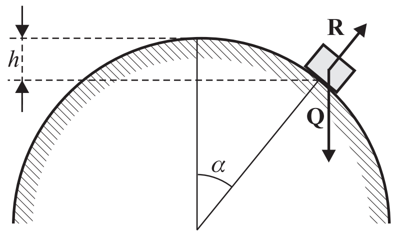
1 Praca, energia mechaniczna

Zad. 1.1 Kula o promieniu R pływa w cieczy o gęstości ρ, przy czym jest w niej zanurzona do połowy swej objętości. Jaką pracę należy wykonać, aby wydobyć kulę nad poziom cieczy? *Odp.* $W = \frac{5}{12}\pi R^4 \rho g$.

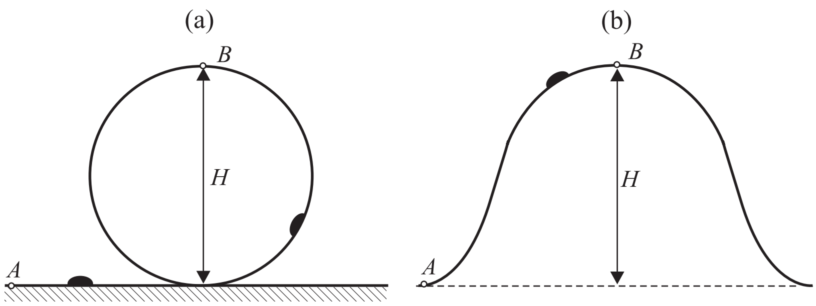
Zad. 1.2 Drewniany walec jest zanurzony w wodzie do 2/3 swojej wysokości. Jaką pracę należy wykonać, aby wyciągnąć walec z wody, jeżeli promień walca $r = 10\,\mathrm{cm}$, a jego wysokość $h = 60\,\mathrm{cm}$? *Odp.* $W = 24{,}13\,\mathrm{J}$.

Zad. 1.3 Kulka wahadła matematycznego o dlugości l została odchylona od położenia równowagi o kąt α. Po uwolnieniu zaczęła wykonywać wahania przechodząc z pręskością v przez położenie równowagi. Znaleźć tę prędkość. *Odp.* $v = 2gl\sqrt{1-\cos\alpha}$.



Rys. 1:

Zad. 1.4 Niech ciało o masie m ześlizguje się bez tarcia z wierzchołka pionowo ustawionej obręczy o promieniu r (rys. 1). Jaką siłą będzie ono naciskać na obręcz, przechodząc przez punkt, którego wysokość jest mniejsza od wysokości wierzchołka obręczy o h? Na jakiej wysokości h_0 poniżej wierzchołka obręczy ciało oderwie się od podłoża? Początkowa prędkość ciała na wierzchołku obręczy jest równa zeru. *Odp.* $R = mg\frac{r-3h}{r}$, $h_0 = \frac{r}{3}$.

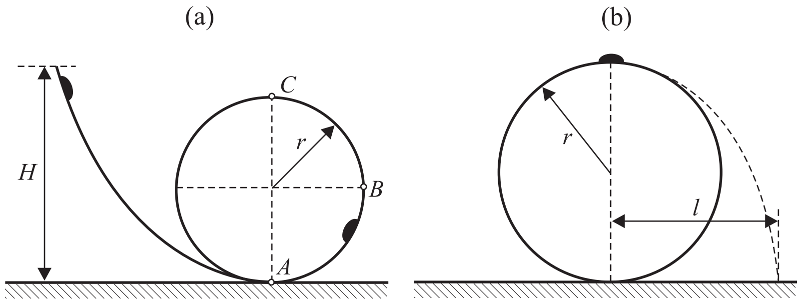


Rys. 2:

Zad. 1.5 Ciału nadaje się taką prędkość początkową, aby mogło ono z punktu A dostać się do punktu B. Proponuje się dwa warianty drogi od A do B (rys. 2 a i b). W obydwu sytuacjach ciało powinno pokonać taką samą wysokość H, ale za każdym razem inaczej. Znaleźć minimalną prędkość początkową v_0 dla obu wariantów. Tarcie pominąć. *Odp.* a) $v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}gH}$; b) $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Zad. 1.6 Znaleźć wysokość h punktu oderwania ciała od obręczy (rys. 2a) pod warunkiem, że prędkość początkowa wynosi $v_0 = \sqrt{2gH}$. *Odp.* $h = \frac{5}{6}H$.

Zad. 1.7 Ciało ześlizguje się bez tarcia z wyskokości $H = 60\,\mathrm{cm}$ i zakreśla pętlę o promieniu $r = 20\,\mathrm{cm}$ (rys. 3a). Znaleźć stosunek sił, jakimi ciało naciska na podłoże w punktach A, B i C. Z jakiej minimalnej wysokości H powinno ześlizgiwać się, aby obiegło martwą pętlę o promieniu r? *Odp.* $r + 2H) : 2(H - r) : (2H - 5r) = 7 : 4 : 1$, $H = \frac{5}{2}r = 50\,\mathrm{cm}$.



Rys. 3:

Zad. 1.8 Obręcz o promieniu r przymocowano do podłogi w pozycji pionowej. Z wierzchołka obręczy ześlizguje się bez tarcia ciało (rys. 3b). W jakiej odległości l od punktu umocowania obręczy upadnie to ciało? *Odp.* $l \approx 1{,}3r$.

Zad. 1.9 Cząstka o masie $m = 3\,\mathrm{kg}$ porusza się w płaszczyźnie xy zgodnie z następującymi równaniami ruchu:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\sin\omega t.$$

a) Po jakim torze porusza się cząstka? b) Jak zależy od czasu jej energia kinetyczna? c) Ile wynosi praca wykonana przez siłę działającą na cząstkę pomiędzy punktami $(a, 0)$ i $(0, b)$? d) Ile wynosi całkowita praca wykonana przez tę siłę w czasie pełnego obiegu toru? e) Czy siła ta jest siłą zachowawczą? f) Jaka jest zależność energii potencjalnej cząstki od położenia? g) Ile wynosi całkowita energia cząstki i czy zależy ona od czasu? Odp. a) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ czyli elipsa o półosiach a i b; b) $E_k = \frac{m\omega^2}{2}\left(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t\right)$; c) $W = \frac{1}{2}m\omega^2\left(a^2 - b^2\right)$; d) $W_{całk} = 0$; e) tak, ze względu nma odpowiedź w punkcie d); f) $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$; g) $E = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)$.

Zad. 1.10 W pewnym polu sił równania ruchu cząstki o masie $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ są następujące:

$$x = 5t^2 - t,$$
$$y = 2t^3,$$
$$z = -3t + 2.$$

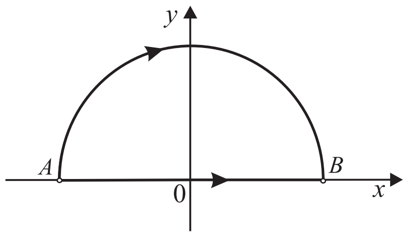
Znaleźć zależność od czasu mocy przekazywanej przez pole cząstce. *Odp.* $P = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\mathbf{v} = 36t^3 + 50t - 5\,\mathrm{W}$.

Zad. 1.11 Czy siła $\mathbf{F} = (2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2)$ jest siłą zachowawczą? Jeżeli tak, to znaleźć odpowiadającą jej energię potencjalną. *Odp.* Siła zachowawcza, $E_p = 2xy + 3y^2z - x^2z^2 + C$.

Zad. 1.12 Rozwiązać zadanie poprzednie dla sił:

$$\mathbf{F}_1(x, y, z) = (x^2z, -xy, 5),$$
$$\mathbf{F}_2(x, y, z) = (-2x - yz, z - xz, y - xy).$$

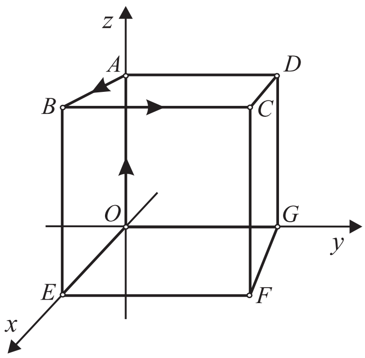
Odp. $\mathbf{F}_1$ — siła niezachowawcza; $\mathbf{F}_2$ — siła zachowawcza, $E_p = xyz + x^2 - yz + C$.



Rys. 4:

Zad. 1.13 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę $\mathbf{F}_1$ z zad. 1.12 przy przejściu od punktu $A = (-1, 1, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$: a) po prostej wzdłuż osi x (rys. 4), b) po półokręgu w płaszczyźnie xy (rys. 4). *Odp.* a) $W_1 = 0$, b) $W_2 = \frac{2}{3}$.

Zad. 1.14 Cząstka znajduje się w polu o energii potencjalnej danej wzorem $E_p = Ax^2(x - 3)$. Znaleźć i sklasyfikować punkty równowagi. *Odp.* $x_1 = 0$ — równowaga nietrwała, $x_2 = 2$ — równowaga trwała.



Rys. 5:

Zad. 1.15 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę $\mathbf{F} = (x+y)\hat{\mathbf{x}} + (y-x)\hat{\mathbf{y}} + (2z-x-3y)\hat{\mathbf{z}}$ w trakcie przemieszczania cząstki o masie m z punktu O do punktu C wzdłuż drogi $OABC$, którą stanowią krawędzie sześcianu o boku a (rys. 5). Punkt O jest wierzchołkiem sześcianu umieszczonym w początku układu współrzędnych. Krawędź OA leży na osi z, krawędź AB jest równoległa do osi x, krawędź BC jest równoległa do osi y.

Zad. 1.16 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę z zad. 1.15 w trakcie przemieszczenia cząstki o masie m wzdłuż a) drogi OC oraz b) zamkniętej drogi $OFCAO$. Co można powiedzieć o charakterze siły na podstawie wyniku uzyskanego w punkcie b).

Zad. 1.17 W pewnym polu wektorowym siła ma postać $\mathbf{F} = (x+y^2)\hat{\mathbf{x}}+2y\hat{\mathbf{y}}$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać pokonując siłę wzduż linii prostej od punktu $A(0,0)$ do $B(3,1)$.

Zad. 1.18 W pewnym polu wektorowym składowe sił są $F_x = xy$, $F_y = y + z$ i $F_z = z$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż linii $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ i $z = t$ od punktu $A(2,0,0)$ do $B(0,2,\frac{1}{2}\pi)$. *Odp.* $W = \frac{1}{8}\pi^2 + \pi - \frac{8}{3}$.

Zad. 1.19 Pole elektrostatyczne między okładkami kondensatora cylindrycznego ma natężenie $\mathbf{E} = a\frac{x}{r^3}\hat{\mathbf{x}} + a\frac{y}{r^3}\hat{\mathbf{y}}$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby ładunek jednostkowy przesunąć wzdłuż prostej $x = 3t$, $y = 4t$, $z = 0$ z punktu $M(3,4,0)$ do punktu $P(6,8,0)$. *Odp.* $W = \frac{1}{10}a$.

Zad. 1.20 Dane jest pole wektorowe sił $F_x = xz - z$, $F_y = 0$ i $F_z = 2x + z^2$. Wyznaczyć, jaką pracę trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż drogi łuku $z = x^3$ od punktu $A(0,0,0)$ do $B(1,0,1)$. *Odp.* $W = \frac{107}{60}$.

Zad. 1.21 Natężenie pola grawitacyjnego wytworzonego przez punktową masę M ma postać $\mathbf{G} = \frac{GM}{r^3}(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby przesunąć punktową masę jednostkową wzdłuż drogi $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ z punktu $M(1,1,0)$ do punktu $N(0,1,1)$. *Odp.* $W = \frac{GM\sqrt{2}}{4}(2+\pi)$.

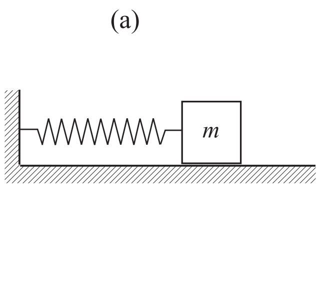
Zad. 1.22 Cząstka o masie m i energii E znajduje się w polu o energii potencjalnej $E_p(x) = A|x|$. Przedyskutować ruch tej cząstki. *Odp.* Siła $F = -A$ dla $x > 0$ oraz $F = A$ dla $x < 0$, punkty wzrotne: $x_1 = E/A$, $x_2 = -E/A$, $v_{max} = \sqrt{2E/m}$, okres drgań $T = 4\sqrt{2mE}/A$.

Zad. 1.23 Przedyskutować ruch cząstki o masie m i energii E w polu o energii potencjalnej $E_p(x) = A\tan^2 ax$. *Odp.* Siła $F = -2a\tan ax(A+E_p)$, punkty zwrotne: $x_1 = (1/a)\arctan\sqrt{E/A}$, $x_2 = (1/a)\arctan(-\sqrt{E/A})$, okres drgań $T = (\pi/a)\sqrt{2m/(E+A)}$.

Zad. 1.24 Przedyskutować ruch cząstki o masie m i energii $E = 0$ w potencjale Morse'a postaci $E_p(x) = A(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$. Odp. punkt zwrotny $x = -(1/a)ln2$. Siła $F = 2aA(e^{-2ax} - e^{-ax})$, równanie ruchu $x(t) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{2} + \frac{Aa^2}{m}(t+t_0)^2\right)$, gdzie $t_0$stała wyznaczana z warunków początkowych.

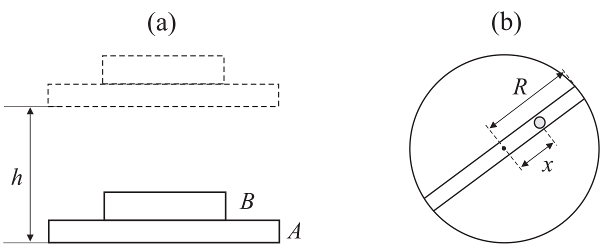
2 Oscylator harmoniczny

Zad. 2.1 Do stojącego na poziomej podłodze wózka o masie 10 kg przyczepiona jest sprężyna, której drugi koniec umocowany jest do ściany. Sprężynę rozciągnięto o 1 m i zwolniono. Ile wynosi przyspieszenie wózka w momencie puszczenia sprężyny? Jaka będzie prędkość wózka, gdy znajdzie się on w położeniu równowagi? Stała sprężystości sprężyny jest równa $k = 50\,\mathrm{N/m}$. *Odp.* $5\,\mathrm{m/s^2}$, $2.24\,\mathrm{m/s}$.



Rys. 6:

Zad. 2.2 Przyczepiony do sprężyny klocek może ślizgać się bez tarcia po poziomej płaszczyźnie (rys. 6a). Jedyna siłą decydującą o drganiach klocka jest w tym przypadku siła działająca ze strony sprężyny. Jeżeli zestaw zostanie zawieszony (rys. 6b), to o ruchu klocka decyduje także siła ciężkości. Obliczyć częstości drgań w obu przypadkach. *Odp.* Częstość drgań będzie w obu przypadkach taka sama $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Rys. 7:

Zad. 2.3 Deska A ustawiona w płaszczyźnie poziomej, wykonuje w kierunku pionowym drgania o amplitudzie $x_0 = 0{,}75\,\mathrm{m}$ (rys. 7a). Jaka może być maksymalna częstostliwość drgań deski, aby ciało B, swobodnie leżące na desce, nie oderwało się od niej? *Odp.* $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = 0{,}575\,\mathrm{Hz}$.

Zad. 2.4 Zbadać ruch kulki materialnej poruszającej się wzdłuż prostoliniowego kanału przechodzącego przez środek Ziemi (rys. 7b), jeżeli wiemy, że we wnętrzu Ziemi siła działająca na kulkę jest wprost proporcjonalna do jej odległości od środka Ziemi i jest skierwana do jej środka.

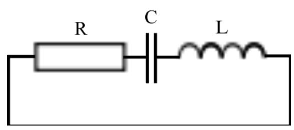
Prędkość początkowa kulki przy wejściu do kanału jest równa zeru. Obliczyć czas, w ciągu którego kulka osiągnie środek Ziemi oraz prędkość, z jaką go minie (promień Ziemi $R = 6370\,\mathrm{km}$). *Odp.* $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} = 20{,}8\,\mathrm{min}$, $v_1 = R\sqrt{\frac{g}{R}}\sin\sqrt{\frac{g}{R}}\tau = 7{,}9\,\mathrm{km/s}$.

Zad. 2.5 Człowiek o masie 90 kg, przywiązany do gumowej linki o długości 18 m skacze z mostu o wysokości 40 m ponad poziomem rzeki. W momencie skoku cała linka leży zwinięta na moście. W jakiej odległości od poziomu rzeki skoczek zatrzyma się po raz pierwszy? Stała sprężystości linki jest równa $k = 204\,\mathrm{N/m}$. *Odp.* 4.5 m.

Zad. 2.6 Przedyskutować ruch masy m poruszającej się bez tarcia po wewnętrznej stronie okręgu o promieniu R. Odp. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$. Dla małych kątów dostajemy równanie oscylatora harmonicznego $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R}\varphi = 0$ o częstości $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Zad. 2.7 Napisać i rozwiązać różniczkowe równanie ruchu masy m umieszczonej na sprężynie o stałej sprężystości k i podlegającej działaniu siły tłumiącej $-m\gamma v$. W chwili $t = 0$ położenie i prędkość masy są $x = 0$ oraz $v = v_0$.

Zad. 2.8 Znaleźć położenie $x = x(t)$ masy m z poprzedniego zadania po przyłożeniu w chwili $t = 0$ siły wymuszającej $F = F_0 \cos\omega t$.



Rys. 8:

Zad. 2.9 Równanie na natężenie prądu obwodu RLC przedstawionego na rys. 8 ma postać

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

Przez analogię ze sprężyną znaleźć wyrażenie na stałą tłumienia oraz częstość własną ω_0.

3 Układ punktów materialnych

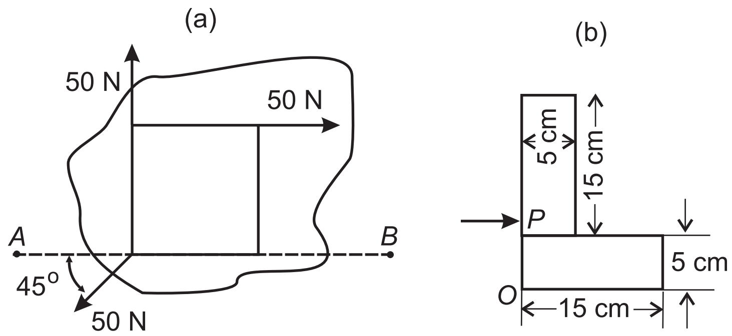
Zad. 3.1 Znajdź położenie środka masy układu trzech mas punktowych $m_1 = 1\,\text{kg}$, $m_2 = 4\,\text{kg}$ i $m_3 = 3\,\text{kg}$ o współrzędnych $\mathbf{r}_1 = 1\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}}+4\hat{\mathbf{z}}\,[\text{m}]$, $\mathbf{r}_2 = -2\hat{\mathbf{x}}+1\hat{\mathbf{y}}+-3\hat{\mathbf{z}}\,[\text{m}]$, $\mathbf{r}_3 = -4\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+1\hat{\mathbf{z}}\,[\text{m}]$.

Zad. 3.2 W jakiej odległości od środka Ziemi znajduje się środek masy układu Ziemia-Księżyc. Średnia odległość Ziemia od Księżyca liczona od środka Księżyca do środka Ziemi wynosi $l = 384\,400$ km, promień Księżyca $R_K = 1735$ km, średni promień Ziemi $R_Z = 6370$ km. Stosunek średnich gęstości Ziemi i Księżyca wynosi $n = \rho_z/\rho_K = 1{,}65$. *Odp.* $x = \frac{R_K^3 \cdot l}{R_K^3 + nR_Z^3} = 3\,817\,\text{km}$.

Zad. 3.3 W jakiej odległości od jądra atomu tlenu znajduje się środek masy cząsteczki wody. Przyjąć stosunek mas tlenu i wodoru $n = m_O/m_H = 16$, długość wiązania O-H $d \approx 96\,\text{pm}$, kąt pomiędzy wiązaniami O-H $\alpha = 104{,}45°$. Odp. $x = \frac{2d\cos(\alpha/2)}{2+n} = 6{,}5\,\text{pm}$.

Zad. 3.4 Siła $\mathbf{F} = 30\hat{\mathbf{x}} + 40\hat{\mathbf{y}}$ [N] działa na punkt, którego położenie opisane jest wektorem $\mathbf{r} = 8\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}}$ [m]. Obliczyć:

a) moment tej siły względem początku układu,
b) długość ramienia siły,
c) wielkość składowej prostopadłej do r.

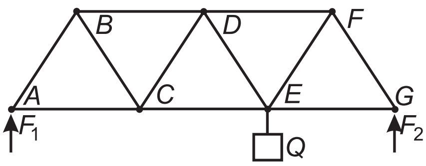


Rys. 9:

Zad. 3.5 Na płaską stalową płytkę, pływającą po rtęci, działają trzy siły o kierunkach pokazanych na rys. 9(a), zaczepione w rogach kwadratu o boku 0,001 m. Znaleźć pojedynczą czwartą siłę, która utrzyma płytkę w równowadze. Podać wielkość, kierunek oraz punkt zaczepienia tej siły, leżący na linii AB.

Zad. 3.6 Oblicz współrzędne środka masy połówki tarczy o masie m i promieniu R oraz stałej gęstości powierzchniowej ρ, umieszczonej w płaszczyźnie xy nad osią Ox.

Zad. 3.7 Ciało mające kształt litery L (patrz rys. 9(b)), wyciete z kawałka metalu o równomiernej grubości, spoczywa na gładkim poziomym stole. W pewnej chwili ciało to zostało nagle uderzone, w kierunku pokazanym na rysunku, i zaczęło poruszać się ruchem postępowym (nie obracając się). W jakiej odległości od wierzchołka O było przyłożone uderzenie?



Rys. 10:

Zad. 3.8 Wspornik mostu jest skonstruowany tak, jak pokazano na rys. 10. Wszystkie człony są lekkie, sztywne, mają jednakową długość i mogą obracać się bez tarcia wokół punktów zamocowania. Znaleźć siły reakcji F_1 i F_2 oraz siłę powstającą w członie DF.

4 Siły centralne

Zad. 4.1

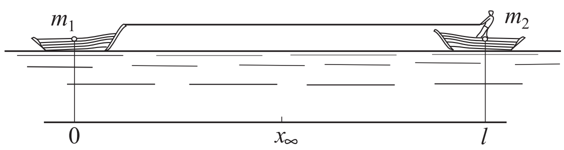
Zad. 4.2

5 Zasada zachowania pędu

Zad. 5.1 Łyżwiarz opierając się o barierę, wyrzucił kamień poziomo z prędkością $v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$. Jaką prędkość v względem powierzchni Ziemi nada temu kamieniowi, jeżeli stojąc na łyżwach na gładkim lodzie wyrzuci kamień, stosując taką samą siłę jak poprzednio? Wyznaczyć drogę, jaką przejedzie łyżwiarz od miejsca wyrzucenia kamienia do miejsca zatrzymania, jeżeli współczynnik tarcia łyżew o lód jest równy $\mu = 0{,}02$. Masa kamienia $m = 3\,\mathrm{kg}$, masa łyżwiarza wynosi $M = 60\,\mathrm{kg}$. Odp. $v = v_0\sqrt{\frac{M}{M+m}} \approx 13{,}66\,\mathrm{m/s}$, $l = \frac{v_0^2 m^2}{2M(M+m)\mu g} \approx 1{,}19$.

Zad. 5.2 Z działka o masie M, ześlizgującego się swobodnie po pochyłości o kacie nachylenia α do poziomu w momencie, kiedy przemierzyło ono odległość l, wystrzelono poziomo pocisk. Jaka powinna być prędkość pocisku, aby działko zatrzymało się. Zaniedbać tarcie oraz założyć, że $m \ll M$. *Odp.* $v = \frac{m}{M}\frac{\sqrt{2gl\sin\alpha}}{\cos\alpha}$.

Zad. 5.3 Trzy jednakowe łodzie o masie m płyną z tą samą prędkością v jedna za drugą. Ze środkowej łodzi jednocześnie wyrzucono do pierwszej i trzeciej łodzi jednakowe odważniki o masie m_1 z prędkością u. Jakie będą prędkości łodzi po przerzuceniu odważników. *Odp.* $v_1 = \frac{m_1(v+u)+mv}{m+m_1}$, $v_2 = v$, $v_1 = \frac{m_1(v-u)+mv}{m+m_1}$.



Rys. 11:

Zad. 5.4 Człowiek stojący w początkowo nieruchomej łodzi przyciąga do siebie za pomocą liny drugą łódź (rys. 11). Łodzie od momentu zetknięcia poruszają się dalej razem. Wskutek oporu wody proporcjonalnego do prędkości łodzi, ruch łodzi po niezmiernie długim czasie ustanie. W jakim miejscu x_∞ znajdą się wtedy łodzie? Masy łodzi wynoszą m_1 oraz m_2, początkowa odległość pomiędzy środkami ich mas — l. *Odp.* $x_\infty = l/2$.

Zad. 5.5 Dwie łodzie płyną naprzeciw siebie po liniach prostych, równoległych. Kiedy znajdują się naprzeciw siebie, wzajemnie przerzucone zostają ładunki o masie 50 kg, w wyniku czego pierwsza z łodzi zatrzymuje się, a druga porusza się dalej z prędkością 8,5 m/s w tym samym kierunku. Jakie były prędkości łodzi, do momentu wymiany ciężarów, jeżeli masy łodzi z ładunkiem były równe 500 kg oraz 1 t. Odp. 9 m/s i 1 m/s.

Zad. 5.6 Wagon o masie $m_1 = 50\,\mathrm{t}$, poruszając się z prędkością $v_0 = 12\,\mathrm{km/h}$, zderza się ze stojącą na jego drodze platformą o masie $m_2 = 30\,\mathrm{t}$. Obliczyć prędkość v wspólnego ruchu wagonu i platformy bezpośrednio po tym, jak zadziałał sprzęg automatyczny. Obliczyć drogę s, przebytą przez układ wagon-platforma, jeżeli siła oporu stanowiła $n = 5\%$ ciężaru tego układu. *Odp.* $v = v_0\frac{m_1}{m_1+m_2} = 7{,}5\,\mathrm{km/h}$, $s = \frac{v_0^2}{2g}\frac{100}{n}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = 4{,}43\,\mathrm{m}$.

Zad. 5.7 Z armaty o masie M, znajdującej się u podnóża góry, wyleciał w kierunku poziomym pocisk o masie m z prędkością początkową v_0. Na jaką wysokość wjedzie armata po zboczu góry w wyniku odrzutu, jeżeli nachylenie zbocza wynosi α, a współczynnik tarcia armaty o podłoże — μ? *Odp.* $h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{\cos^2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$.

Zad. 5.8 Niech ciało o masie m uderza centralnie z prędkością v_0 w spoczywające ciało o masie M. Wyznaczyć prędkości ciał po zderzeniu idealnie sprężystym.

Zad. 5.9 Pal o masie $m_1 = 100\,\mathrm{kg}$ jest wbijany w grunt bijakiem kafara, która ma masę $m_2 = 300\,\mathrm{kg}$. Bijak kafara swobodnie spada z wysokości $H = 4\,\mathrm{m}$, a w czasie każdego uderzenia pal obniża się o $h = 10\,\mathrm{cm}$. Przyjmując, że siła oporu F gruntu jest stała, wyznaczyć jej wartość dla dwóch przypadków: a) uderzenie w pal jest idealnie sprężyste; b) uderzenie jest niesprężyste. *Odp.* a) $F = m_1 g\left(1 + \frac{4Hm_2^2}{h(m_1+m_2)^2}\right) \approx 89\,\mathrm{kN}$; b) $F = (m_1+m_2)\,g\left(1 + \frac{Hm_2^2}{h(m_1+m_2)^2}\right) \approx 92\,\mathrm{kN}$

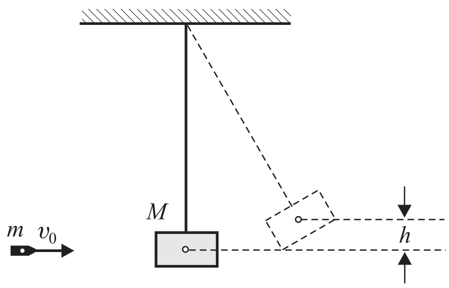
Zad. 5.10 Po pręcie poziomym bez tarcia ślizga się z prędkością v_0 kula o masie $m_1 = M$ i zderza się z inną kulą o masie m_2, która wcześniej była w spoczynku. Zderzenie jest idealnie niesprężyste. Znaleźć prędkość v kul po zderzeniu oraz ciepło Q wydzielone podczas zderzenia w następujących przypadkach: a) $m_2 = \frac{M}{2}$; b) $m_2 = M$; c) $m_2 = 2M$. *Odp.* $v = \frac{v_0 m_1}{m_1+m_2}$; a) $\frac{2}{3}v_0$; b) $\frac{1}{2}v_0$; c) $\frac{1}{3}v_0$; $Q = \frac{m_1 v_0^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$; a) $\frac{1}{6}Mv_0^2$; b) $\frac{1}{4}Mv_0^2$; c) $\frac{1}{3}Mv_0^2$.

Zad. 5.11 Na poziomej płaszczyźnie spoczywa kula. Zderza się z nią inna kula o takiej samiej masie. Zderzenie jest idealnie sprężyste i niecentralne. Wykazać, że w wyniku zderzenia kule rozbiegają się w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach.

Zad. 5.12 Atom izotopu uranu U^{235} rozpada się według schematu ${}_{92}U^{235} \rightarrow {}_{40}Zr^{95} + {}_{52}Te^{140}$. Przy rozpadzie wyzwala się energia $5 \times 10^{-11}\,\mathrm{J}$. Jaka jest prędkość v jądra ${}_{40}Zr^{95}$ powstałego przy rozpadzie? Odp. $v = \sqrt{\frac{2m_2E}{m_1^2 + m_1m_2}} = 1{,}92 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$.

Zad. 5.13 Na płaszczyźnie poziomej spoczywa kula o masie M. Uderza w nią kula o masie m, mająca przed uderzeniem prędkość v_0. Zderzenie jest idealnie sprężyste i niecentralne. W wyniku zderzenia kula o masie m uzyskuje prędkość skierowaną prostopadle do kierunku swego pierwotnego ruchu. Wyznaczyć prędkości v_1 oraz v_2 kul i kierunek ruchu kuli o masie M po zderzeniu, a także zmianę energii ΔE i pędu $\Delta(mv)$ kuli o masie m w wyniku zderzenia. *Odp.* $v_1 = v_0\sqrt{(n-1)(n+1)}$; $v_2 = v_0\sqrt{\frac{2}{n^2+n}}$; $\beta = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{n}$; $\Delta E = -\frac{mv_0^2}{n+1}$; $\Delta(mv) = mv_0\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$, gdzie $n = \frac{M}{m}$.

Zad. 5.14 Na gładkiej poziomej powierzchni w odległości $l = 3\,\mathrm{m}$ od pionowej ściany znajduje się kula o masie M. Inna kula o masie m ślizga się z pewną prędkością w kierunku od ściany do kuli o masie M. Po idealnie sprężystym zderzeniu kul, kula o masie m dociera do ściany i odbiwszy się od niej sprężyście dopędza kulę o masie M. Obliczyć, w jakiej odległości s od ściany nastąpiło drugie zderzenie , jeżeli $\frac{M}{m} = n = 5$. *Odp.* $s = l\frac{1+n}{n-3} = 9\,\mathrm{m}$.



Rys. 12:

Zad. 5.15 W skrzynkę o masie M, zawieszoną na cienkiej nici, trafia pocisk o masie m, lecący poziomo z prędkością v_0 i zatrzymuje się w niej (rys. 12). Na jaką wysokość h od położenia równowagi wzniesie się skrzynka po trafieniu w nią pocisku? Jakie ciepło wydzieli się w wyniku zderzenia? *Odp.* $h = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$; $Q = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$.

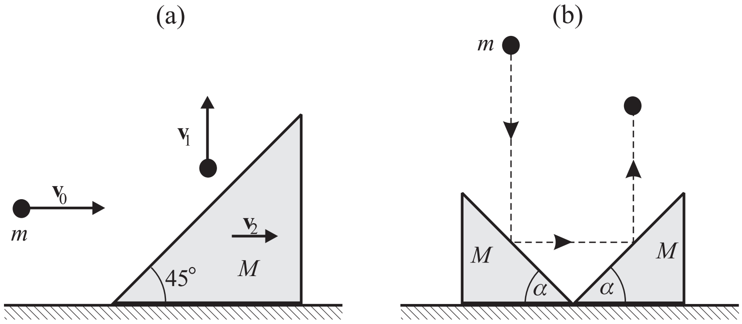
Zad. 5.16 Dwie kule o masach M i $2M$ podwieszone są w jednym punkcie na niciach o jednakowej długości l. Kulę o masie M odchylono o kąt α i puszczono, nadając jej przy tym prędkość v_0 prostopadłą do nici, o zwrocie ku położeniu równowagi. Na jaką wysokość h wzniosą się kule po zderzeniu, jeżeli jest ono: a) idealnie sprężyste; b) idealnie niesprężyste (kule w wyniku zderzenia zlepiają się)? *Odp.* a) $h_1 = \frac{2}{9}H$, $h_2 = \frac{1}{18}H$; b) $h = \frac{1}{18}H$, gdzie $H = 4l\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{v_0^2}{g}$.

Zad. 5.17 Kula o masie M wisi na nici o długości l. W kulę trafia lecący poziomo pocisk o masie m i wbija się w nią. Z jaką minimalną prędkością powinien lecieć pocisk, aby w wyniku tego zderzenia kula wisząca na nici mogła wykonać pełny obrót w płaszczyźnie pionowej? *Odp.* $v_{min} = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl}$

Zad. 5.18 Na płaszczyźnie poziomej spoczywa ciało o masie M, mające kształt równi pochyłej o kącie nachylenia $45°$. Z równią zderza się sprężyście kulka o masie m, lecąca poziomo z prędkością v_0. W wyniku zderzenia z równią kulka odskakuje pionowo do góry, a równia zaczyna się ślizgać bez tarcia po płaszczyźnie (rys. 13a). Wyznaczyć prędkość, z jaką kulka rozpoczyna swój ruch pionowy bezpośrednio po zderzeniu. *Odp.* $v_1 = v_0\sqrt{\frac{M-m}{M}}$.

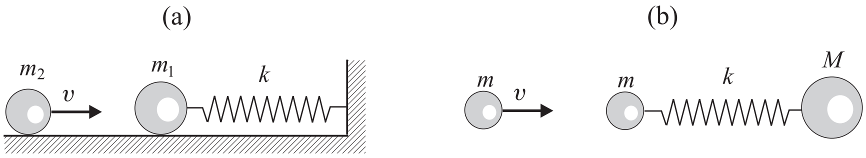
Zad. 5.19 Na płaszczyźnie poziomej leżą dwa kliny mające katy naczylenia po $45°$, masa każdego z nich jest równa M (13b). Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m ($m \ll M$), uderza początkowo w jeden klin, a następnie w drugi i podskakuje pionowo do góry. Wyznaczyć wysokość h, na jaką podskoczy kulka. Przyjąć, że obydwa zderzenia są sprężyste, oraz że nie ma tarcia między klinami i płaszczyzną. *Odp.* $h = H\frac{M-m}{M+m}$.

Zad. 5.20 Na płaszczyźnie poziomej leży klin o masie M i kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30°$. Z wysokości H swobodnie spada kulka o masie m, sprężyście uderza w klin i odbija się pod kątem $30°$ do poziomu. Na jaką wysokość h wzniesie się kulka? *Odp.* $h = H\frac{M}{4M+3m}$.



Rys. 13:

Zad. 5.21 Na płaskiej powierzchni poziomej leży kula o masie m_1, połączona sprężyną o współczynniku sprężystości k, której drugi koniec jest przytwierdzony do ściany (rys. 14a). W kulę uderza z prędkością v druga kula o masie $m_2 < m_1$. a) Obliczyć amplitudę drgań kul po zderzeniu idealnie niesprężystym. b) Obliczyć amplitudę drgań pierwszej kuli po zderzeniu idealnie sprężystym. c) W jakim kierunku będzie poruszać się druga kula po zderzeniu idealnie sprężystym. *Odp.* a) $A = \frac{m_2 v}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$; b) $A = \frac{2m_2 v}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$; c) po uderzeniu druga kula będzie poruszać się w przeciwną stronę.



Rys. 14:

Zad. 5.22 Układ złożony jest z dwóch kul o masach m i M połączonych sprężyną o zaniedbywalnej masie i współczynniku sprężystości k (rys. 14b). Trzecia kula o masie m poruszająca się wzdłuż osi sprężyny z prędkością v doznaje zderzenia sprężystego z kulą m. Obliczyć: a) energię kinetyczną E_k ruchu układu jako całości; b) energię wewnętrzną E_{wew} układu mas połączonych sprężyną; c) amplitudę drgań A jednej z kul względem drugiej. Układ do momentu zderzenia spoczywał, a sprężyna nie była zdeformowana. *Odp.* a) $E_k = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}$; b) $E_{wew} = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}$; c) $A = v\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$.

Zad. 5.23 Rakieta o masie startowej m_0 zostaje wystrzelona pionowo do powierzchni Ziemi. Paliwo jest z niej wyrzucane z prędkością u względem rakiety w taki sposób, że masa rakiety maleje z szybkością r (tzn. $\frac{dm}{dt} = -r$, gdzie $r > 0$). Obliczyć prędkość rakiety jako funkcję czasu do momentu wypalenia całego paliwa. Pominąć opór powietrza i przyjąć, że siła grawitacji jest stała i wynosi mg. *Odp.* $v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - rt} - gt$.