Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone:

1. $z = (1+2i)(3-5i)$ **2.** $z = \dfrac{3}{2+3i}$

Rozwiązania

1. Korzystając z faktu, że $i^2 = -1$, mamy

$$z = (1+2i)(3-5i) = 3 - 5i + 6i - 10i^2 = 13 + i.$$

2. Mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną do mianownika, czyli $2-3i$, otrzymamy

$$z = \frac{3}{2+3i} = \frac{3(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i}{4+9} = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}i.$$

Przedstawić w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczbę zespoloną:

3. $z = \dfrac{4}{\sqrt{3}-i}.$

Zauważmy, że

$$z = \frac{4}{\sqrt{3}-i} = \frac{4(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \sqrt{3}+i.$$

Aby przedstawić liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej, należy wyznaczyć moduł i argument, a więc

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}.$$

Stąd $\varphi = \frac{\pi}{6}$ jest argumentem liczby z, czyli $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ jest szukaną postacią trygonometryczną, natomiast $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ jest postacią wykładniczą.

Wyznaczyć zbiór punktów spełniających nierówność:

4. $\left|\dfrac{z-3}{\bar{z}+3}\right| \le 2$

Z powyższej nierówności wynika: $|z-3| \le 2|\bar{z}+3|$. Niech $z = x+iy$, a więc $\bar{z} = x - iy$. Stąd mamy $|x-3+iy| \le 2|x+3-iy|$, czyli

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \le 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi drugiej po uporządkowaniu, otrzymamy:

$$(x+5)^2 + y^2 \ge 16 \quad \text{lub} \quad \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{16} \ge 1.$$

———•———

Przedstawić następujące liczby zespolone w postaci algebraicznej (kanonicznej)

1. $(4-3i)+(2i-6)$ **2.** $(2+i)(4-i)$

3. $\dfrac{5}{2-i}$ **4.** $\dfrac{-1-4i}{4-i}$

5. $(3+i)(3-i)\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}i\right)$ **6.** $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$

7. $(1-i)(2-i)(3-i)$ **8.** $(1-i)^4$

9. $(1+i)^2\left[\dfrac{4}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}\right]$ **10.** $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$

11. $\dfrac{(1+i)^2}{(1+2i)^2}$ **12.** $\left(\dfrac{1+2i}{1+i}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{1-i}\right)^2$

13. $i(1+i)^4-(2+i)^2$ **14.** $(1-i)^6(1+i)^6$

Następujące liczby zespolone przedstawić w postaci trygonometrycznej:

15. 3 **16.** -4

17. $-3i$ **18.** $2+2\sqrt{3}i$

19. $1+i$ **20.** $1-i$

21. $\sqrt{3}-i$ **22.** $-\sqrt{3}+i$

23. $-5-5i$ **24.** $1+\sqrt{3}i$

25. $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ **26.** $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

27. $-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ **28.** $3+3\sqrt{3}i$

29. $\dfrac{1}{1+i}$ **30.** $\dfrac{1+i}{i}$

31. $\dfrac{5}{4+3i}$

32. $\dfrac{1}{(1-i)^2}$

33. $\dfrac{6}{\sqrt{3}+i}$

34. $(5+5i)^2$

35. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

36. $(1+i)(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

Przedstawić w postaci wykładniczej liczby zespolone:

37. $-5+5i$

38. $2-2i$

39. $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

40. $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$

41. $-2\sqrt{3}-2i$

42. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$

43. $-8+8\sqrt{3}i$

44. $(1-i)(4+4i)$

45. $\dfrac{1+i}{i}$

46. $\dfrac{(1+i)^2e^{i\pi}}{(1-i)^3e^{-\frac{\pi}{4}i}}$

47. i^{20}

48. $(1+i\sqrt{3})^{22}$

49. $\left(\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$

50. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{1-i}\right)^{6}$

Wyznaczyć:

51. $\mathrm{Re}[(4+i)(2+i)]$

52. $\mathrm{Im}[(2-i)(3+5i)]$

53. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2-i}{3+4i}\right)$

54. $\mathrm{Im}[(i+2)i]^2$

55. $\mathrm{Re}[(i+2)^2-(3-i)^2]$

56. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3-i}{(2+2i)^2}\right)$

57. $|(1+i)(3+i)|$

58. $\left|\dfrac{2-i}{2+3i}\right|$

59. $\overline{(2+i)(3-i)}$

60. $\overline{i(i+1)(i+2)}$

61. $\overline{\left(\dfrac{3+4i}{-1+2i}\right)}$

62. $\overline{\left(\dfrac{(4-i)^2}{(i+1)(2i-1)}\right)}$

Wyznaczyć zbiór punktów dotyczący poniższych związków, gdy $z=x+iy$:

63. $z\bar{z}=4$

64. $z\bar{z}=-1$

65. $z\bar{z}<9$

66. $|z-1|=2$

67. $|z+i|=3$

68. $|z-1+i|=1$

69. $|z+2|\le 4$

70. $|z+2i|\le 1$

71. $|z-i|=|z+i|$

72. $|z(i-1)|=|z(i+1)|$

73. $|z|+\mathrm{Re}(z)\le 1$

74. $|z^2-\bar{z}^2|<1$

75. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$

76. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{4}$

77. $\mathrm{Re}[z(1+i)]=1$

78. $\mathrm{Re}(\bar{z}-i)=2$

79. $\mathrm{Re}(z+1)=0$

80. $\mathrm{Im}(z-2i)>6$

81. $\mathrm{Re}(z^2)=0$

82. $\mathrm{Im}(z^2)=2$

83. $\mathrm{Re}(z^2)=9$

84. $\mathrm{Re}(z^2+i-1)=-2$

85. $\mathrm{Re}(z\bar{z})>1$

86. $1<|z+i|\le 2$

87. $|z+4i|=\mathrm{Im}(z)-4$

88. $\left|z-\sqrt{2}\left(\dfrac{1+i}{i\sqrt{2}}\right)^{15}\right|\le\left|\dfrac{3-4i}{4+3i}\right|$

Dla jakiej wartości parametru c prawdziwa jest równość:

89. $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}=-1+ci$

90. $(1+i)^2(1-i)=2+ci$

Niech $z_1=1-i,\ z_2=-2+4i$. Wyznaczyć:

91. $z_1^2+2z_1-3$

92. $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

93. $|z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1|$

94. $\mathrm{Re}(z_1^2+z_2^2-4)$

Wyznaczyć rozwiązania rownań dla $z=x+iy$:

95. $(2+3i)z=-4+7i$

96. $(3+4i)^2-2\bar{z}=z$

97. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2+\dfrac{1}{z}=1+i$

98. $(3-2i)z=2\bar{z}+2i-1$

99. $|z|+\bar{z}=3+4i$

Odpowiedzi

1. $-2-i$

2. $9+2i$

3. $2+i$

4. $-i$

5. $2+i$

6. $-\dfrac{2}{5}$

7. $-10i$

8. -4

9. $-1+5i$

10. $2+i$

11. $\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i$

12. $2-\frac{1}{2}i$

13. $-3-8i$

14. 64

15. $3(\cos 0+i\sin 0)$

16. $4(\cos\pi+i\sin\pi)$

17. $3\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

18. $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

19. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

20. $\sqrt{2}\left(\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

21. $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

22. $2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

23. $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

24. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

25. $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

26. $\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

27. $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

28. $6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

29. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

30. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

31. $\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

32. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

33. $3\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

34. $50\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

35. $2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$

36. $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$

37. $5\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}$

38. $2\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$

39. $2e^{\frac{3}{4}\pi i}$

40. $3e^{\frac{7}{6}\pi i}$

41. $4e^{\frac{2}{6}\pi i}$

42. $\sqrt{3}e^{\frac{5}{3}\pi i}$

43. $16e^{\frac{2}{3}\pi i}$

44. $8e^{0i}$

45. $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

46. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

47. e^{0i}

48. $2^{22}e^{\frac{4}{3}\pi i}$

49. $2^{-6}e^{\pi i}$

50. $2^{6}e^{-\frac{\pi}{2}i}$

51. 7

52. 7

53. $\frac{2}{25}$

54. -4

55. -5

56. $-\frac{3}{8}$

57. $2\sqrt{5}$

58. $\frac{\sqrt{65}}{13}$

59. $7-i$

60. $-3-i$

61. $1+2i$

62. $-\frac{53}{10}-\frac{9}{10}i$

63. $x^2+y^2=4$

64. Sprzeczne

65. $x^2+y^2<9$

66. $(x-1)^2+y^2=4$

67. $x^2+(y+1)^2=9$

68. $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

69. $(x+2)^2+y^2\le 16$

70. $x^2+(y+2)^2\le 1$

71. $y=0,\ x\in\mathbb{R}$

72. $x,y\in\mathbb{R}$

73. $y^2\le 1-2x,\ x\le\frac{1}{2}$

74. $16x^2y^2<1$

75. $(x-2)^2+y^2=4,\ z\ne 0$

76. $x^2+(y+2)^2=4,\ z\ne 0$

77. $x-y=1$

78. $x=2,\ y\in\mathbb{R}$

79. $x=-1,\ y\in\mathbb{R}$

80. $y>8,\ x\in\mathbb{R}$

81. $x^2=y^2$

82. $xy=1$

83. $x^2-y^2=9$

84. $y^2-x^2=1$

85. $x^2+y^2>1$

86. $1<x^2+(y+1)^2\le 4$

87. $x^2+16y=0,\ \ y\ge 4$

88. $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$

89. $c=1$

90. $c=2$

91. $-1-4i$

92. $\frac{3}{5}$

93. 12

94. -16

95. $x=1,\ \ y=2$

96. $x=-\frac{7}{3},\ \ y=-24$

97. $x+2y=0,\ \ z\ne 0$

98. $x=-1,\ \ y=0$

99. $x=-\frac{7}{6},\ \ y=-4$

Pokazać, że:

1. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

3. $\overline{z_1 z_2 z_3} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$

4. $\overline{z^4} = (\bar{z})^4$

5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

6. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

7. $|z^n| = |z|^n, \quad n = 1, 2, \cdots$

8. $|z| = 0 \iff z = 0$

9. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2 \bar{z}_3}$ gdy $z_2 z_3 \neq 0$

10. $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$ gdy $z_2 z_3 \neq 0$

11. $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ jest l. rzeczywistą

12. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

13. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

14. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

15. $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$

16. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

17. $z\bar{z} = |z|^2$

18. $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z), \quad z \neq 0$

19. $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$

20. $\mathrm{Arg}(z\bar{z}) = 0$

21. $\mathrm{Arg}(z_1 \bar{z}_2) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$

22. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2), \; z_2 \neq 0$

23. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

24. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

25. $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)$

26. $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\mathrm{Re}(z_2)$

5. Wyrazić $\cos 2\varphi$ i $\sin 2\varphi$ za pomocą $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$

Niech $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Korzystając ze wzoru Moivre'a mamy

$$z^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = cos2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Podnosząc z do potęgi drugiej, mamy również:

$$z^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi,$$

a więc

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi.$$

Stąd

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \qquad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

6. Obliczyć $\sqrt[3]{27i}$

Niech $z = 27i$. Łatwo zauważyć, że

$$|z| = 27, \quad \text{oraz} \quad \cos\varphi = 0, \; \sin\varphi = 1,$$

a więc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jest argumentem liczby z. Zgodnie ze wzorem (1.1) mamy

$$w_k = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Stąd szukanymi pierwiastkami są liczby:

$$w_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i),$$

$$w_1 = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + i),$$

$$w_2 = 3\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) = -3i.$$

Wyznaczyć pierwiastki równania:

7. $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$

Równanie $z^2 + bz + c = 0$ ma dwa pierwiastki dane wzorami:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

W naszym zadaniu $b = 2$, $c = 1 - i$, wiec pierwiastkami są liczby:

$$z_1 = -1 + \sqrt{i} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad z_2 = -1 - \sqrt{i} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Przedstawić w postaci algebraicznej liczby zespolone:

1. $e^{\frac{\pi}{2}i}$

2. $4e^{-\frac{\pi}{2}i}$

3. $-2e^{\frac{5}{6}\pi i}$

4. $6e^{\frac{2}{3}\pi i}e^{\pi i}$

5. $e^2 e^{\pi i}$

6. $e^{\frac{\pi}{4}i} e^{-\pi i}$

7. $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^7 \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^6}{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5}$

8. $\dfrac{(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)^5(\cos 3\varphi - i\sin 3\varphi)^6}{(\cos 4\varphi - i\sin 4\varphi)^7(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)^8}$

Skorzystać ze wzoru Moivre'a i wynik przedstawić w postaci algebraicznej:

9. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$

10. $(1-i)^{20}$

11. $(2+2i)^{35}$

12. $(1-i\sqrt{3})^6$

13. $\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{31}$

14. $(-\sqrt{3}-i)^{12}$

15. $\dfrac{(1-i)^{20}}{(1+i)^{25}}$

16. $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{20}}{(-1-i\sqrt{3})^{25}}$

17. $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{12}}{(1+i\sqrt{3})^9}$

18. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{100}$

Zastosować wzór Moivre'a, aby wyrazić poniższe funkcje za pomocą $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$;

19. $\cos 3\varphi$

20. $\sin 3\varphi$

21. $\cos 4\varphi$

22. $\sin 4\varphi$

23. $\dfrac{\sin 5\varphi}{\sin\varphi}$

24. $\dfrac{\cos 5\varphi}{\cos\varphi}$

Wyznaczyć pierwiastki kwadratowe następujących liczb zespolonych, nie korzystając ze wzoru (1.1):

25. $\sqrt{5-12i}$

26. $\sqrt{8+4\sqrt{5}i}$

27. $\sqrt{3+4i}$

28. $\sqrt{6+8i}$

Wyznaczyć pierwiastki z liczb zespolonych:

29. $\sqrt{2i}$

30. $\sqrt{-i}$

31. $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$

32. $\sqrt[3]{1}$

33. $\sqrt[3]{i}$

34. $\sqrt[3]{-11-2i}$

35. $\sqrt[3]{-2+2i}$

36. $\sqrt[4]{64}$

37. $\sqrt[4]{16i}$

38. $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$

39. $\sqrt[4]{-16}$

40. $\sqrt[4]{1}$

41. $\sqrt[6]{1}$

42. $\sqrt[8]{1}$

43. $\sqrt[6]{8}$

44. $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$

45. $\sqrt[3]{\dfrac{-2}{1+i}}$

46. $\sqrt[3]{(1-i)^4}$

47. $\sqrt[6]{(-1-i)^4}$

48. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}$

Wyznaczyć rozwiązania równań:

49. $z^2 + 2z + 4 = 0$

50. $z^2 + 36 = 0$

51. $z^2 - 4z + 5 = 0$

52. $z^2 - 2z + 10 = 0$

53. $z^2 + 6z + 10 = 0$

54. $z^2 - 10z + 34 = 0$

55. $2z^2 - 2(1+i)z + 2 + i = 0$

56. $z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0$

57. $z^2 + (i-2)z + (3-i) = 0$

58. $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

59. $z^2 + (1+4i)z - (5+i) = 0$

60. $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$

61. $z^2 + (6i-3)z - 6 - 8i = 0$

62. $(z+1)^3 = z^3$

63. $z^3 - 8 = 0$

64. $z^3 + (2i-3)z^2 + (5-i)z = 0$

65. $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

66. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

67. $z^4 + 4 = 0$

68. $z^4 + z^2 + 1 = 0$

69. $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

70. $z^4 + 1 = i\sqrt{3}$

71. $z^5 + 4z^3 + iz^2 + 4i = 0$

72. $z^7 + z^4 + z^3 + 1 = 0$

73. Wiadomo, że $z_1 = i$ jest pierwiastkiem równania: $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki tego równania.

74. Liczba $z_1 = i$ jest pierwiastkiem równania: $z^5 - iz^4 + 8z^3 - 8iz^2 + 16z - 16i = 0$. Wyznaczyć pozostałe pierwiastki tego równania.

75. Liczba $z_1 = 1 + i$ jest pierwiastkiem równania: $z^8 - c = 0$. Wyznaczyć parametr c oraz pozostałe pierwiastki tego równania.

Które z punktów leżą na okręgu $|z - i| = 1$

76. $(a)\frac{1}{2} + i,\ (b)1 + i,\ (c)\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2},\ (d) - \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$?

77. Pokazać, że $1 + i$ jest rozwiązaniem równania: $z^{17} + 2z^{15} - 512 = 0$

Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Pokazać, że

78. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

79. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, $r_2 \neq 0$

Odpowiedzi

1. i

2. $-4i$

3. $-\sqrt{3} + i$

4. $3 - 3\sqrt{3}i$

5. $-e^2$

6. $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

7. $-i$

8. $\cos 20\varphi - i\sin 20\varphi$

9. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. -2^{10}

11. $2^{52}(-1 + i)$

12. 64

13. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 2^{12}

15. $\frac{1}{8}(-1 + i)$

16. $\frac{1}{32}$

17. -8

18. $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

19. $\cos 3\varphi = \cos^2\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$

20. $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$

21. $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$

22. $\sin 4\varphi = 4(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi)$

23. $\frac{\sin 5\varphi}{\sin\varphi} = 5\cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$, $\sin\varphi \neq 0$

24. $\frac{\cos 5\varphi}{\cos\varphi} = \cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 5\sin^4\varphi$, $\cos\varphi \neq 0$

25. $3 - 2i,\ \ -3 + 2i$

26. $\sqrt{10} + i\sqrt{2},\ \ -\sqrt{10} - i\sqrt{2}$

27. $2 + i,\ \ -2 - i$

28. $\sqrt{2}(2 + i),\ \ -\sqrt{2}(2 + i)$

29. $1 + i,\ \ -1 - i$

30. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

31. $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}},\ \ -\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}}$

32. $1,\ \ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

33. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),\ -i$

34. $1 + 2i,\ \ -\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,\ \ -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$

35. $1 + i,\ -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}},\ \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

36. $2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}i,\ -2\sqrt{2}i$

37. $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}},\ \ -\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}},$
$-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}},\ \ \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

38. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right],$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right],$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right],$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right],$

39. $\sqrt{2}(1 + i),\ \ \sqrt{2}(-1 + i),\ \ -\sqrt{2}(1 + i),\ \ \sqrt{2}(1 - i)$

40. $1,\ \ -1,\ \ i,\ \ -i$

41. $1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42. $1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

43. $\sqrt{2},\ \ -\sqrt{2},\ \ (1 + i\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ (1 - i\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ (-1 + i\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ -(1 + i\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}$

44. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i),\ \ i,\ \ -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

45. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1 + i),\ \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left[-\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right],\ \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\left[\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right]$

46. $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 + i\sqrt{3}),\ \ -\sqrt[3]{4},\ \ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 - i\sqrt{3})$

47. $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i), i\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i), -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}+i), -i\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

48. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

49. $z_1 = -1+i\sqrt{3},\ z_2 = -1-i\sqrt{3}$

50. $z_1 = 6i,\ z_2 = -6i$

51. $z_1 = 2+i,\ z_2 = 2-i$

52. $z_1 = 1+3i,\ z_2 = 1-3i$

53. $z_1 = -3+i,\ z_2 = -3-i$

54. $z_1 = 5+3i,\ z_2 = 5-3i$

55. $z_1 = \frac{1}{2}(1-i),\ z_2 = \frac{1}{2}(1+3i)$

56. $z_1 = 3+2i,\ z_2 = 1+i$

57. $z_1 = 1+i,\ z_2 = 1-2i$

58. $z_1 = 2-i,\ z_2 = 1+i$

59. $z_1 = 1-i,\ z_2 = -2-3i$

60. $z_1 = -2+i,\ z_2 = 1-2i$

61. $z_1 = 1-2i,\ z_2 = 2-4i$

62. $z_1 = -\frac{1}{2}-\frac{i}{6}\sqrt{3},\ z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{i}{6}\sqrt{3}$

63. $z_1 = 2, z_2 = -1-i\sqrt{3},\ z_3 = -1+i\sqrt{3}$

64. $z_1 = 0,\ z_2 = 2-3i,\ z_3 = 1+i$

65. $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$

66. $z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = 2i,\ z_4 = -2i$

67. $z_1 = -1+i,\ z_2 = -1-i,\ z_3 = 1+i,\ z_4 = 1-i$

Wsk. $z^4+4 = (z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$

68. $z_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),\ z_2 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}),\ z_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ z_4 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

69. $z_1 = z_2 = 1,\ z_3 = 2,\ z_4 = -1+i,\ z_5 = -1-i$

70. $z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i),\ z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ z_3 = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i),\ z_4 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$

71. $z_1 = 2i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),\ z_4 = i,\ z_5 = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

72. $z_1 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),\ z_2 = -1,\ z_3 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}), z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

73. $z_2 = -i,\ z_3 = 2+i,\ z_4 = 2-i$

74. $z_2 = z_3 = 2i,\ z_4 = z_5 = -2i$

75. $c = 16, z_2 = \sqrt{2}, z_3 = i\sqrt{2}, z_4 = -1+i, z_5 = -\sqrt{2}, z_6 = -1-i, z_7 = -i\sqrt{2}, z_8 = 1-i$

76. (a) nie, (b) tak, (c) nie, (d) nie

2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Wykazać, że funkcja y jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego:

1. $y = \mathrm{tg}x, \quad y' - y^2 = 1$

2. $y = Ce^{-2x}, \quad y' + 2y = 0$

3. $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \quad y'' + 4y = 0$

4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x, \quad y'' - y' - 2y = -2x - 1$

5. $y = x\int_0^x e^{-t^2}dt, \quad xy' - y = x^2 e^{-x^2}$

Znaleźć równanie różniczkowe, gdy dana jest jego całka ogólna:

6. $y = x^3 + C$

7. $y = Ce^{2x}$

8. $y = Cx^4$

9. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

10. $y = ae^{bx}$

11. $y = C_1 x + C_2 e^x$

12. $y = \frac{2}{C}x + \frac{C}{2}$

13. $(x-C)^2 + (y+2)^2 = r^2$

Odpowiedzi

6. $y' = 3x^2$

7. $y' = 2y$

8. $xy' = 4y$

9. $y'' + y = 0$

10. $yy'' - (y')^2 = 0$

11. $y''(1-x) + xy' - y = 0$

12. $yy' = x(y')^2 + 1$

13. $(y+2)^2[1+(y')^2] = r^2$

2.1. Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu postaci

$$f(x)dx = g(y)dy$$

o funkcji niewiadomej y nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych. Szukana funkcja y jest funkcją zmiennej x. Funkcje f i g są ciągłe w odpowiednich przedziałach.