

Układy równań liniowych - przykładowe zadania

1. Wykazać, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

jest odwracalna i obliczyć A^{-1} . Rozwiązać układ równań

$$4x + 2y + z = 3$$

$$2x - y = 3$$

$$x + 3y + z = -1.$$

2. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań

(a)

$$x + y = 3,$$

$$x - 3y = -5.$$

(b)

$$x + y + z = 0,$$

$$x - y + z = 0,$$

$$x + y - z = 2.$$

(c)

$$x + y + z - t = 4,$$

$$x + y - z + t = -4,$$

$$x - y + z + t = 2,$$

$$-x + y + z + t = -2.$$

Dodatkowo rozwiąż układy równań (a) i (b) wzorami Cramera i macierzowo.

3. Rozwiąż układy równań

(a)

$$-x - y + z + t = 4,$$

$$x - y - z + t = 0,$$

$$x - y - z - t = -8.$$

(b)

$$x + y + z = 1,$$

$$2x + y + 2z = 1,$$

$$3x + 2y + 3z = 3,$$

4. Dla jakiej wartości parametru $a \in R$ układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań

$$x + y + az = 1,$$

$$x + ay + z = a,$$

$$ax + y + z = -a - 1,$$

5. Wyznacz te wartości a , dla których układ równań

$$x + 2y + z = 2,$$

$$x + y + 2z = \operatorname{sgn}(a) - 1,$$

$$2x + y + z = 2,$$

$$2y + 2z = 0,$$

nie ma rozwiązań.

6. W zależności od wartości parametru a rozwiązać układ równań

$$x + y - az = -1$$

$$ax + y + az = 4$$

$$4x + y + 4z = a.$$

7. Dla jakich parametrów a i b z R układ równań

$$2x - 2y + z = a$$

$$-3x + y - az = 3$$

$$7x - 5y + bz = -1,$$

(a) ma w R^3 jedno rozwiązanie,

(b) ma w R^3 nieskończenie wiele rozwiązań,

(c) nie ma w R^3 rozwiązań.

8. Wykazać, że układ równań

$$2x - 3y + z - 5t = -7$$

$$-x + 2y + 3z + 4t = 1$$

$$x + 3y - 10z - 7t = 4$$

$$5x - 3y - 8z - 17t = -10$$

ma rozwiązanie. Przedstawić zbiór wszystkich rozwiązań jako sumę szczególnego rozwiązania niejednorodnego układu równań i rozwiązań równania jednorodnego.