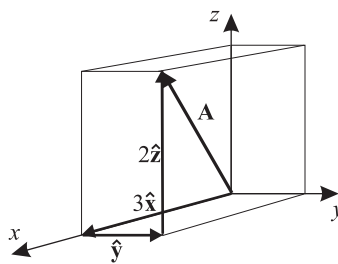


1 Wektory, składanie prędkości

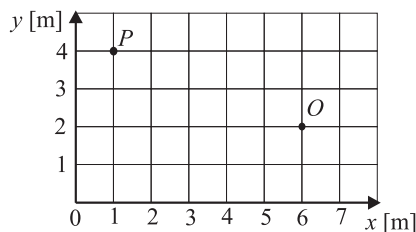
Zad. 1.1 Na rys. 1 dany jest wektor $\mathbf{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$.

- Znaleźć długość $\mathbf{A}$.
- Ile wynosi długość rzutu $\mathbf{A}$ na płaszczyznę xy ?
- Znaleźć wektor $\mathbf{B}$ leżący w drugiej ćwiartce płaszczyzny xy o długości $\sqrt{10}$ prostopadły do $\mathbf{A}$.
- Znaleźć wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{B}}$.
- Znaleźć iloczyn skalarny wektora $\mathbf{A}$ przez wektor $\mathbf{C} = 4\hat{x}$.
- Znaleźć postać $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ w układzie odniesienia otrzymanym z poprzedniego układu przez obrót o $\pi/2$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, patrząc wzdłuż osi z .
- Znaleźć iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ w nowym układzie odniesienia.
- Znaleźć iloczyn wektorowy $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ w starym i nowym układzie odniesienia.
- Znaleźć wektor $\mathbf{A} - \mathbf{C}$.



Rys. 1:

Zad. 1.2 Na rys. 2 zaznaczono dwa punkty O i P . Poprowadzić strzałkę od O do P umieszczając strzałkę na końcu. (a) Znaleźć składowe x i y wektora w metrach. (b) Wyrysować równoległe do tych osi drugi układ przechodzący przez punkt O ; jakie są nowe składowe x' i y' ? (c) Obrócić drugi układ współrzędnych o 30° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzmy z góry) i znaleźć składowe x'' oraz y'' .



Rys. 2:

Zad. 1.3 Układ współrzędnych zdefiniowany został w taki sposób, że oś $\hat{x}$ ma kierunek na wschód, oś $\hat{y}$ kierunek na północ. Niech wektor $\mathbf{A}$ ma długość 2 m i tworzy kąt 60° (na wschód)

z kierunkiem na północ, natomiast wektor $\mathbf{B}$ ma długość 4 m i tworzy kąt 120° (na wschód) z kierunkiem na północ. Znaleźć współrzędne wektora $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Zad. 1.4 Dane są dwa wektory $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ oraz $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$. Obliczyć:

- Długość każdego wektora.
- Iloczyn skalarny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
- Kąt zawarty między nimi.
- Cosinusy kierunkowe każdego wektora.
- Sumę i różnicę wektorów $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
- Iloczyn wektorowy $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Zad. 1.5 Dane są dwa wektory takie, że $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 11\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ oraz $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -5\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$.

- Znaleźć $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.
- Znaleźć kąt zawarty między $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Odp. $\varphi \approx 55^\circ$

Zad. 1.6 Pilot samolotu chce osiągnąć punkt 200 km na wschód od obecnego położenia. Wiatr wieje z prędkością 30 km/h z północnego wschodu. Obliczyć wektor jego prędkości w stosunku do poruszającej się masy powietrza, jeżeli według rozkładu lotu miał przybyć do miejsca przeznaczenia po 40 min. Odp. $\mathbf{v} = 321\hat{\mathbf{x}} + 21\hat{\mathbf{y}}$ km/h, $\hat{\mathbf{x}}$ ma kierunek na wschód, $\hat{\mathbf{y}}$ ma kierunek na północ.

Zad. 1.7 Dwie cząstki zostały wysłane z jednego wspólnego źródła i po pewnym czasie przemieszczenia ich wynoszą $\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 8\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$.

- Narysować położenia cząstek i napisać wyrażenie na przemieszczenie cząstki 2 względem cząstki 1.
- Znaleźć wartości każdego z wektorów.
- Obliczyć kąty między wszystkimi możliwymi parami tych wektorów.
- Obliczyć rzut $\mathbf{r}$ na $\mathbf{r}_1$. Odp. $-1,2$.
- Obliczyć iloczyn wektorowy $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Odp. $-65\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 34\hat{\mathbf{z}}$.

Zad. 1.8 Dwie cząstki 1 i 2 poruszają się wzdłuż osi x i y z prędkościami $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{x}}$ m/s i $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{y}}$ cm/s. W chwili $t = 0$ są one w punktach o współrzędnych

$$x_1 = -3 \text{ cm}, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 0, \quad y_2 = -3 \text{ cm}.$$

- Znaleźć wektor $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, który określi położenie cząstki 2 względem 1 w funkcji czasu. Odp. $\mathbf{r} = (3 - 2t)\hat{\mathbf{x}} + (3t - 3)\hat{\mathbf{y}}$ m.
- Kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie? Odp. $t = 1,15$ s.

Zad. 1.9 Samochód jechał z miasta A na wschód w czasie $t_1 = 2$ h ze stałą prędkością $v_1 = 60$ km/h. Następnie skręcił na południe i po $t = 3$ h od rozpoczęcia ruchu przybył do miasta B . Z jaką prędkością jechał samochód na południe, jeśli wiadomo, że najkrótsza droga (odległość) między tymi miastami jest równa $s = 150$ km? Odp. $v_2 = 30$ km/h.

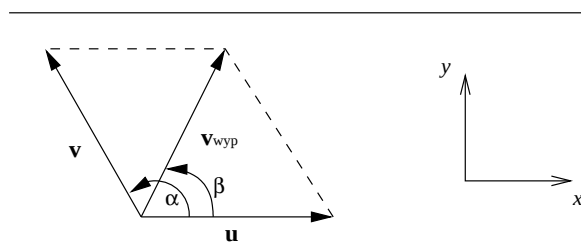
Zad. 1.10 Dwa okręty wyruszyły jednocześnie z tego samego miejsca w drogę w kierunkach do siebie prostopadłych, jeden z prędkością $v_1 = 30$ km/h, drugi z prędkością $v_2 = 40$ km/h. Obliczyć prędkość wzajemnego oddalania się okrętów oraz ich odległość po upływie 20 min.

Zad. 1.11 Łódź płynie z prędkością 2 m/s względem wody prostopadle do prądu rzeki. Prędkość prądu rzeki wynosi 1 m/s. Znaleźć całkowitą prędkość v łodzi oraz kierunek tego wektora względem brzegów rzeki. *Odp.* $v = \sqrt{5}$ m/s. Wektor prędkości tworzy z brzegiem, od którego łódź się oddala kąt $\alpha = 63^\circ 30'$.

Zad. 1.12 Dwa samoloty startują jednocześnie z tego samego miejsca w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Prędkość pierwszego wynosi $v_1 = 300$ km/h, drugiego zaś $v_2 = 400$ km/h. Jak zwiększa się odległość pomiędzy samolotami? Jaka jest odległość s pomiędzy samolotami, kiedy pierwszy z nich przemierzył drogę 900 km/godz? *Odp.* Odległość pomiędzy samolotami zwiększa się o 500 km w ciągu godziny. $s = 1500$ km.

Zad. 1.13 Łódź porusza się po rzece z prędkością $\mathbf{v}$ względem wody, pod kątem α do prądu, którego prędkość wynosi $\mathbf{u}$ (rys. 3). Znaleźć prędkość łodzi względem brzegu.

Odp. $v_{wyp} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu \cos \alpha}$, $\sin \beta = \frac{v \sin \alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 + 2vu \cos \alpha}}$.



Rys. 3:

Zad. 1.14 Przystanie przeprawy promowej znajdują się naprzeciw siebie po obu stronach rzeki i płynącej z prędkością 0,5 m/s. Jaki kurs powinien obrać przewoźnik, żeby przepłynąć rzekę po linii prostej od jednej przystani do drugiej. Z jaką prędkością v będzie poruszać się prom w poprzek rzeki. Prom porusza się z prędkością 1 m/s względem rzeki. *Odp.* Obiera kurs w górę rzeki tworzący kąt 30° z prostą łączącą przystanie. $v = 0,87$ m/s.

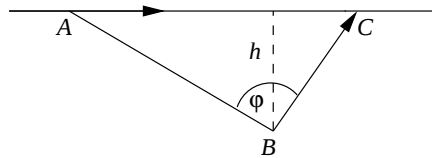
Zad. 1.15 Okręt płynie na zachód z prędkością 3,66 m/s. Z południowego zachodu wieje wiatr z prędkością 7,07 m/s. Jaka prędkość wiatru v zarejestrują przyrządy umieszczone na okręcie. Jaki wskażą kierunek wiatru względem kursu okrętu. *Odp.* $v = 10$ m/s, kąt 150° względem kursu okrętu.

Zad. 1.16 Na wózku poruszającym się ze stałą prędkością po poziomej powierzchni umieszczono rurkę. Pod jakim kątem względem pionu należy zorientować rurkę, aby krople padającego pionowo deszczu przelatwały przez rurkę nie dotykając jej wewnętrznych ścianek. Przyjąć, że prędkość kropli deszczu jest stała. *Odp.* Rurka powinna być odchylona od pionu w kierunku ruchu wózka o kąt $\varphi = \arctan(v_w/v_k)$.

Zad. 1.17 Na kartce papieru zaznaczono kąt prosty. Prostopadle do dwusiecznej kąta przesuwany jest z prędkością 10 cm/s przymiar. Jego końce przecinają ramiona kąta. Z jaką prędkością poruszają się punkty przecięcia ramion kąta z przymiarem? *Odp.* 14,1 cm/s.

Zad. 1.18 Sterowiec ma dotrzeć do celu oddalonego o 36 km na północ. W czasie lotu wieje wiatr z północnego zachodu pod kątem 30° na południe od równoleżnika z prędkością 5 m/s. Sterowiec jest w stanie lecieć z prędkością 8,66 km/godz. Jaki kierunek lotu powinien obrać sterowiec aby dotrzeć do celu? Po jakim czasie pokona zadaną trasę? Ile czasu będzie trwała droga powrotna? *Odp.* 30° na wschód od linii północ-południe, $v_{wyp} = 5$ m/s, $t_1 = 2$ h, drogę powrotną pokona w czasie $t_2 = 1$ h.

Zad. 1.19 Dwa okręty poruszają się w przeciwnych kierunkach z prędkościami v_1 oraz v_2 . Pod jakim kątem do obranego kursu należało z jednego z okrętów wystrzelić pocisk, by dotarł do drugiego z nich, jeśli wystrzał nastąpi w chwili, gdy okręty znajdują się na prostej prostopadłej do kierunku ruchu obu okrętów? Prędkość pocisku jest stała i wynosi v_0 . *Odp.* Pod kątem $\varphi = \arccos[(v_1 + v_2)/v_0]$.



Rys. 4:

Zad. 1.20 Człowiek znajduje się w odległości $h = 50$ m od prostej drogi, po której nadjeżdża autobus z prędkością $v_1 = 10$ m/s (rys. 4). W jakim kierunku powinien biec człowiek, aby dogonić autobus, jeżeli autobus znajduje się w odległości $l = |AB| = 200$ m od człowieka i jeżeli człowiek może biec z prędkością $v_2 = 3$ m/s? W jakim kierunku powinien biec, by znaleźć się na drodze z maksymalnym wyprzedzeniem względem autobusu? Jaka jest najmniejsza prędkość, z którą powinien biec człowiek, aby dogonić autobus? *Odp.* $\sin \varphi \geq \frac{hv_1}{lv_2} \approx 0,833$, skąd $56^\circ 24' \leq \varphi \leq 123^\circ 36'$, $v_{2min} = \frac{hv_1}{l} = 2,5$ m/s.

2 Ruch jednowymiarowy

Zad. 2.1 Samochód po ruszeniu z miejsca przebywa drogę $s = 100$ m w czasie $t = 10$ s. Ile wynosi jego stałe przyspieszenie a ? Ile wynosi jego prędkość końcowa v_k ?

Zad. 2.2 Kula przebija deskę o grubości $d = 2$ cm. Prędkość kuli do chwili uderzenia wynosi $v_0 = 500$ m/s, a po wylocie $v_1 = 100$ m/s. Ile wynosi opóźnienie kuli podczas przebijania drewna i jak długo trwa ten ruch? Ruch kuli w drewnie traktujemy jako jednostajnie opóźniony. *Odp.* $a = -6 \times 10^6$ m/s², $t \approx 0,66 \times 10^{-4}$ s.

Zad. 2.3 Kula leci z prędkością 400 m/s, uderza w nasyp gruntowy i przenika grunt na głębokość 36 cm. Ile czasu trwa ruch kuli w nasypie i jakie jest jego przyspieszenie a ? Ile wynosi prędkość kuli v_1 na głębokości 18 cm? Na jakiej głębokości s_2 prędkość kuli zmniejszy się trzykrotnie? *Odp.* $t = 1,8 \times 10^{-3}$ s, $a = \frac{2}{9} \times 10^6$ m/s², $v_1 \approx 282$ m/s, $s_2 = 32$ cm.

Zad. 2.4 Samochód rusza z miejsca w momencie zmiany światła na zielone z przyspieszeniem $a = 2$ m/s². Ciężarówka poruszająca się ze stałą prędkością $v = 20$ m/s w tym samym kierunku wyprzedza samochód w momencie, gdy ten rusza. Po jakim czasie t samochód dogoni ciężarówkę? W jakiej odległości s od przejścia ze światłami to nastąpi? Jaka prędkość v_1 ma samochód w tym momencie?

Zad. 2.5 Ciało przebyło jedną czwartą drogi ze stałą prędkością $v_1 = 2$ m/s, następnie trzecią część pozostałej drogi – ze stałą prędkością $v_2 = 1$ m/s, a końcowy odcinek drogi ze stałym przyspieszeniem uzyskawszy prędkość końcową $v_3 = 7$ m/s. Oblicz średnią prędkość v_{sr} dla całego ruchu. Oblicz także przebytą przez ciało drogę s , jeżeli wiadomo, że na ostatnim odcinku przyspieszenie było równe $a = 1$ m/s². *Odp.* $v_{\text{sr}} = 2$ m/s, $s = 48$ m.

Zad. 2.6 W czasie $t_1 = 2$ s ciało przemieszczało się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_1 = 2$ m/s², a następnie – jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $|a_2| = 0,5$ m/s². Znaleźć całkowity czas ruchu t_c , jaki upłynął do chwili zatrzymania się ciała, przebytą przez nie w tym czasie drogę s i średnią prędkość v_{sr} dla czasu t_c . Znajdź średnie przyspieszenie a_{sr} w przedziale czasu od $t = t_0$ do $t = t_c/2$. *Odp.* $t_c = (1 + a_1/|a_2|)t_1 = 10$ s, $s = 20$ m, $v_{\text{sr}} = 2$ m/s, $a_{\text{sr}} = 0,5$ m/s.

Zad. 2.7 Ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem. Jego prędkość w chwili $t_1 = 5$ s jest równa $v_1 = 3$ m/s, a w chwili $t_2 = 6$ s jest równa zero. Oblicz prędkość v_0 ciała w chwili $t = 0$ i drogę s , przebytą przez ciało w czasie od $t = 0$ do $t = t_2$. *Odp.* $v = 18$ m/s, $s = 54$ m.

Zad. 2.8 Sprinter może biec z prędkością $v_s = 36$ km/h. Zakładając, że jego przyspieszenie a jest stałe, i że osiąga on tę prędkość w ciągu $t_1 = 2$ s obliczyć, jaki dystans przebędzie on w ciągu $t_2 = 10$ s. Uwaga. Rozwiązać to zadanie dwiema metodami: wykonując odpowiednie obliczenia oraz sporządzając wykres funkcji $v = v(t)$ i znajdując pole pod otrzymaną krzywą.

Zad. 2.9 Ciało, które porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym, przebywa w czasie $t = 8$ s drogę $s = 180$ m i ma na końcu tego odcinka drogi prędkość $v_k = 5$ m/s. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 i przyspieszenie ruchu ciała. *Odp.* $v_0 = 40$ m/s, $a = -4,37$ m/s².

Zad. 2.10 Od jadącego pociągu odczepił się ostatni wagon. Pociąg nadal jedzie z tą samą prędkością. Jaka jest względna droga s/s_1 przebyta przez pociąg i wagon do chwili zatrzymania się wagonu? Zakładamy, że wagon porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. *Odp.* $s/s_1 = 2$.

Zad. 2.11 Ciało poruszające się ze stałym przyspieszeniem przebywa kolejno dwa jednakowe odcinki drogi $s = 10$ m. Znaleźć przyspieszenie ciała a oraz jego prędkość v_0 na początku pierwszego odcinka, jeżeli pierwszy odcinek ciało przebywa w czasie $t_1 = 1,06$ s, a drugi – w czasie $t_2 = 2,2$ s? *Odp.* $a = -3$ m/s², $v_0 \approx 11$ m/s.

Zad. 2.12 Ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym, w czwartej sekundzie od początku ruchu przebywa drogę równą $s = 35$ m. Z jakim przyspieszeniem porusza się ciało? Wyznaczyć prędkość ciała w końcu czwartej i dziesiątej sekundy ruchu. Jaką drogę przebywa ciało w ciągu drugiej i piątej sekundy? Jaką drogę przebędzie ciało w ciągu drugiej i trzeciej sekundy? *Odp.* $a = 10$ m/s², $v_4 = 40$ m/s, $v_{10} = 100$ m/s, $s_2 - s_1 = 15$ m, $s_5 - s_4 = 45$ m, $s_3 - s_2 = 25$ m.

Zad. 2.13 Elektron poruszający się z prędkością $4,0 \times 10^6$ m/s w prawo wpada w przestrzeń pomiędzy dwiema pionowymi, równoległymi, naładowanymi elektrycznie płytkami metalowymi odległymi od siebie o $d = 2$ cm. W obszarze tym elektron porusza się ze stałym przyspieszeniem $a = 7,9 \times 10^{14}$ m/s² skierowanym w prawo. Z jaką prędkością elektron uderzy w prawą płytkę? Ile czasu upłynie do momentu uderzenia? Załóżmy teraz, że zmieniono bieguny baterii, do której podłączone są płytki. Elektron ponownie wpada w obszar między nimi z lewej strony z tą samą prędkością, co uprzednio. Jego stałe przyspieszenie równe $7,9 \times 10^{14}$ m/s². Na jaką odległość od lewej płytki odleci elektron zanim zostanie zawrócony? Po jakim czasie elektron powróci do lewej płytki? Naskicuj zależność położenia x elektronu od czasu dla obu przypadków.

Zad. 2.14 Ciało puszczone swobodnie w próżni z wysokości h . Naskicować zależność h od czasu t . Znaleźć średnią prędkość ciała podczas spadania. Dla uproszczenia przyjmij $g = 10$ m/s².

Zad. 2.15 Ciało zostało wyrzucone pionowo w górę z prędkością początkową $v_0 = 30$ m/s. Na jaką wysokość wzniesie się ono po czasie $t_1 = 4$ s? Jaka będzie jego prędkość w tym momencie? Jaką maksymalną wysokość osiągnie? Po jakim czasie t_2 powróci na ziemię? Z jaką prędkością uderzy o ziemię? Narysować zależność położenia y , drogi s oraz prędkości v_y od czasu. Dla uproszczenia przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10$ m/s².

Zad. 2.16 Ciało spadające swobodnie bez prędkości początkowej przebyło w ciągu ostatniej sekundy ruchu $3/4$ całej drogi. Ile czasu spadało ciało? *Odp.* $t = 2t_1 = 2$ s

Zad. 2.17 Ciało zostało rzucone pionowo do góry z wysokości H z prędkością początkową v_0 . Jednocześnie z powierzchni Ziemi rzucono do góry drugie ciało z prędkością początkową v'_0 . Po jakim czasie oba ciała spotkają się? *Odp.* $t = H/v'_0 - v_0$.

Zad. 2.18 Kamień spada z wieży. W chwili, gdy przebył on drogę równą l , z punktu położonego o wysokość h poniżej wierzchołka wieży zaczął spadać drugi kamień. Oba kamienie docierają do Ziemi w tym samym momencie. Wykazać, że wysokość wieży jest równa $H = \frac{(l+h)^2}{4l}$.

Zad. 2.19 Ciało spada swobodnie z wysokości $h = 10$ m. W tej samej chwili drugi kamień rzucono z wysokości $H = 20$ m pionowo w dół. Oba kamienie dotarły jednocześnie na Ziemię. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 drugiego kamienia. *Odp.* $v_0 = 7$ m/s.

Zad. 2.20 Dwa ciała zostały rzucone pionowo do góry z jednego punktu z tą samą prędkością początkową $v_0 = 30 \text{ m/s}$ w odstępie czasu $\Delta t = 0,5 \text{ s}$. Po jakim czasie (licząc od chwili wyrzucenia pierwszego ciała) i na jakiej wysokości spotkają się? Przyjąć $g = 10 \text{ m/s}^2$. *Odp.* $t = 3,25 \text{ s}$, $h \approx 44,7 \text{ m}$.

Zad. 2.21 Dwa kamienie spadają do szybu. Drugi kamień zaczął spadać o 1 s później niż pierwszy. Wyznaczyć ruch jednego kamienia względem drugiego. *Odp.* Względne przyspieszenie jest równe zeru, względny ruch kamieni jest jednostajny, z prędkością liczbowo równą g .

Zad. 2.22 Z wieży rzucono jednocześnie dwa ciała z jednakową prędkością początkową v_0 – jedno pionowo do góry, drugie pionowo w dół. Jak z upływem czasu zmienia się odległość między tymi ciałami? *Odp.* $s = 2v_0 t$.

Zad. 2.23 Cząstka porusza się wzdłuż osi x w taki sposób, że jej położenie jako funkcję czasu opisuje formuła $x(t) = 3 - 4t^2 \text{ [m]}$. Obliczyć prędkość i przyspieszenie tej cząstki w chwilach $t = 3 \text{ s}$ oraz $t = 5 \text{ s}$.

Zad. 2.24 Położenie cząstki na osi x opisuje funkcja $x(t) = 3t + 5t^3$ (x w metrach, t w sekundach). Jakie są wymiary stałych występujących w tym wzorze? Obliczyć przybliżoną wartość prędkości chwilowej cząstki w chwili $t = 5 \text{ s}$ obliczając jej prędkość średnią pomiędzy $t = 4$ i 5 s . Obliczyć dokładną wartość prędkości chwilowej w chwili $t = 5 \text{ s}$.

Zad. 2.25 Podane niżej wzory opisują położenie x cząstki w funkcji czasu t (A, B, C, D – stałe):

$$x = At^3, \quad x = A \cos Bt, \quad x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3.$$

Obliczyć prędkość i przyspieszenie cząstki jako funkcje czasu. Przedyskutować wymiary stałych występujących we wzorach.

Zad. 2.26 W czasie jazdy próbnej prototyp samochodu poruszał się w taki sposób, że pomiędzy startem a 18 sekundą ruchu jego położenie na torze można było opisać w przybliżeniu formułą $s = 5t^2 + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{50t^4}$ (t w sekundach, s w metrach). Ile wynosiła maksymalna prędkość oraz maksymalne przyspieszenie i kiedy samochód je osiągnął?

Zad. 2.27 Odległość do najbliższej gwiazdy, *Proxima Centauri*, jest równa $4,22$ lat świetlnych. Obliczyć czas podróży z Ziemi na tę gwiazdę, gdyby pojazd kosmiczny poruszał się w sposób następujący: po starcie z Ziemi pojazd porusza się z przyspieszeniem $0,01g$ do momentu osiągnięcia prędkości równej $0,1$ prędkości światła, następnie podróżuje z tą prędkością ruchem jednostajnym, a w końcu ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem $0,01g$ tak, by osiąść na powierzchni gwiazdy z prędkością równą zeru

Zad. 2.28 Kometa porusza się ku Słońcu po linii prostej z prędkością daną wzorem $v = -\sqrt{c + \frac{b}{x}}$, gdzie x jest położeniem komety mierzonym od środka Słońca (c i b stałe). Obliczyć przyspieszenie $a(x)$ komety. *Odp.* $a = -\frac{b}{2x^2}$. *Wskazówka:* Zauważyć, że w treści zadania prędkość jest złożoną funkcją czasu $v = v(x(t))$ i wykorzystać ten fakt do obliczenia $a = \frac{dv}{dt}$.

Zad. 2.29 Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi x opisuje funkcja czasu $x(t) = At^2 - Bt^4$ m. Cząstka rozpoczęła ruch w chwili $t_0 = 0$ z przyspieszeniem początkowym $a_0 = 4 \text{ m/s}^2$, a w chwili $t_1 = 1 \text{ s}$ jej przyspieszenie było równe $a_1 = -8 \text{ m/s}^2$. Obliczyć wartość stałych A i B . Jaki jest wymiar każdej z nich? Obliczyć prędkość średnią cząstki w ciągu pierwszej sekundy ruchu, tzn. między t_0 oraz t_1 . Obliczyć przyspieszenie średnie cząstki w ciągu drugiej sekundy ruchu, tzn. między t_1 oraz t_2 . Obliczyć całkowitą drogę przebytą przez cząstkę w ciągu pierwszych trzech sekund ruchu, tzn. od chwili t_0 do $t_3 = 3 \text{ s}$.

Zad. 2.30 Prędkość i położenie cząstki związane są formułą $v = A/x$, gdzie $A = \text{const}$. Wyznaczyć tę stałą oraz prędkość cząstki w chwili $t = 4 \text{ s}$, jeżeli w chwili $t = 0 \text{ s}$ $v_0 = 0,6 \text{ m/s}$ oraz $x_0 = 5 \text{ m/s}$. *Odpr.* $v(t) = \frac{A}{\sqrt{2At+x_0^2}}$, $A = 3 \text{ m}^2/\text{s}$, $v(t = 4 \text{ s}) = 3/7 \text{ m/s}$.

Zad. 2.31 Ciało porusza się z przyspieszeniem $a = -bv \text{ m/s}^2$, $b = \text{const}$. W chwili $t = 0$ ciało znajdowało się w położeniu $x = 0$ i poruszało się z prędkością $v_0 = 1 \text{ m/s}$. Obliczyć prędkość i położenie ciała w funkcji czasu oraz wartość stałej b , jeśli prędkość w chwili $t = 10 \text{ s}$ wynosiła $v = v_0/e$.

Zad. 2.32 Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po linii prostej wynosi $a = k^2 e^{-kt}$. Obliczyć $v(t)$, oraz $x(t)$, jeżeli dla $t = 0$ $v = v_0$ oraz $x = 0$. $k = \text{const}$.

Zad. 2.33 Przyspieszenie punktu materialnego poruszającego się po linii prostej wynosi $a = \omega^2 \sin \omega t$. Obliczyć $v(t)$ oraz $x(t)$ jeżeli w chwili $t = 0$ $v = 0$ oraz $x = x_0$. $\omega = \text{const}$.

Zad. 2.34 Prędkość cząstki w ruchu prostoliniowym dana jest formułą $v = 100 - t^2 \text{ m/s}$. W chwili $t = 2 \text{ s}$ jej położenie liczone od pewnego punktu wynosi $x_0 = 200 \text{ m}$. Jakie jest położenie i przyspieszenie cząstki w chwili $t = 5 \text{ s}$?

Zad. 2.35 W trakcie prób samochód porusza się w przedziale czasu od $t = 2 \text{ s}$ do $t = 5 \text{ s}$ z przyspieszeniem $a = 2t \text{ m/s}^2$. W chwili $t = 2 \text{ s}$ jego prędkość jest równa 150 km/h . Jaka jest jego prędkość w chwili $t = 4 \text{ s}$? Jaką drogę przebywa w przedziale czasu od $t = 2 \text{ s}$ do 5 s ?

Zad. 2.36 Cząstka spoczywająca w chwili początkowej $t = 0$ w początku układu współrzędnych zaczyna poruszać się ruchem prostoliniowym z prędkością, która zależy od czasu w sposób następujący: $v(t) = 4 \text{ m/s}$ dla $0 \leq t < 5 \text{ s}$, $v(t) = [20 - 2(t - 5)] \text{ m/s}$ dla $5 \leq t < 10 \text{ s}$, $v(t) = 10 \text{ m/s}$ dla $t \geq 10 \text{ s}$. Obliczyć przyspieszenie cząstki jako funkcję czasu. Znaleźć położenie cząstki w chwilach $t = 3, 8$ oraz 13 s .

Zad. 2.37 Pokazać, że jeżeli przyspieszenie jest daną funkcją prędkości $a = a(v)$, to:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^t dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{v dv}{a(v)} = \int_{x_0}^x dx.$$

Zad. 2.38 Pokazać, że jeżeli przyspieszenie jest daną funkcją położenia $a = a(x)$, to:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)} = \int_{t_0}^t dt; \quad \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a(x) dx.$$

Zad. 2.39 Przyspieszenie punktu materialnego jest dane wzorem $a = 3x \text{ m/s}^2$, gdzie x oznacza położenie punktu. Obliczyć prędkość punktu gdy znajduje się on w położeniu $x = 3 \text{ m}$, jeżeli w chwili $t = 0$ $v_0 = 4 \text{ m/s}$ oraz $x_0 = 0$.

Zad. 2.40 Przyspieszenie grawitacyjne Ziemi jest skierowane ku jej środkowi, a wartość jego dana jest wzorem $a = \frac{gR^2}{r^2}$, w którym R oznacza promień Ziemi, r odległość od jej środka, g przyspieszenie na powierzchni Ziemi. Jaką prędkość v_0 w kierunku od środka Ziemi należy nadać pojazdowi kosmicznemu znajdującemu się w punkcie $r = r_0$, aby przenieść go do punktu $r = h$? Obliczyć tę prędkość dla $r_0 = R$ oraz $h \rightarrow \infty$. Jak można zinterpretować ten wynik?

Zad. 2.41 Prędkość i położenie cząstki związane są formułą $v^2 = A/x \text{ m}^2/\text{s}^2$, gdzie $A = \text{const.}$. Wyznaczyć tę stałą oraz prędkość cząstki w chwili $t = 2 \text{ s}$, jeżeli w chwili $t = 0$ $v_0 = 5 \text{ m/s}$ oraz $x_0 = 5 \text{ m}$. Odp. $v(t) = \sqrt{A} \left(\frac{3}{2} \sqrt{A} t + x_0^{3/2} \right)^{-1/3}$, $A = 125 \text{ m}^3/\text{s}^2$, $v(t = 2 \text{ s}) = 500^{1/3} \text{ m/s}$.

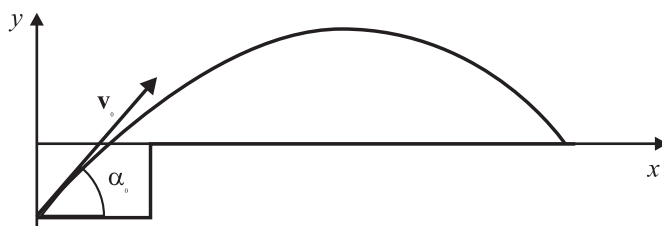
Zad. 2.42 Po włączeniu hamulców pojazd porusza się z opóźnieniem $a = 0,002v^2 \text{ m/s}$ (v oznacza prędkość pojazdu). W ciągu jakiego czasu prędkość pojazdu zmaleje od 180 km/godz do 10 m/s i jaki dystans przebędzie pojazd w tym czasie?

Zad. 2.43 Do tunelu przewierconego przez kulę ziemską i przechodzącego przez jej środek wrzucano kamień. Przyspieszenie grawitacyjne wewnątrz Ziemi jest dane wzorem $a = -\frac{gr}{R}$, gdzie r jest odległością mierzoną od środka Ziemi, R – promieniem Ziemi, g – przyspieszeniem grawitacyjnym na jej powierzchni. Pomijając wszelkie ewentualne opory występujące podczas ruchu, obliczyć prędkość ciała, gdy doleci ono do środka Ziemi.

Zad. 2.44 Metalowa kulka upuszczona na powierzchni oceanu dociera do jego dna po 64 minutach . Zakładając, że przyspieszenie kulki w wodzie opisuje w przybliżeniu formuła $a = 0,9g - 3v \text{ m/s}^2$ obliczyć głębokość oceanu.

3 Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Zad. 3.1 Z dołu o głębokości h wyrzucono kamień pod kątem α_0 do poziomu, nadając mu prędkość v_0 . Znaleźć zależność przyspieszenia $\mathbf{a}(t)$, prędkości $\mathbf{v}(t)$ oraz położenia $\mathbf{r}(t)$ w układzie współrzędnych przedstawionym na rys. 5. *Odp.* $\mathbf{a}(t) = -g \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v}(t) = v_0 \cos \alpha_0 \hat{\mathbf{x}} + (v_0 \sin \alpha_0 - gt) \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{r}(t) = v_0 t \cos \alpha_0 \hat{\mathbf{x}} + \left(-h + v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}\right) \hat{\mathbf{y}}$.



Rys. 5:

Zad. 3.2 Ciało zostało wyrzucone pod kątem α_0 do poziomu z prędkością początkową v_0 z punktu o współrzędnych (x_0, y_0) . Znaleźć równanie toru $y = y(x)$.

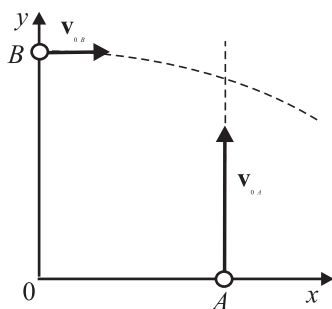
Zad. 3.3 Ciało zostało rzucone z prędkością v_0 pod kątem α_0 do poziomu. Znaleźć y_{max} – największą wysokość, na jaką wzniosło się ciało i x_{max} – zasięg rzutu.

Zad. 3.4 Dwa ciała A i B spadają z wysokości H bez prędkości początkowej. Ciało B natrafia na swej drodze na umocowaną platformę, nachyloną pod kątem 45° do poziomu. W wyniku sprężystego odbicia od platformy kierunek prędkości ciała staje się poziomy. Miejsce uderzenia w platformę znajduje się na wysokości h . Porównaj czasy spadania T_A oraz T_B wymienionych ciał. Na jakiej wysokości należy umieścić platformę, aby najbardziej efektywnie spowalniała spadanie ciała? *Odp.* $T_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, $T_B = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $h = \frac{1}{2}H$.

Zad. 3.5 Ciało spada z wysokości H bez prędkości początkowej. Na wysokości h uderza sprężystość w umocowaną platformę, ustawioną pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Znajdź czas T spadania i zasięg lotu. *Odp.* $T = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{H+3h}{2g}}$.

Zad. 3.6 Ciało A rzucono pionowo do góry z prędkością $v_{0A} = 20 \text{ m/s}$ (rys. 6). Na jakiej wysokości H wyrzucono w kierunku poziomym ciało B z prędkością $v_{0B} = 4 \text{ m/s}$ jednocześnie z ciałem A , jeżeli ciała zderzyły się w locie? Odległość mierzona wzdłuż prostej poziomej między położeniami początkowymi ciał jest równa $l = 4 \text{ m}$. Znaleźć także czas T ruchu ciał do momentu zderzenia oraz prędkość każdego z nich w chwili zderzenia. *Odp.* $H = \frac{v_{0A}}{v_{0B}}l = 20 \text{ m}$, $T = \frac{l}{v_{0B}} = 1 \text{ s}$, $v_A = |v_{0A} - gT| \approx 10 \text{ m/s}$, $v_B = \sqrt{v_{0B}^2 + (gT)^2} \approx 10,6 \text{ m/s}$.

Zad. 3.7 Z punktów A i B , znajdujących się na wysokościach odpowiednio $h_A = 2 \text{ m}$ oraz $h_B = 6 \text{ m}$, jednocześnie rzucono naprzeciwko siebie dwa ciała: jedno poziomo z prędkością



Rys. 6:

$v_{0A} = 8 \text{ m/s}$, drugie ku dołowi pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu z taką prędkością początkową, aby obydwa ciała zderzyły się w locie. Odległość pomiędzy punktami A i B mierzona wzdłuż prostej poziomej jest równa $l = 8 \text{ m}$. Obliczyć prędkość początkową v_{0B} ciała rzuconego pod kątem α do poziomu, czas T ruchu ciał do chwili zderzenia, prędkości v_A i v_B obu ciał w chwili zderzenia, współrzędne (x, y) punktu zderzenia w układzie współrzędnych o początku umieszczonym na wysokości „zerowej” pod punktem A . Tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie.
Odp. $v_{0B} = \sqrt{2}v_{0A}\frac{h_B-h_A}{l-h_B+h_A} = 11,3 \text{ m/s}$, $T = \frac{l-h_B+h_A}{v_{0A}} = 0,5 \text{ s}$, $v_A = \sqrt{v_{0A}^2 + (gT)^2} = 9,4 \text{ m/s}$,
 $v_B = \sqrt{\frac{1}{2}v_{0B}^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_{0B} + gT\right)^2} = 15,2 \text{ m/s}$, $x = v_{0A}T = 4 \text{ m}$, $y = h_A - \frac{1}{2}gT^2 = 0,8 \text{ m}$.

Zad. 3.8 Z jednego punktu rzucono pod kątami α_1 oraz α_2 do poziomu dwa ciała z początkowymi prędkościami odpowiednio v_1 oraz v_2 . Znaleźć zależność wzajemnej odległości l obu ciał w funkcji czasu t . Rozpatrzyć dwie sytuacje: (a) tory ciał leżą w jednej płaszczyźnie, przy czym ciała rzucono w przeciwne strony; (b) tory ciał leżą w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych.
Odp. (a) $l = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$, (b) $l = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$.

Zad. 3.9 Chłopiec o wzroście $h = 1,5 \text{ m}$, stojąc w odległości $l = 15 \text{ m}$ od płotu o wysokości $H = 5 \text{ m}$, rzucił kamień pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. Z jaką minimalną prędkością v_0 powinien rzucić kamień, aby przeleciał przez płot? *Odp.* $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(l\tan\alpha - H + h)}} \approx 13,8 \text{ m/s}$.

Zad. 3.10 Z wieży o wysokości $H = 3,48 \text{ m}$ pod kątem $\alpha_1 = 30^\circ$ do poziomu rzucono ku dołowi kamień z prędkością v_1 . Jednocześnie z powierzchni Ziemi pod kątem $\alpha_2 = 30^\circ$ do poziomu rzucono w stronę pierwszego drugi kamień z prędkością v_2 . W jakiej odległości L od podstawy wieży znajduje się miejsce wyrzucenia drugiego kamienia, jeżeli obydwa kamienie zderzyły się w powietrzu?

Zad. 3.11 Piłkę rzucono pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu z prędkością początkową $v_0 = 14 \text{ m/s}$. W odległości $l = 11 \text{ m}$ od punktu wyrzucenia piłka sprężyście uderzyła w pionową ścianę. W jakiej odległości d od ściany piłka upadnie na ziemię? *Odp.* $d = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \approx 6 \text{ m}$.

Zad. 3.12 Ciało rzucono z wysokości $H = 19,6 \text{ m}$ poziomo z prędkością $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Ciało sprężyście uderzyło w ziemię, a następnie w pionową ścianę, znajdującą się w odległości $l = 40 \text{ m}$ od miejsca wyrzucenia, mierzonej w kierunku poziomym. Obliczyć maksymalną wysokość h , na którą wzniesie się ciało po uderzeniu w ścianę. W jakiej odległości d od ściany ciało upadnie na ziemię? *Odp.* $h = H = 19,6 \text{ m}$, $d = 3v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} - l = 20 \text{ m}$,

Zad. 3.13 Bombowiec nurkuje po prostej pod kątem α do poziomu z prędkością v_0 . Jeżeli pilot chce zrzucić bombę na wysokości H i trafić dokładnie w cel, to w jakiej odległości od celu powinien to zrobić? *Odp.* $s = \frac{v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH - v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}}{g}$.

Zad. 3.14 Z jaką prędkością początkową v_0 powinna zostać wystrzelona rakietka sygnalizacyjna z raketnicy ustawionej pod kątem 45° do horyzontu, aby eksplodowała w najwyższym punkcie toru ruchu, jeżeli czas spalania zapłonu wynosi $t_0 = 6$ s. *Odp.* $v_0 = \frac{gt_0}{\sin \alpha} = 82$ m/s.

Zad. 3.15 Na jaką maksymalną odległość l można rzucić piłkę w sali gimnastycznej o wysokości 8 m, jeżeli piłka ma prędkość początkową $v_0 = 20$ m/s. Jaki kąt α powinien w tym przypadku tworzyć wektor prędkości początkowej z poziomem? Założyć, że wysokość początkowa toru ruchu jest zanedbywalnie mała w porównaniu z wysokością sali. Piłka w ruchu nie może dotknąć sufitu. *Odp.* $l = 40$ m, $\alpha = 38^\circ 40'$.

Zad. 3.16 Na wzgórzu znajduje się cel widoczny pod kątem $\alpha = 10^\circ$ powyżej poziomu z miejsca stacjonowania baterii artylerii. Odległość w kierunku poziomym od baterii do celu wynosi $d = 2$ km. Do celu żołnierze strzelają przy kącie podniesienia lufy $\beta = 30^\circ$. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 pocisku trafiającego w cel. Nie uwzględniać oporu powietrza na ruch rakiety. *Odp.* $v = \sqrt{\frac{dg \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin(\alpha - \beta)}} \approx 180$ m/s.

Zad. 3.17 Kamień rzucono poziomo z wierzchołka góry nachylonej pod kątem α do poziomu. Wyznaczyć jaką była prędkość początkowa kamienia, jeżeli spada on na zbocze góry w odległości l od wierzchołka. *Odp.* $v_0 = \sqrt{\frac{gl \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}}$.

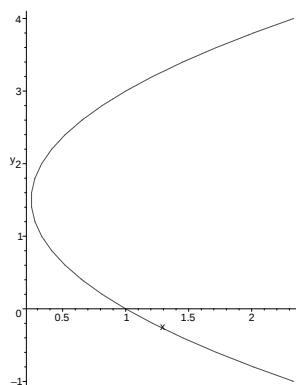
Zad. 3.18 Z równi pochyłej nachylonej pod kątem β do poziomu rzucono kamień z prędkością początkową v_0 prostopadłe do równi. W jakiej odległości od punktu wyrzucenia upadnie ten kamień na równię? *Odp.* $l = 2v_0^2 \frac{\sin \beta}{g \cos^2 \beta}$.

Zad. 3.19 Położenie cząstki obserwowanej z pewnego układu współrzędnych opisuje wektor $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 5)\hat{\mathbf{x}} + 2t^3\hat{\mathbf{z}}$, gdzie czas liczony jest w sekundach, położenie – w metrach. Jakie jest jej przyspieszenie w chwili, gdy porusza się ona równolegle do wektora $\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$?

Zad. 3.20 Ruch punktu materialnego w pewnym układzie współrzędnych opisuje wektor wodzący $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4t)\hat{\mathbf{x}} + (t^3 - 12t - 5)\hat{\mathbf{y}} + (2t^2 - 8t + 1)\hat{\mathbf{z}}$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Obliczyć położenie $\mathbf{r}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}$ punktu w chwili t , dla której prędkość punktu jest równa zeru.

Zad. 3.21 Położenie cząsteczki w pewnym układzie współrzędnych opisuje wektor $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, -t^4 + 2t^2)$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Znaleźć równanie toru ruchu cząsteczki oraz wektor prędkości i przyspieszenia w punktach $(0, 1)$, $(-1, 0)$ oraz $(1, 0)$ m. *Odp.* $y = x^2 + 1$ m, dla $\mathbf{r} = (0, 1)$ m: $\mathbf{v} = (-2, 0)$ m/s lub $(2, 0)$ m/s, $\mathbf{a} = (2, -8)$ m/s², dla $\mathbf{r} = (-1, 0)$ m: $\mathbf{v} = (0, 0)$ [m/s], $\mathbf{a} = (2, 4)$ m/s², dla $\mathbf{r} = (1, 0)$ m: $\mathbf{v} = (-2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ m/s lub $(2\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ m/s $\mathbf{a} = (2, -20)$ m/s².

Zad. 3.22 Współrzędne punktu materialnego w pewnym układzie współrzędnych opisywane są przez wektor $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1, \frac{1}{2}t^2)$, gdzie czas mierzony jest w sekundach, położenie w metrach. Znaleźć równanie toru ruchu punktu. W jakiej chwili t przyspieszenie osiągnie minimalną wartość? Czy wektor przyspieszenia będzie w tym momencie styczny do toru ruchu i wektora prędkości? *Odp.* Tor ruchu będzie parabolą o równaniu $x = \frac{1}{3}y^2 - y + 1$ (rys. 7), $t = \pm 1$ s, $a = 1 \text{ m/s}^2$, $\mathbf{a} = (0, 1) \text{ m/s}^2$, $\mathbf{v} = (\frac{2}{3}, -1) \text{ m/s}$ oraz $(-\frac{2}{3}, 1) \text{ m/s}$, zatem kierunki wektorów prędkości i przyspieszenia są różne, wektor prędkości jest zawsze styczny do toru ruchu.



Rys. 7: $x = \frac{1}{3}y^2 - y + 1$

Zad. 3.23 Wektor opisujący w pewnym układzie współrzędnych położenie poruszającej się cząstki zależy od czasu w sposób następujący:

$$\mathbf{r}(t) = 2t^2\hat{\mathbf{y}} + (4t^4 + 2)\hat{\mathbf{z}}.$$

Napisać równanie przedstawiające tor cząstki we współrzędnych kartezjańskich. Jaką krzywą opisuje to równanie?

Zad. 3.24 Znaleźć związek między składowymi v_x i v_y prędkości cząstki poruszającej się po torze opisanym równaniem $y = Ax^2$, gdzie A jest stałą. *Odp.* $v_y = \frac{1}{2A}v_x$.

Zad. 3.25 Współrzędne cząsteczki w danym układzie współrzędnych opisywane są przez wektor $\mathbf{r}(t) = (0, 1)e^t + (1, 0)t^3 + (-1, 0)t + (1, 0)$, gdzie czas liczony jest w sekundach, położenie – w metrach. W jakim momencie t wektory prędkości i przyspieszenia będą równoległe i antyrównoległe do siebie. Znaleźć położenie cząsteczki w tych chwilach. *Odp.* Wektory będą równoległe w chwili $t_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ s, $\mathbf{r} = \left(\left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{4}{3} \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\right), e^{1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}} \right) \text{ m}$, antyrównoległe – $t_{1,2} = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ s, $\mathbf{r}(t) = \left(\left(-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{4}{3} \mp \frac{4}{\sqrt{3}}\right), e^{-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}} \right) \text{ m}$.

Zad. 3.26 Położenia dwóch poruszających się punktów materialnych obserwowanych z pewnego układu współrzędnych opisują wektory wodzące:

$$\mathbf{r}_1(t) = (0, 2, 0) + (4, 2, 1)t + (2, 1, 0)t^2,$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (1, 1, 1)t^2 + (1, 2, 2),$$

gdzie położenie mierzone jest w metrach, czas — w sekundach. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktu drugiego względem pierwszego.

Zad. 3.27 Równania ruchu dwóch ciał obserwowanych z pewnego układu współrzędnych wyglądają następująco:

$$\mathbf{r}_1(t) = (t^2 + 3, t^2 + t + 2, t),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (t + 1, 2t, 1).$$

Znaleźć prędkość $\mathbf{v}_{2,1}$ punktu drugiego względem pierwszego oraz przyspieszenie $\mathbf{a}_{2,1}$ punktu drugiego względem pierwszego.

Zad. 3.28 Zbadać ruch punktu materialnego (tor, prędkość, przyspieszenie), którego wektor wodzący jest określony wzorem $\mathbf{r}(t) = A \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + A \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}$, gdzie $A = 6 \text{ m}$, $\omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$. W jakich chwilach t wektor prędkości i przyspieszenia jest równoległy do osi układu współrzędnych? *Odp.* Ruch odbywa się po okręgu $x^2 + y^2 = 36 \text{ m}$, $\mathbf{v} = \frac{3\pi}{2} (-\sin \frac{\pi}{4} t \hat{\mathbf{x}} + \cos \frac{\pi}{4} t \hat{\mathbf{y}}) \text{ m/s}$, $\mathbf{a} = \frac{3\pi^2}{8} (-\cos \frac{\pi}{4} t \hat{\mathbf{x}} - \sin \frac{\pi}{4} t \hat{\mathbf{y}}) \text{ m/s}^2$. Wektor prędkości jest równoległy do osi x w chwilach $t = 2 + 4n \text{ s}$, do osi y dla $t = 0 + 4n \text{ s}$. Wektor przyspieszenia jest równoległy do osi x w chwilach $t = 0 + 4n \text{ s}$, do osi y dla $t = 2 + 4n \text{ s}$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Zad. 3.29 Równania ruchu punktu mają postać:

$$x = A \cos \omega t,$$

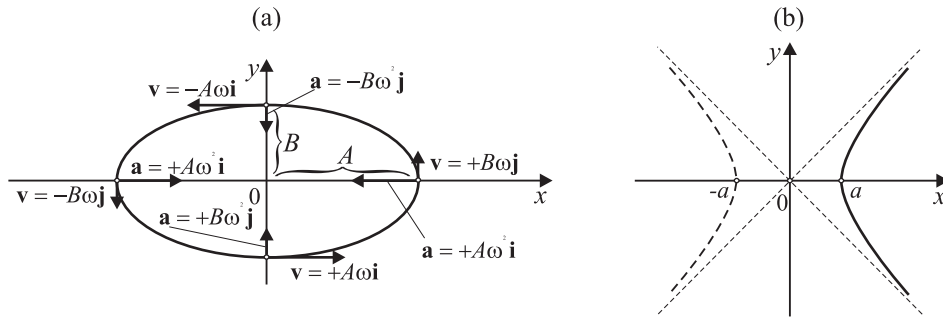
$$y = B \sin \omega t,$$

gdzie A, B, ω są stałe, $A > B$. Wykazać, że torem punktu jest elipsa o półosiach A i B skierowanych wzdłuż osi x i y . Wykazać, że ruch punktu po elipsie jest niejednostajny i określić miejsca największej i najmniejszej prędkości. Obliczyć wektor przyspieszenia (jaki ma kierunek oraz zwrot?) oraz określić położenia punktów, w których jego przyspieszenie ma największą i najmniejszą wartość. *Odp.* Tor ruchu opisuje równanie elipsy $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ o półosiach A i B , przy czym osie współrzędnych leżą wzdłuż osi elipsy. Ponieważ $A > B$, elipsa jest wydłużona w kierunku osi x (rys. 8a). $v = \omega \sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t}$. Prędkość ma wartość maksymalną $v_{\max} = A\omega$, gdy faza ruchu równa się 90° oraz 270° i minimalną $v_{\min} = B\omega$, gdy $\omega t = 0$ i 180° ; innymi słowy, gdzie największa krzywizna elipsy – tam najmniejsza prędkość ruchu. $\mathbf{a} = -\omega^2(A \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + B \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}) = -\omega \mathbf{r}(t)$, zatem przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i zawsze skierowane przeciwnie niż $\mathbf{r}$. $a = \omega^2 \sqrt{A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \sin^2 \omega t}$. Punkt osiąga maksymalne przyspieszenie $a_{\max} = \omega^2 A$, gdy faza ruchu wynosi 0 i 180° , minimalne $a_{\min} = B\omega^2$, gdy $\omega t = 90^\circ$ oraz 270° ; zatem w miejscach największej prędkości punktu przyspieszenie jest najmniejsze, zaś w miejscach najmniejszej prędkości przyspieszenie jest największe (rys. 8a).

Zad. 3.30 Ruch punktu opisany jest równaniami:

$$x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}),$$

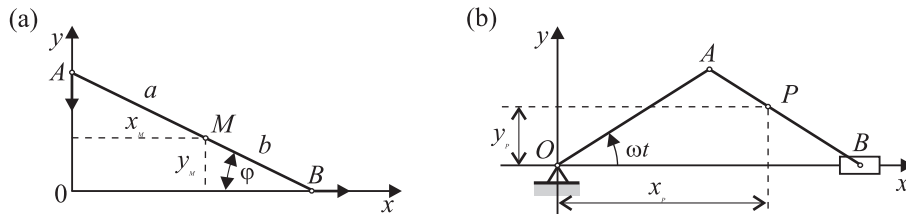
$$y = \frac{a}{2} (e^{kt} - e^{-kt}),$$



Rys. 8:

gdzie a i k są stałe. Znaleźć i narysować tor, po którym punkt się porusza. Napisać prędkość v i przyspieszenie a punktu jako funkcję bezwzględnej wartości wektora wodzącego r punktu. *Odp.* Tor ruchu opisuje równanie hiperboli równoosiowej $x^2 - y^2 = a^2$ o wierzchołkach ai oraz $-ai$ oraz asymptotach $y = x$ i $y = -x$. Z równań ruchu wynika, że punkt porusza się po krzywej, dla której $x > 0$ (rys. 8b). $v = kr$ oraz $a = k^2 r$, zatem wartość prędkości i przyspieszenia rośnie, kiedy punkt oddala się od wierzchołka hiperboli.

Zad. 3.31 Pręt o długości AB porusza się tak, że jego punkty końcowe A i B ześlizgują się po osiach x, y pewnego prostokątnego układu współrzędnych (rys. 9a). Wyznaczyć tor, jaki będzie zakreszał przy tym ruchu dowolnieabrany punkt M pręta. *Odp.* Punkt będzie poruszał się po elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o półosiach a i b leżących wzdłuż osi x i y .



Rys. 9:

Zad. 3.32 Zakładając, że koniec B pręta z poprzedniego zadania porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością v_0 , a w chwili początkowej $t = 0$ pręt tworzy z prowadnicą kąt φ_0 znaleźć ruch punktu M oraz jego prędkość.

Odp. $\mathbf{r}_M(t) = \frac{a}{l} \left((l \cos \varphi_0 + v_0 t) \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{l^2 \sin^2 \varphi_0 - 2v_0 l t \cos \varphi_0 - v_0^2 t^2} \hat{\mathbf{y}} \right),$

$\mathbf{v}_M(t) = \frac{av_0}{l} \left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{l \cos \varphi_0 + v_0 t}{\sqrt{l^2 \sin^2 \varphi_0 - 2v_0 l t \cos \varphi_0 - v_0^2 t^2}} \hat{\mathbf{y}} \right),$ gdzie $l = a + b$ jest długością pręta.

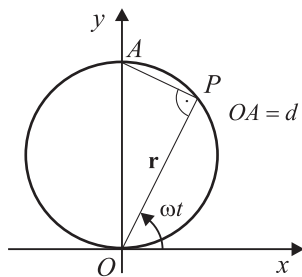
Zad. 3.33 Zakładając, że koniec B pręta z poprzedniego zadania porusza się ze stałym przyspieszeniem $a_0 > 0$ znaleźć ruch punktu M . Przyjąć $x_B(0) = d$ oraz $\dot{x}_B(0) = 0$. *Odp.* $\mathbf{r}_M(t) = \frac{a}{l} \left(d + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{l} \sqrt{l^2 - \left(d + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right)^2} \hat{\mathbf{y}}.$

Zad. 3.34 Zakładając, że punkt M z poprzedniego zadania porusza się zgodnie z równaniem

$$y_M = a_0 t^2,$$

znaleźć zależność x_M od czasu oraz równania ruchu punktu A (rys. 9a). *Odp.* $|t| \leq \sqrt{\frac{b}{a_0}}$, $x_M = a\sqrt{1 - \frac{a_0^2 t^4}{b^2}}$, $\mathbf{r}_A(t) = \frac{l}{b} a_0 t^2 \hat{\mathbf{y}}$.

Zad. 3.35 Układ przedstawiony na rys. 9b składa się z dwóch prętów o jednakowej długości $OA = OB = l$, połączonych przegubowo w punkcie A . Pręt OA obraca się dookoła nieruchomego punktu O z prędkością kątową ω , natomiast punkt B może poruszać się po prostej poziomej pokrywającej się z osią x . Wyznaczyć równanie ruchu oraz toru ruchu punktu P leżącego na przecięciu AB , odległego o βl od punktu A , gdzie $0 \leq \beta \leq 1$. *Odp.* $\mathbf{r} = l(1 + \beta) \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + l(1 - \beta) \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}$, $\frac{x^2}{l^2(1+\beta)^2} + \frac{y^2}{l^2(1-\beta)^2} = 1$, zatem punkt będzie poruszał się po elipsie, której osie główne będą pokrywały się z osiami współrzędnych.



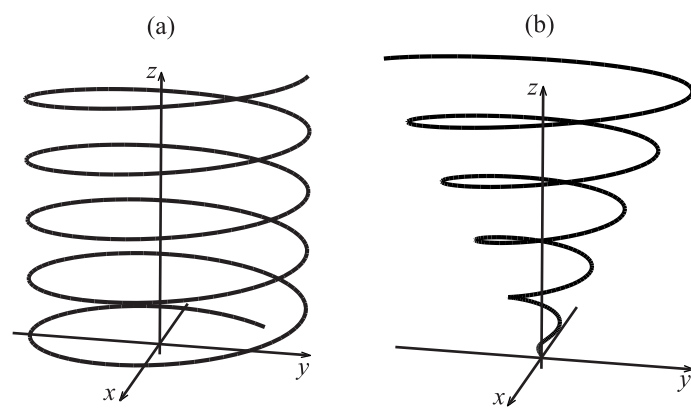
Rys. 10:

Zad. 3.36 Po torze kołowym o średnicy $d = 1$ m porusza się punkt P w ten sposób, że wektor położenia $\mathbf{r}$ obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega = \pi$ rad/s. Początek wektora $\mathbf{r}$ jest jednym z punktów toru (rys. 10). Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu P . *Odp.* $\mathbf{v} = 100\pi(\cos 2\pi t \hat{\mathbf{x}} + \sin 2\pi t \hat{\mathbf{y}})$ m/s, $\mathbf{a} = -200\pi^2(\sin 2\pi t \hat{\mathbf{x}} + \cos 2\pi t \hat{\mathbf{y}})$ m/s.

Zad. 3.37 Zbadać kształt następujących krzywych:

- $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{x}} + t^2\hat{\mathbf{y}}$;
- $\mathbf{r} = \sqrt{t}\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{t - a^2}\hat{\mathbf{y}}$;
- $\mathbf{r} = a \cos t \hat{\mathbf{x}} + b \sin t \hat{\mathbf{y}} + c \hat{\mathbf{z}}$;
- $\mathbf{r} = a(\cos t \hat{\mathbf{x}} + \sin t \hat{\mathbf{y}}) + b \hat{\mathbf{z}}$;
- $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{x}} + f(t)\hat{\mathbf{y}}$;
- $\mathbf{r} = a(\cos t \hat{\mathbf{x}} + \sin t \hat{\mathbf{y}}) + bt \hat{\mathbf{z}}$;
- $\mathbf{r} = a(t \cos t \hat{\mathbf{x}} + t \sin t \hat{\mathbf{y}}) + bt \hat{\mathbf{z}}$.

Odp: a) parabola $y = x^2$; b) hiperbola równoosiowa $x^2 - y^2 = a^2$; c) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ położona na płaszczyźnie $z = c$; d) okrąg $x^2 + y^2 = a^2$ położony na płaszczyźnie $z = b$; e) $y = f(x)$; f) linia śrubowa powstała z przecięcia powierzchni cylindra $x^2 + y^2 = a^2$ i powierzchni śrubowej $\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{b}$ (rys. 11a); g) koniczna linia śrubowa powstała z przecięcia powierzchni stożka $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 = 0$ i powierzchni śrubowej $\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{b}$ (rys. 11b).



Rys. 11: