagi (3.17) wynika, że w przypadku zbieżnego przestrzennego układu sił możemy wyznaczyć trzy niewiadome, ponieważ dysponujemy trzema równaniami.

Przykład 3.1. Wspornik składa się z trzech nieważkich prętów AB, AC i AD połączonych przegubowo w węźle A, jak na rys. 3.14. Końce B, C i D tych prętów są połączone również za pomocą przegubów do pionowej ściany. Pręty AB i AC leżą w płaszczyźnie prostopadłej do pionowej ściany i tworzą z nią kąty $\alpha = 60^{\circ}$. Pręt AD tworzy z tą ścianą kąt $\beta = 30^{\circ}$ i również leży w płaszczyźnie prostopadłej do tej ściany. Obliczyć siły w prętach, jeżeli do węzła A jest przyłożona siła **Q**, leżąca w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do ściany i odchylona od poziomu o kąt $\gamma = 45^{\circ}$. Tarcie w przegubach pominąć.



Rys. 3.14. Wyznaczenie sił w prętach zbiegających się w węźle A

Rozwiązanie. Oddziaływanie prętów AB, AC i AD na węzeł A zastąpimy odpowiednio siłami $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ i $\mathbf{S}_3$. Zatem węzeł ten jest w równowadze pod działaniem czterech sił zbieżnych: $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ i $\mathbf{Q}$. Po wprowadzeniu w punkcie A prostokątnego układu współrzędnych x, y, z i wykorzystaniu równań równowagi (3.17) otrzymamy układ trzech równań z trzema niewiadomymi.

$$\sum_{k=1}^{4} P_{kx} = S_1\cos\alpha - S_2\cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} P_{ky} = Q\cos\gamma - S_1\sin\alpha - S_2\sin\alpha - S_3\sin\beta = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4} P_{kz} = -Q\sin\gamma - S_3\cos\gamma = 0.$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymamy:

$$S_1 = S_2 = Q\frac{\cos\gamma}{2\sin\alpha}\left(\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma + 1\right) = Q\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+3\right)}{18},$$

$$S_3 = -Q\frac{\sin\gamma}{\cos\beta} = -Q\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Znak minus przy sile S_3 oznacza, że w rzeczywistości zwrot tej siły jest przeciwny do przyjętego na rysunku. Pręty AB i AC są rozciągane, a pręt AD ściskany.

Płaski układ sił

Podobnie jak w przypadku przestrzennego zbieżnego układu sił, płaski układ sił zbieżnych będzie w równowadze, gdy jego wypadkowa **W** będzie równa zeru. Zatem wektorowy warunek równowagi będzie miał formalnie postać identyczną z równaniem (3.16):

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k = 0.$$

Powyższemu warunkowi na podstawie wzorów (3.14) będą odpowiadały równoważne dwa równania równowagi:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0. \tag{3.18}$$

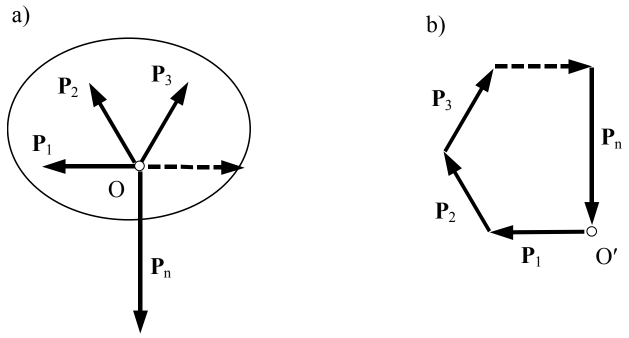
Aby płaski układ sił zbieżnych był w równowadze, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by sumy rzutów tych sił na dwie osie układu współrzędnych były równe zeru.

Zatem przy rozwiązywaniu zagadnień dotyczących sił zbieżnych leżących w jednej płaszczyźnie dysponujemy dwoma równaniami i tyle niewiadomych możemy wyznaczyć.

Z rysunku 3.13b widzimy, że gdy wypadkowa jest równa zeru, to koniec siły $\mathbf{P}_n$ znajduje się w początku siły $\mathbf{P}_1$, czyli wielobok sił jest zamknięty.

Na rysunku 3.15a przedstawiono płaski układ n sił przyłożonych do punktu O pewnego ciała. Siły te są w równowadze, ponieważ tworzą wielobok zamknięty pokazany na rys. 3.15b. Powyższe rozważania pozwalają na sformułowanie wykreślnego (geometrycznego) warunku równowagi.

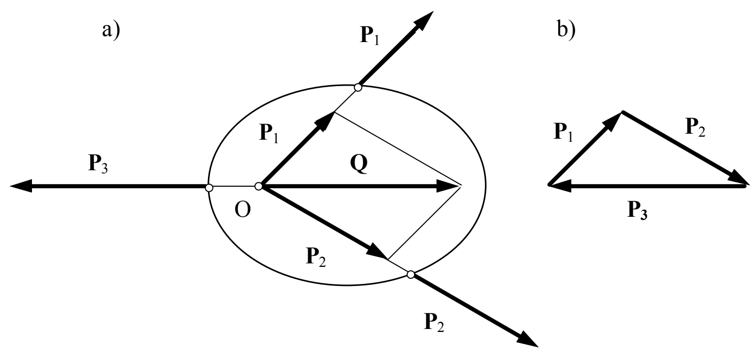
Aby płaski układ sił zbieżnych był w równowadze, zbudowany z nich wielobok sił musi być wielobokiem zamkniętym.



Rys. 3.15. Równowaga płaskiego zbieżnego układu sił

3.4.3. Twierdzenie o trzech siłach

W wielu przypadkach ciało sztywne jest w równowadze pod działaniem trzech nierównoległych sił leżących w jednej płaszczyźnie. Wtedy w rozwiązywaniu zagadnień praktycznych jest pomocne tzw. *twierdzenie o trzech siłach*.



Rys. 3.16. Ilustracja twierdzenia o trzech siłach

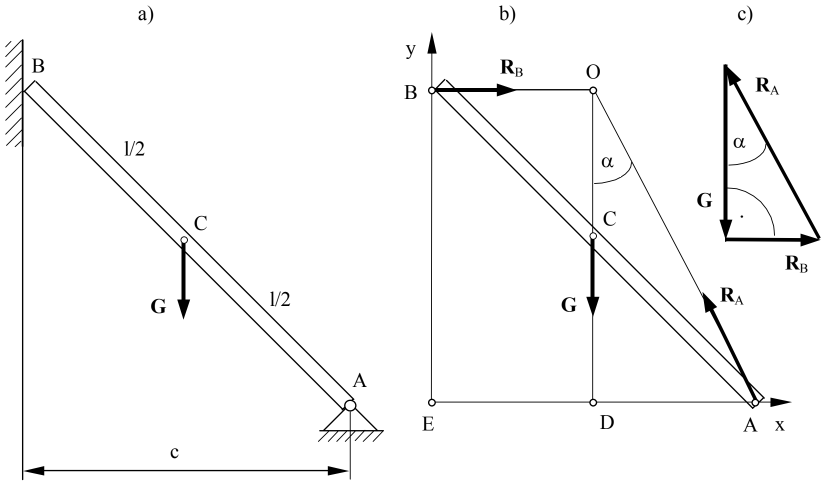
Jeżeli ciało sztywne jest w równowadze pod działaniem trzech nierównoległych sił leżących w jednej płaszczyźnie, to linie działania tych sił muszą przecinać się w jednym punkcie, a siły tworzyć trójkąt zamknięty.

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia założymy, że do ciała sztywnego znajdującego się w równowadze są przyłożone trzy nierównoległe siły $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{P}_3$, których linie działania leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 3.16a). Linie działania sił $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ przecinają się w punkcie O. Po przesunięciu tych sił do punktu przecięcia możemy je zastąpić wypadkową:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 .$$

W tej sytuacji ciało jest w równowadze pod działaniem dwóch sił: $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{P}_3$. Zatem siły $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{P}_3$ muszą się równoważyć, czyli muszą być równe co do wartości liczbowych, mieć przeciwne zwroty i muszą działać wzdłuż jednej prostej. Wynika z tego, że linia działania siły $\mathbf{P}_3$ musi przechodzić także przez punkt przecięcia sił $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$. Ponadto wielobok sił zbudowany z sił $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{P}_3$ musi być trójkątem zamkniętym (rys. 3.16b).

Przykład 3.2. Jednorodny pręt AB o ciężarze $\mathbf{G}$ i długości l jest oparty końcem B o gładką pionową ścianę, a koniec A tego pręta jest zamocowany w stałej podporze przegubowej (rys. 3.17a). Wyznaczyć reakcję ściany oraz reakcję podpory przegubowej, jeżeli odległość podpory od ściany wynosi c.



Rys. 3.17. Układ sił działających na pręt

Rozwiązanie. Pręt AB jest w równowadze pod działaniem trzech sił: ciężkości **G** przyłożonej w środku ciężkości C oraz reakcji ściany $\mathbf{R}_B$ i podpory przegubowej $\mathbf{R}_A$. Ponieważ ściana jest gładka (brak tarcia), reakcja $\mathbf{R}_B$ jest do niej prostopadła. Linie działania siły ciężkości **G** pręta i reakcji ściany $\mathbf{R}_B$ przecinają się w punkcie O (rys. 3.17b). Zgodnie z twierdzeniem o trzech siłach przez ten punkt musi przechodzić linia działania reakcji $\mathbf{R}_A$. Znamy zatem kierunki wszystkich sił działających na pręt, co pozwala narysować zamknięty trójkąt sił (rys. 3.17c). Kąt α jest kątem, jaki tworzy reakcja $\mathbf{R}_A$ z siłą **G**. Ponieważ trójkąt sił jest trójkątem prostokątnym, otrzymujemy:

$$R_A = \frac{G}{\cos\alpha}, \quad R_B = G\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{a}$$

Gdyby trójkąt sił nie był trójkątem prostokątnym, do obliczenia wartości reakcji $\mathbf{R}_A$ i $\mathbf{R}_B$ należałoby zastosować twierdzenie sinusów.

Z trójkąta ADO (rys. 3.17b) mamy:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\alpha &= \frac{AD}{DO} = \frac{c}{2DO}, \\ \cos\alpha &= \frac{DO}{AO} = \frac{DO}{\sqrt{(DO)^2 + (AD)^2}} = \frac{2DO}{\sqrt{4(DO)^2 + c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Z trójkąta ABE wynika, że

$$DO = EB = \sqrt{l^2 - c^2}\,.$$

Po uwzględnieniu tej zależności we wzorach (b) otrzymujemy:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{c}{2\sqrt{l^2 - c^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{l^2 - c^2}}{\sqrt{4l^2 - 3c^2}}. \tag{c}$$

Po podstawieniu tych wartości do wzorów (a) otrzymujemy ostatecznie:

$$R_A = G\frac{\sqrt{4l^2 - 3c^2}}{2\sqrt{l^2 - c^2}}, \quad R_B = G\frac{c}{2\sqrt{l^2 - c^2}}. \tag{d}$$

Przedstawiona metoda rozwiązania jest nazywana metodą geometryczną. Zadanie to można rozwiązać metodą analityczną, polegającą na wykorzystaniu równań równowagi (3.18). Po wprowadzeniu układu współrzędnych xy w punkcie E (rys. 3.17b) i zrzutowaniu sił na osie tego układu otrzymujemy równania równowagi:

$$\sum_{k=1}^{3} P_{kx} = R_B - R_A \sin\alpha = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{3} P_{ky} = R_A \cos\alpha - G = 0.$$

Powyższe dwa równania po wyznaczeniu kąta α z twierdzenia o trzech siłach pozwalają na wyznaczenie wartości reakcji $\mathbf{R}_A$ i $\mathbf{R}_B$.