Algebra liniowa

Zadania

Wyznaczniki:

1. Rozwiązać równanie

$$A = \begin{vmatrix} 2x-2 & -1 \\ 7x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

2. Sprawdzić torzsamości

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -r\sin x & r\cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Obliczyć wyznaczniki macierzy $A$, $B$, $AB$ oraz $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, czy $\det(AB) = \det A \det B$ i $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

4. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

korzystając z tego, że jeden pozadigonalny blok macierzy jest zerowy.

5. Wykazć, że

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

6. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix},$$

oraz

$$C = [c_{ij}]_{n\times n}, \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & i+j \neq n+1 \end{cases}$$

$$D = [d_{ij}]_{n\times n}, \quad d_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ n & i \neq j \end{cases}$$

7. Oblicz wyznaczniki macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & \sin x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Nie obliczając wyznaczników znajdź rozwiązania równań

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Oblicz wyznacznik macierzy $A$ $(n \times n)$ spełniających równanie:

$$a)\ A^2 = A^T,\ \ b)\ A^T - A^{-1} = 0,\ \ c)\ A^2 + A^{-1} = 0,\ \ d)\ A^3 - 4A^{-1} = 0.$$

10. Wyznacz macierz odwrotną do

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

11. Liczby 1798, 2139, 3255 i 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnij, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix},$$

też dzieli się przez 31.

12. Wyznacz rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$