

Literatura:

- Henryk Głowacki *Mechanika techniczna, statyka i kinematyka*
- Jan Misiak *Mechanika techniczna, tom 1,2*

## Kinematyka

### Prędkość i przyspieszenie w układzie kartezjańskim

1. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + A \sin(\omega t)\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu?

Prędkość jest zawsze styczna do toru. Zatem przyspieszenie styczne  $a_t$  to rzut prostopadły wektora przyspieszenia na kierunek wektora prędkości, a przyspieszenie normalne  $a_n$  to różnica przyspieszenia i jego składowej stycznej.

Dla ruchu po okręgu mamy  $a_n = \frac{v^2}{r}$ . Dla ruchu po dowolnym torze promień krzywizny może się zmieniać od punktu do punktu i można go wyznaczyć ze wzoru  $t = \frac{v^2}{a_n}$

2. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + B \sin(\omega t)\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla  $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$ .

3. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \cos(\omega t^2)\vec{i} + A \sin(\omega t^2)\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyspieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz promień krzywizny toru w dowolnym punkcie.

4. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \cos^2(\omega t)\vec{i} + B \sin^2(\omega t)\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu?

5. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = v_{0x} \cdot t\vec{i} + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu?

6. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \sin(\omega t)\vec{i} + A \cos(2\omega t)\vec{j}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla  $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$ .

Tor w przestrzeni trójwymiarowej

7. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + A \sin(\omega t)\vec{j} + vt\vec{k}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyspieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz krzywiznę toru w danym punkcie.

8. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać:  $\vec{r} = A \sin(\omega t)\vec{i} + A \sin(2\omega t)\vec{j} + \epsilon \cos(\omega t)\vec{k}$ . Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla  $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$ .

## Współrzędne biegunowe

Współrzędne biegunowe to  $r$  (odległość od środka UW) i  $\phi$  kąt od osi OX do wektora wodzącego punktu. Punkt o współrzędnych biegunowych  $(r, \phi)$  ma współrzędne kartezjańskie  $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ .

Kolejne wektory jednostkowe uzyskujemy biorąc pochodne punktu po kolejnych współrzędnych, które następnie normujemy do jedności.

9. Znajdź bazę wektorów jednostkowych w punkcie  $(r, \phi)$

10. Ile wynosi pochodna wektora jednostkowego  $\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$  po kącie  $\phi$  ?

11. Współrzędne biegunowe punktu są znanymi funkcjami czasu. Jaki jest wzór na wektor prędkości i przyspieszenia.

$$\text{Odp. } a = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi$$

12. Mucha idzie ruchem jednostajnym z prędkością  $v$  po średnicy płyty gramofonowej obracającej się z prędkością kątową  $\omega$ . Jaki jest tor muchy? Jakie siły działają na muchę?

13. Ramię robota o zmiennej długości wykonuje ruch opisany równaniami:

$$r(t) = r_0 - A \cos(\omega t), \quad \phi(t) = \phi_0 - a \sin(\omega t),$$

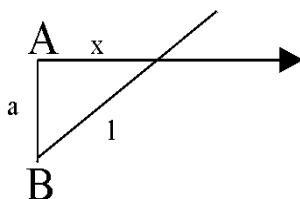
Gdzie  $r_0 = 1.5\text{m}$ ,  $A = 0.5\text{m}$ ,  $\phi = 0.7\text{rad}$ ,  $a=0.3\text{rad}$ ,  $\omega = 2\pi\text{Hz}$ . Obliczyć prędkość końca ramienia we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich w chwili  $t = 0.6\text{s}$ .

14. Dane są równania ruchu punktu:  $r(t) = vt$ ,  $\phi(t) = e^{\Omega t}$ . Wyznacz składowe prędkości i przyspieszenia.

15. Dane są równania ruchu punktu:  $r(t) = Re^{\lambda t}$ ,  $\phi(t) = \Omega t$ . Wyznacz składowe prędkości i przyspieszenia.

16. Oparty o ścianę pręt AB o długości  $l$  ześlizguje się ze stałą prędkością  $v_0$  (mierzoną wzdłuż ściany). Określ tor, jaki będzie zakreślał dowolnie obrany punkt M pręta. W chwili początkowej  $t=0$  koniec A znajdował się na wysokości  $a$  ( $a < l$ ).

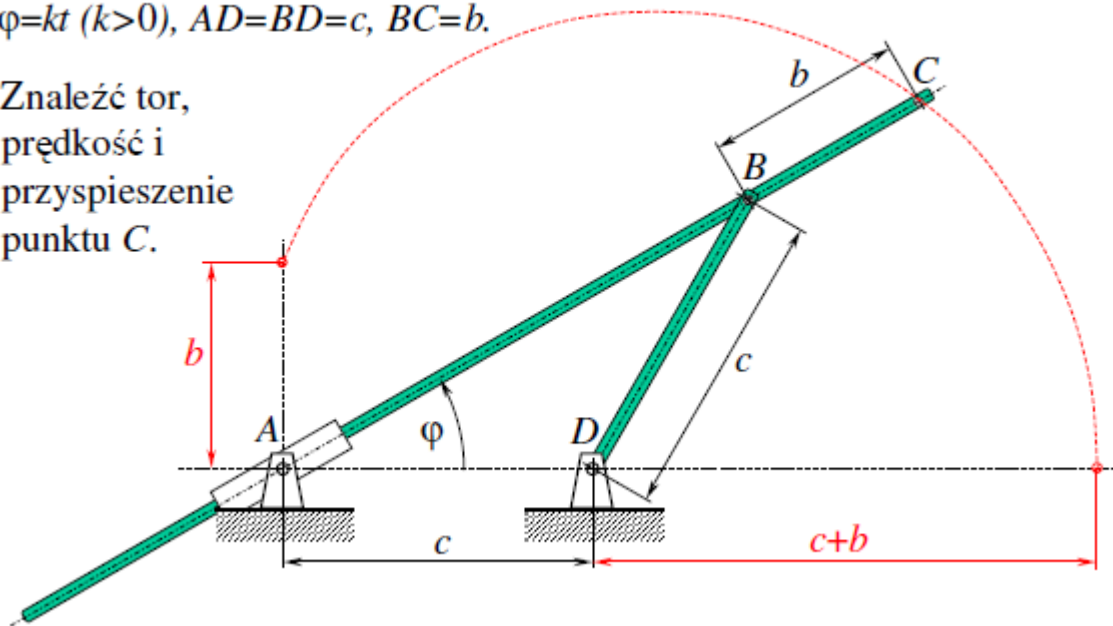
17. Pręt o długości  $l$  obraca się wokół punktu zamocowania B ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Punkt B odległy jest o odcinek  $a$  od prostej  $x$ , przy czym  $a < l$ . Zakładając, że w chwili  $t = 0$  punkt przecięcia pręta z prostą pokrywa się z punktem A, wyznaczyć położenie oraz prędkość i przyspieszenie punktu przecięcia pręta i prostej w funkcji położenia.



Zad. 18

W mechanizmie przedstawionym na rysunku dane są:  
 $\varphi = kt$  ( $k > 0$ ),  $AD = BD = c$ ,  $BC = b$ .

Znaleźć tor,  
 prędkość i  
 przyspieszenie  
 punktu C.



19. Ćma porusza się po krzywej, której długość  $s$  dana jest wzorem  $s = s_0 \exp(ct)$ , gdzie  $s_0, c = \text{const} > 0$ . Wiedząc, że wektor przyspieszenia  $a$  tworzy stały kąt  $\varphi$  ze styczną do toru w każdym punkcie, wyznaczyć wartości:

- prędkości,
- przyspieszenia stycznego,
- przyspieszenia normalnego,
- promienia krzywizny toru w funkcji długości łuku krzywej.

20. *Zadanie Hugona Steinhausa* W rogach kwadratowej łąki siedzą cztery psy. W chwili  $t = 0$  każdy z psów zaczyna gonić swojego sąsiada po prawej stronie ze stałą prędkością  $v$ .

- Wyznacz zależność czasową współrzędnej radialnej
- Po jakim czasie psy się spotkają, jaką drogę przebiegną?
- Wyznacz zależność czasową współrzędnej transwersalnej
- Wyznacz kształt toru psa

21. Znaleźć równania ruchu i określić tor, prędkość i przyspieszenie dla punktu M leżącego na obwodzie koła o promieniu  $R$ , które toczy się bez poślizgu po szynie, jeśli środek koła ma prędkość  $v_0$ .

22. Wyznacz prędkość i przyspieszenie wodzika (tłoku) w mechanizmie korbowym, w którym korba o długości  $r$  obraca się ze stałą prędkością kątową.

23. Zadanie 1.19. Dane są równania ruchu punktu we współrzędnych biegunowych. Znaleźć równanie toru punktu, prędkość, przyspieszenie i promień krzywizny toru.

a)  $r = 2b\cos\omega t, \quad \varphi = \omega t$  dla  $b > 0$  i  $\omega > 0$

b)  $r = k_1 t, \quad \varphi = k_2 t$  dla  $k_1 > 0$  i  $k_2 > 0$

c)  $r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \alpha t$  dla  $\alpha > 0$  i  $r_0 > 0$

d)  $r = ct, \quad \varphi = \frac{b}{t}$  dla  $c > 0$  i  $b > 0$

### Ruch bryły sztywnej wokół ustalonej osi

**Ruch po okręgu** W ruchu po okręgu punkt zachowuje tę samą odległość od osi obrotu, więc ruch opisany jest tylko przez zależność kąta od czasu. W przypadku obracającego się koła, wszystkie punkty na jego krawędzi mają tę samą odległość od środka koła. Przy oznaczeniach:

$$\dot{\phi} = \omega, \quad \dot{\omega} = \epsilon$$

Mamy wzory na prędkość i przyspieszenie punktu na krawędzi koła:

$$v = r\omega, \quad a = r\epsilon$$

24. Przekładnia pasowa ma promienie kół  $r_1$  i  $r_2$ . Jaki jest stosunek ich prędkości kątowych?

25. W przekładni zębatej jedno koło ma 60 zębów, a drugie 40. Jaki jest stosunek prędkości kątowych obu kół?

26. Na bloczek o promieniu  $r$  nawinięta jest linka, na końcu której zawieszony jest ciężarek. Ciężarek opada ze stałym przyspieszeniem  $a$ . Jakie jest przyspieszenie kątowe bloczka? Jak zależy od czasu jego prędkość kątowa?

27. Zblocze to dwa (lub więcej) nieruchome względem siebie współosiowe bloczki. Przez większe koło zblocza przerzucona jest lina. Po jednej stronie do liny przyłożona jest pionowa siła  $F_1$ , po drugiej stronie lina przechodzi przez blok obciążony siłą pionową  $F_2$  i wraca na drugie koło w zbloczu na który jest nawinięta. Oblicz:

- Zależność prędkości wiszącego bloku od prędkości wolnego końca liny
- zależność między siłą  $F_1$  a siłą  $F_2$

W przypadku gdy lina nawinięta jest na koła zblocza w kierunku zgodnymi w kierunkach przeciwnych.

28. Załóżmy, że w samochodzie wyposażonym w mechanizm różnicowy jeżeli prędkość kątowa obu kół jest równa, to kręcą się one tak samo szybko jak wał. Udowodnij, że  $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ , gdzie  $\omega_1$  i  $\omega_2$  to prędkości kątowe kół, a  $\omega$  to prędkość wału

29. Samochód pokonuje zakręt o promieniu 100 m z prędkością 36 km/h. Rozstaw kół wynosi 2 m. Oblicz różnicę prędkości kątowych obu kół.

30. Koło zamachowe wykonuje ruch obrotowy z prędkością  $f = 900$  obr/min. Koło zaczyna hamować ze stałym opóźnieniem i zatrzymuje się po 45 obrotach. Oblicz czas hamowania i wartość przyspieszenia kątowego.

31. Wał maszynowy osiągnął po  $t = 5$  s  $f = 900$  obr/min. Przyjmując że ruch był jednostajnie przyspieszony, oblicz liczbę obrotów walca w tym czasie