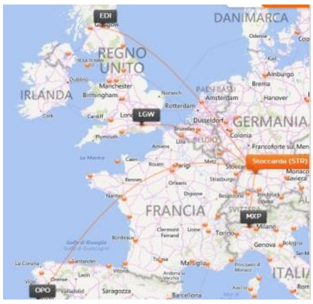
Wprowadzenie: Do czego służą wektory?

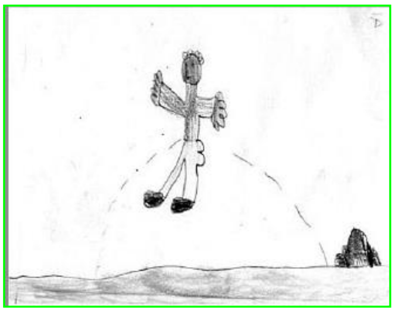
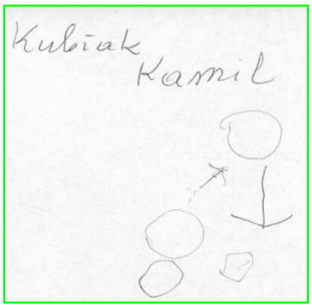
Mapa połączeń samolotowych Isiget pokazuje, skąd samoloty wylatują i dokąd dolatują; pokazane jest to za pomocą strzałek – strzałki te pokazują *przemieszczenie*: skąd dokąd jest dany lot, rys. 1. Mimo, że *trajektoria* lotu nie jest taką '"okrągłą" strzałką, taki sposób pokazania przemieszczenia jest bardzo wygodny.

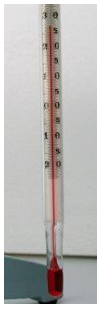
Rysunek włoskiej 6-letniej dziewczynki pokazuje skok przez przeszkodę. Za pomocą przerywanej linii dziewczynka pokazała, że w najwyższym punkcie skoku *prędkość* jest pozioma.

Rysunek 8-letniego Kamila z Brzegu ilustruje zderzenie dwóch piłek. Mimo, że na wykładzie był pokazany tylko eksperyment, młody słuchacz pokazał zderzenie za pomocą strzałek. Dorosły student przypisałby tym strzałkom znaczenie *pędu*, który wymieniają piłki w trakcie zderzenia.

Niektóre wielkości fizyczne (a jest ich bardzo wiele) warto opisać za pomocą tego rodzaju strzałek. Wielkości te, oprócz wartości mają kierunek i punkt zaczepienia – na mapie połączeń lotniczych jest to punkt wylotu, a na rysunku skoku - „środek ciężkości" atlety. Dla ścisłości, „kierunkiem" nazywamy kierunek zderzenia – „w pionie", a *zwrotem* zaznaczamy, czy piłka odskoczyła w górę czy w dół (a dla samolotu lot „tam", czy „powrót").



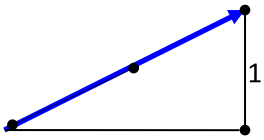



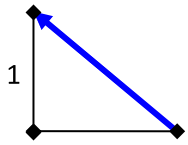


Dla odmiany, słupek rtęci (a raczej alkoholu) w termometrze stoi zazwyczaj nieruchomo (lub rośnie ale powoli), więc nie zaznaczamy jego kierunku. Temperaturę fizycy nazywają *skalarem*. Skalarem jest też ilość pieniędzy na koncie (lub debet).

Reasumując, wektory w fizyce mają cztery wielkości:
– wartość,
- kierunek,
- zwrot,
- punkt przyłożenia.

Zadania:
1. Określ wartość, kierunek (kąt do poziomu), zwrot (np. „w lewo w górę") i punkt przyłożenia (współrzędne tego punktu) niebieskich wektorów na rysunkach. Jednostka miary jest podana na rysunkach.

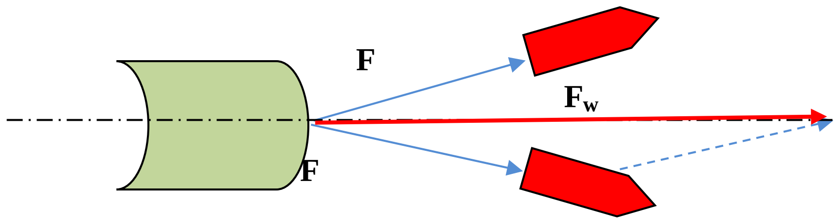




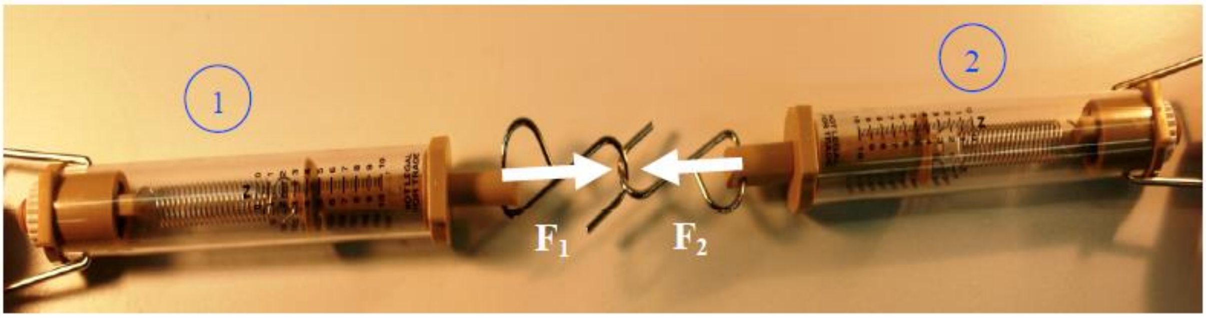
1.2 Suma wektorów

Wektory się sumują, ale to sumowanie musi uwzględniać ich kierunek i zwrot, jak na przykładzie dwóch sił poniżej. (Przykłady z „Toruńskiego poręcznika do fizyki” UMK.)

Rozważmy inny przypadek – dwóch holowników, które ciągną ciężki tankowiec (zob. rys. 4.3). Każdy z holowników ciągnie w nieco innym kierunku, ale tankowiec płynie prosto przed siebie. Dlaczego? Mówimy, że dwie siły się składają i dają siłę sumaryczną, zwaną też po polsku *wypadkową*.



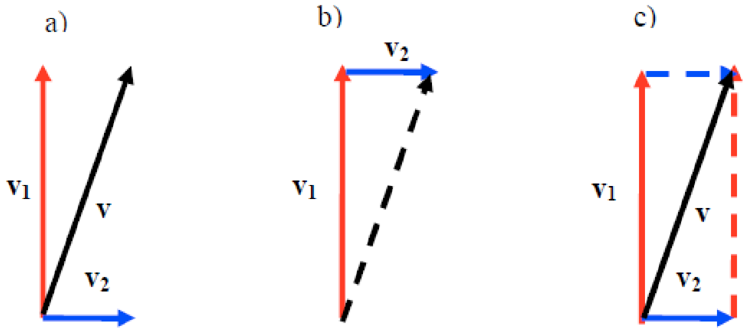
Rys. 4.3. Dwa holowniki ciągną tankowiec. Każdy z holowników działa siłą o wartości F (niebieskie strzałki) ale nieco pod innym kątem od osi tankowca. Z tego powodu wypadkowa siła F_w działająca na tankowiec, zaznaczona kolorem czerwonym, ma wartość nieco mniejszą od 2F.

a) 

Siła, jako wektor, jest zaczepiona do ciała w określonym punkcie – dla dynamometrów na foto 4.8 są to haczyki, dla holowników na zdjęciach poniżej jest to wielki zaczep na rufie.

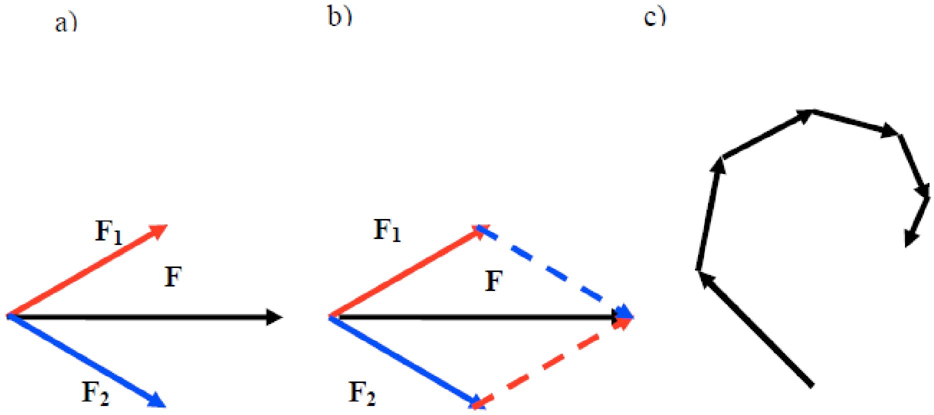
Wektor siły ma więc cztery atrybuty: wartość, kierunek, zwrot i punkt zaczepienia.

Wektorem jest również *prędkość*. Rozważmy przykład łódki płynącej w poprzek rzeki. Wioślarz wiosłuje ile sił, ale łódka i tak jest znoszona z prądem. *Wypadkowy* kierunek ruchu będzie złożeniem prędkości własnej łódki (to znaczy prędkości, jaką miałaby łódka na stojącej wodzie) i prędkości prądu rzeki, zobacz rys. 4.9. Mówimy, że *wypadkowy wektor* prędkości jest *sumą* prędkości składowych. Sposób na sumowanie wektorów jest pokazany na rysunkach 4.6 A 4.10.



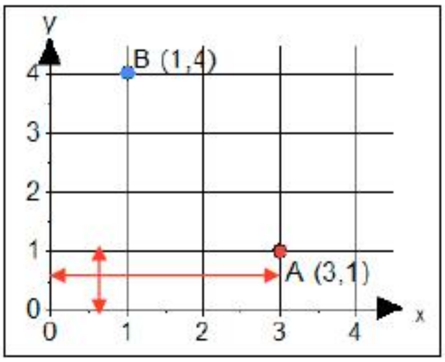
Rys. 4.9 Prędkość jest wektorem.
a) Wioślarz wiosłuje w poprzek rzeki, ale łódka znoszona jest prądem wzdłuż rzeki. Wypadkowa prędkość łódki **v** (wektor czarny) jest złożeniem prędkości $\mathbf{v_1}$, jaką miałaby ona na wodzie stojącej wektor czerwony) i prędkości prądu $\mathbf{v_2}$ (wektor niebieski).
Aby wyznaczyć kierunek wektora wypadkowego (sumarycznego) mamy dwa sposoby: **b)** możemy wektory *zsumować* przesuwając wektor „2" na koniec wektora „1" – wektor wypadkowy zaczyna się na początku wektora „1" a kończy na końcu wektora „2"
c) na wektorach „1" i „2" budujemy *równoległobok* – wektor wypadkowy jest przekątną tego równoległoboku.

Podobnie, dla znalezienia, ile wynosi i pod jakim kierunkiem działa siła *wypadkowa*, musimy działające siły *dodać*. Na rysunku 4.3 czynimy to dla dwóch holowników.



Rys. 4.10 Siła jest wektorem.
a) Aby określić, jaka wypadkowa siła **F** działa na ciągnięty tankowiec, sumujemy siły $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_2}$ pochodzące od dwóch holowników. **b)** W sumowaniu dwóch wektorów możemy skorzystać z reguły równoległoboku. **c)** Reguła równoległoboku staje się niewygodna przy sumowaniu większej ilości wektorów, jak na przykład w tym zagadnieniu, związanym z teorią tęczy. Wygodniej jest w tym przypadku sumować wektory metodą „początku z końcem".

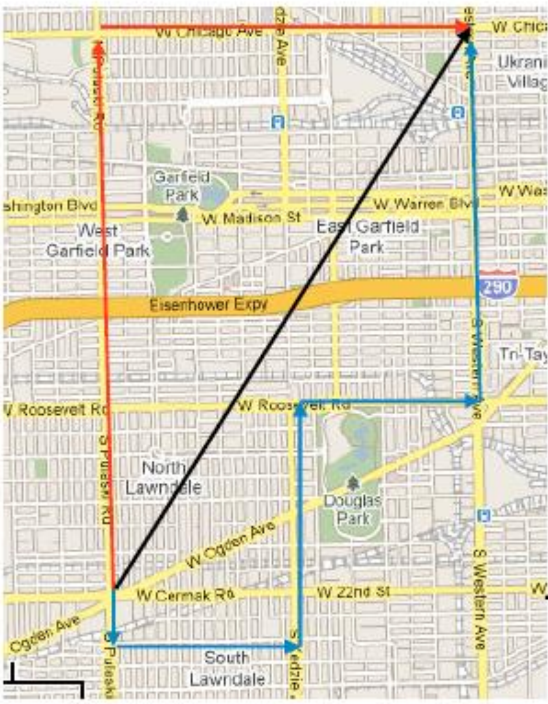
Dla podkreślenia, że jakaś wielkość jest wektorem, zapisujemy ją ze strzałką na górze $\vec{F}$ lub czcionką pogrubioną. I tak „v" będzie oznaczało jedynie *wartość* prędkości a zapis „**v**" oznacza *wektor* prędkości – pisząc tak, mamy na myśli nie tylko wartość ale i *kierunek* i *zwrot* prędkości. Zauważ, że przemieszczenie ciała też ma kierunek, czyli jest wektorem. W przykładzie na rysunku 3.4, policji goniącej gangsterów, wektor przemieszczenia policji jest równy sumie wektorów przemieszczenia gangsterów.

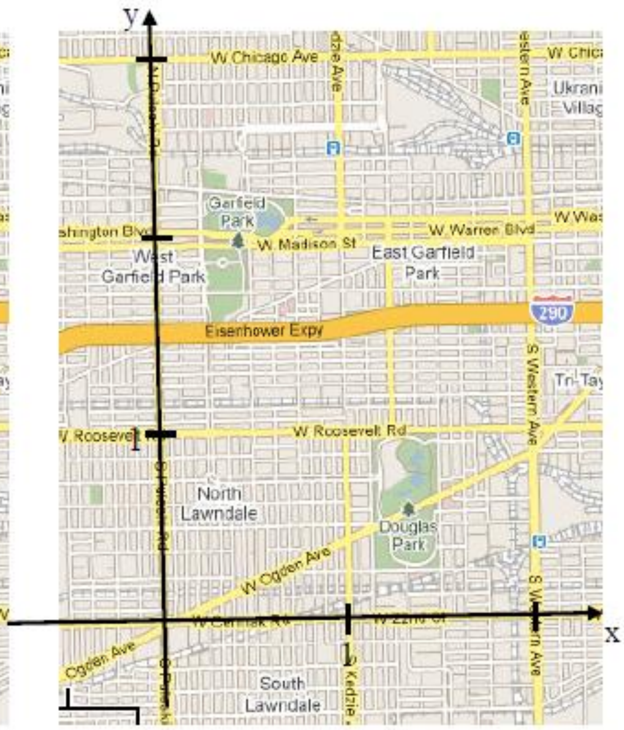


Rys. 3.3. Ilustracja do zadania 2.1. Współrzędnie punktu na płaszczyźnie podają odległości od osi OX (współrzędna y) i od osi OY (współrzędna x).

Przykład 3.2.

Plany wielu miast amerykańskich tworzą szachownicę ulic, przecinających się pod kątem prostym. W Chicago, na skrzyżowaniu ulicy Pułaskiego i Cermaka (zob. rys. 3.4) miał miejsce napad. Gangsterzy uciekają samochodem. Ich samochód przejeżdża 3 mile na północ, po czym 2 mile na wschód ale zatrzymuje się. Helikopter policyjny wyrusza w linii prostej od miejsca napadu do punktu zatrzymania się gangsterów. Ile mil musi przelecieć? Rabusiów goni też inspektor Bagol. Inspektor startuje z miejsca napadu ale pojechał początkowo w niewłaściwym kierunku, później skręcił, dojechał co prawda do rabusiów, ale dłuższą drogą, zobacz to na rysunku.



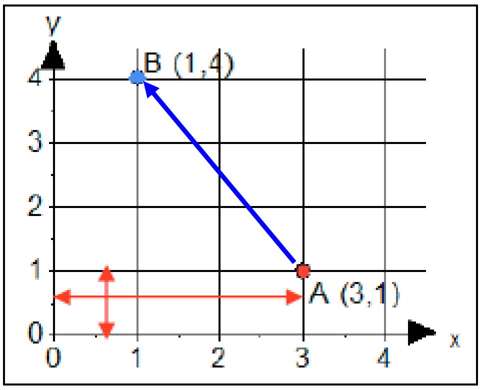


Rys. 3.4a. Trasa gangsterów (czerwone strzałki), helikoptera policji (czarna strzałka) i inspektora Bagola (niebieskie strzałki). Strzałki oznaczają kierunek przemieszczania się gangsterów, policji i Bagola. Jak widzisz, do tego samego punktu końcowego można dotrzeć na różne sposoby.

Rys. 3.4b. Jeżeli wprowadzimy układ współrzędnych, najlepiej prostokątnych i wybierzmy właściwą jednostki na osiach (tu jedna mila), to możemy przedstawić kolejne położenia gangsterów w postaci ciągu liczb lub tabelki, zob. poniżej w tekście rozdziału.

1.3 Wektor w układzie współrzędnych

Przykład z rysunku 3.4 wskazuje, że wygodnie jest przedstawiać wektory w układzie współrzędnych, zaznaczając punkt początkowy, np. A o współrzędnych (3,1) i B (1,4).



Wektor, niebieski na rysunku, skierowany jest „w lewo w górę". Aby opisać to matematycznie, policzmy, że wzdłuż osi OX jest to przesunięcie o 2 w lewo (czyli o minus 2) i +3 wzdłuż osi OY. Wektorowi **AB** przypisujemy więc współrzędne [-2, 3].

<u>Jak obliczamy współrzędne wektora?</u>
Tak jak to zrobiliśmy na rysunku powyżej: od współrzędnych końca wektora, czyli punktu B(3,1) odejmujemy współrzędne początku wektora, czyli A(1,4)

AB = [3-1, 1-4]=[2, -3]

Innymi słowy

$$\mathbf{AB} = [a, b] = [x_B - x_A,\ y_B - y_A]$$

1.4. Wektor swobodny

Opisując wektor za pomocą jego współrzędnych, dokonaliśmy sporego uogólnienia: zapominamy, że wektor ma punkt zaczepienia. Jest to bardzo przydatne, również w fizyce. Prąd na Wiśle w Toruniu jest wszędzie taki sam: z lewa na prawo (patrząc ze Starego Miasta). I mewy na krze i łódka znoszone są zawsze z taką samą *prędkością dryfu*.

Fot. 4.4 Po Wiśle w Toruniu zimą żeglują tylko mewy na krze. Latem, łódka płynie w poprzek rzeki, ale jak mewy, też jest znoszona prądem (na tych zdjęciach w prawo).

W dalszej części tego kursu, będziemy traktować wektory jako wektory swobodne, czyli po prostu *uporządkowaną parę* liczb. Para ta określa kierunek, zwrot i wartość wektora.

Wektory można zapisywać w postaci standardowo stosowanej w geometrii: $\overrightarrow{OP} = \langle a,\ b\rangle$. Można także używać zapisu macierzowego: $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Wektor jest wówczas traktowany jak macierz składająca się z jednej kolumny.

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę o m wierszach i n kolumnach, postaci:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie a_{ij}, nazywany elementem macierzy, jest liczbą.
Liczbę wierszy m i liczbę kolumn n macierzy nazywamy jej wymiarem i oznaczamy $m \times n$.

W przestrzeni trójwymiarowej, każdy punkt opisywany jest za pomocą trzech współrzędnych. Zatem wektor w takiej przestrzeni także opisany jest za pomocą trzech współrzędnych.

Definicja 1.1

Wektorem w przestrzeni trójwymiarowej nazywamy uporządkowaną trójkę liczb (a, b, c). Liczby te nazywamy współrzędnymi wektora.

Jeżeli początkiem wektora $\boldsymbol{a}$ jest punkt O o współrzędnych (x_1, y_1, z_1) a końcem punkt P o współrzędnych (x_2, y_2, z_2), to wektor $\boldsymbol{a}$ można zapisać w postaci:

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, gdzie $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$, $c = z_2 - z_1$.

Definicja 1.2

Długością wektora nazywamy pierwiastek z sumy kwadratów jego współrzędnych.

Długość wektora $\boldsymbol{a}$ oznaczamy symbolem $|\boldsymbol{a}|$.
W przypadku wektora na płaszczyźnie wektor $\overrightarrow{OP}$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości odpowiednio a i b. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podobną zależność można wyprowadzić dla wektora w przestrzeni trójwymiarowej.

Przykład 1.1

Obliczyć długości wektorów:

a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b) $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149}$ □

Przykład 1.2

Dane są punkty P_1 (5, 6, -2) i P_2 (-3, 8, 7). Obliczyć współrzędne i długości wektorów $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_2P_1}$.

Rozwiązanie

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -3-5 \\ 8-6 \\ 7-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \begin{bmatrix} 5-(-3) \\ 6-8 \\ -2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-9)^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149} \quad \square$$

1.2 Podstawowe działania na wektorach

Podamy definicje i własności działań na wektorach w przestrzeni dwuwymiarowej. Działania w przestrzeni trójwymiarowej definiowane są analogicznie i mają analogiczne własności.

Definicja 1.4

Mówimy, że wektory o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ są równe, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicja 1.5

Sumą wektorów o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki, że

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$.

Różnicą wektorów o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki,

że $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \cdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$.

Iloczynem wektora $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ przez stałą k nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki, że $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{bmatrix}$.

Definicja 1.6

n wymiarowym wektorem zerowym nazywamy wektor $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definicja 1.7

Wektorem przeciwnym do wektora $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor $-\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \cdots \\ -a_n \end{bmatrix}$.

Zachodzą następujące własności.

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
b) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
c) $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$,
d) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Definicja 1.8

Dwa niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ mają ten sam kierunek, jeśli istnieje taka niezerowa liczba k, że $\boldsymbol{a} = k\,\boldsymbol{b}$. Jeśli ponadto:
$k > 0$, to wektory te mają ten sam zwrot,
$k < 0$, to wektory te mają zwrot przeciwny.

Przykład 1.3

Niech $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Znajdź:
a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,
b) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$,
c) $3\boldsymbol{a} - (3/2)\boldsymbol{b}$.

Rozwiązanie

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1+4 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1-3\cdot 4 \\ 3-3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) $3\boldsymbol{a} - \frac{3}{2}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3(-1) - \frac{3}{2}\cdot 4 \\ 3\cdot 3 - \frac{3}{2}\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-6 \\ 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ □

Definicja 1.9

Wersorem nazywamy wektor, którego długość jest równa 1.

Szczególnie przydatne w działaniach na wektorach są wersory związane z osiami kartezjańskiego układu współrzędnych.

W przestrzeni dwuwymiarowej są to wektory $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, natomiast w przestrzeni trójwymiarowej $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Każdy wektor można przedstawić w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

Przykład 1.4

Zapisać wektory $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} \quad \square$$

Widać stąd, że współrzędne wektora są zarazem współczynnikami tworzącej ten wektor kombinacji liniowej wersorów.

<u>1.3 Iloczyn skalarny wektorów.</u>

Definicja 1.10

Niech $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ **<u>o tych samych wymiarach</u>** nazywamy:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Z powyższej definicji wynika, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą.

Niektóre własności iloczynu skalarnego:

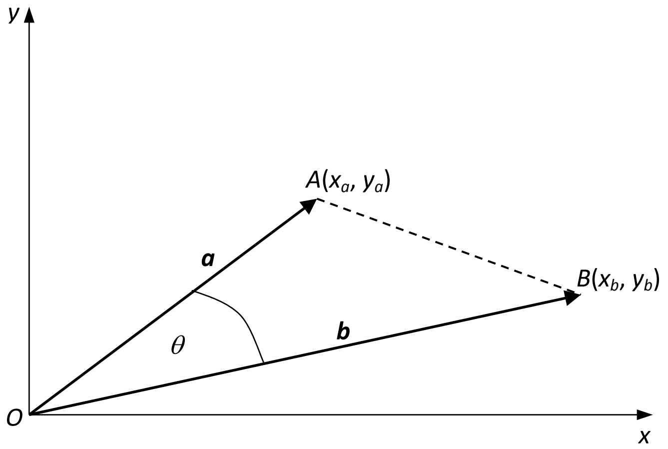
Niech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ będą wektorami i niech k będzie liczbą. Zachodzą następujące własności:
a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \lvert \boldsymbol{a} \rvert^2$,
b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$,
d) $(k\,\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$,
e) $\boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

Iloczyn skalarny jest często wykorzystywany do znajdowania kąta zawartego miedzy wektorami.

Definicja 1.11

Niech $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ będą wektorami niezerowymi zaczepionymi w jednym punkcie. Kątem między wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazywamy mniejszy z kątów wyznaczonych przez te wektory.

Na rysunku 11.4, kąt miedzy wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ oznaczony jest symbolem θ.



Rys. 11.4

Twierdzenie 1.1

Jeśli θ jest kątem miedzy niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to:
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\ \lvert\boldsymbol{b}\rvert \cos\theta$

Dowód:
Jeśli $\boldsymbol{b} \neq k\,\boldsymbol{a}$, o znaczy jeśli wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nie są równoległe, to mamy sytuację przedstawioną na rys. 11.4. Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta AOB otrzymujemy:

$$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2 = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2 + \lvert\boldsymbol{b}\rvert^2 - 2\,\lvert\boldsymbol{a}\rvert\ \lvert\boldsymbol{b}\rvert \cos\theta.$$

Zatem, podstawiając współrzędne poszczególnych wektorów, otrzymujemy:
$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = x_a^2 + y_a^2 + x_b^2 + y_b^2 - 2\,\lvert\boldsymbol{a}\rvert\ \lvert\boldsymbol{b}\rvert \cos\theta$.
Po podniesieniu nawiasów do kwadratu i zredukowaniu mamy:
$-2\,x_a\,x_b - 2\,y_a\,y_b = -\,2\,\lvert\boldsymbol{a}\rvert\ \lvert\boldsymbol{b}\rvert \cos\theta$, co po podzieleniu przez (-2) daje udowadnianą równość. □

Z powyższego twierdzenia wynikają ważne wnioski.

Wniosek 1.1

Jeśli θ jest kątem miedzy niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to: $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$

Wniosek 1.2

Dwa niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

Przykład 1.4
Sprawdzić ortogonalność wektorów:

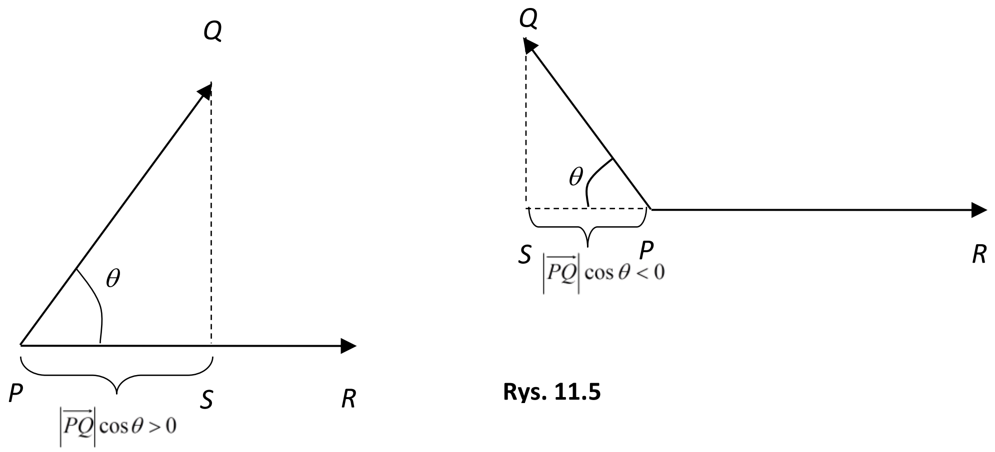
a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -17 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2 \cdot 3 + (-3)\cdot(-2) = 6 + 6 = 12$. Wektory nie są ortogonalne.

b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (-3)\cdot 2 + 5\cdot 8 + 2\cdot(-17) = -6 + 40 - 34 = 0$. Wektory są ortogonalne. □



Rys. 11.5

Jeśli wektory $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ i $\lvert\overrightarrow{PR}\rvert$ są zaczepione w tym samym punkcie, i jeśli punkt S jest rzutem ortogonalnym punktu Q na prostą wyznaczoną przez punkty P i R, to skalar $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert\cos\theta$

będziemy nazywali **komponentem wektora** $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ **wzdłuż** $\left|\overrightarrow{PR}\right|$. Zauważmy, że $\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta$ jest dodatni jeśli $0 \le \theta < \pi/2$ lub ujemny jeśli $\pi/2 < \theta \le \pi$. Dla $\theta = \pi/2$ komponent jest równy 0.

Zauważmy, że $\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PR}\right|}$ Wzór ten można zastosować do obliczania wartości pracy wykonanej przez siłę działającą pod kątem θ do kierunku ruchu przesuwanego ciała.

Załóżmy, że mamy do czynienia z sytuacją przedstawioną w pierwszej części rysunku 11.5, tzn. siła $\overrightarrow{PQ}$ przyłożona jest w punkcie P i powoduje przesunięcie tego punktu o wektor $\overrightarrow{PR}$. Wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest sumą wektorów $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SQ}$, a wektor $\overrightarrow{SQ}$ jako prostopadły do kierunku przesunięcia nie wpływa na przesunięcie punktu P. Wykonana praca może więc być zapisana w postaci :

$W = \left|\overrightarrow{PS}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|$,

gdzie

$\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\theta$.

Stąd

$$W = \left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|\cos\theta = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$$

Zatem

Twierdzenie 1.2

Praca wykonana przez stałą siłę $\overrightarrow{PQ}$, która spowodowała przesunięcie punktu przyłożenia siły o wektor $\overrightarrow{PR}$ jest równa iloczynowi skalarnemu wektorów $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$, $W = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$.

Przykład 1.5.

Wartość i kierunek stałej siły wyrażone są za pomocą wektora $\boldsymbol{a} = [5 \quad 2 \quad 6]^t$. Obliczyć pracę wykonaną przez tę siłę podczas przesuwania pewnego ciała z punktu $P(1, -1, 2)$ do punktu $R(4, 3, -1)$.

Rozwiązanie.

Najpierw obliczamy współrzędna wektora $\overrightarrow{PR}$.
Otrzymujemy $\overrightarrow{PR} = [3, 4, -3]^t$.
Zgodnie z twierdzeniem 11.2 wartością pracy jest:
$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot3 + 2\cdot4 + 6\cdot(-3) = 5$.

Jeśli przesunięcie wyrażone było w metrach a siła w niutonach, to jednostką pracy jest dżul. Możemy więc powiedzieć, że wykonana została praca $W = 5$ J. □

1.4 Iloczyn wektorowy.

Definicja 1.12

Niech $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Iloczynem wektorowym wektorów $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ oraz $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$.= $(a_2b_3 - b_2a_3)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$

Skrótowo można iloczyn wektorowy zapisać w postaci wyznacznika:

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Poniżej podano też metodę Sarrusa obliczenia takiego wyznacznika.

Praktyczne zastosowanie w rozwiązaniu zadania na str. 22.

Przykład 1.6

Znaleźć $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jeśli $\boldsymbol{a} = [2, -1, 6]^t$ i $\boldsymbol{b} = [-3, 5, 1]^t$.

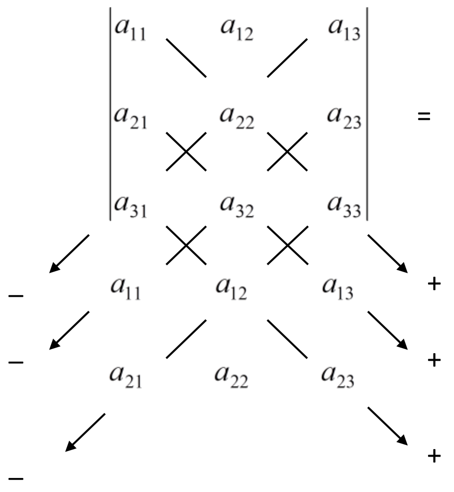
Rozwiązanie

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$= (-1 - 30)\boldsymbol{i} - (2 + 18)\boldsymbol{j} + (10 - 3)\boldsymbol{k} = -31\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} = [-31, -20, 7]^t$. □

Metoda Sarrusa

Wyznacznik trzeciego stopnia można obliczyć stosując skróconą metodę zwaną **metodą (regułą) Sarrusa**. Metoda ta odnosi się tylko i wyłącznie do wyznaczników stopnia trzeciego. Polega ona na dopisaniu pod odpowiadającą obliczanemu wyznacznikowi macierzą pierwszy, a potem drugi wiersz (alternatywą jest dopisanie po prawej stronie pierwszej, a następnie drugiej kolumny), przez co otrzymujemy następujący schemat:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Twierdzenie 1.3

Wektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jest ortogonalny do wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Dowód: Wystarczy wykazać, że $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = 0$ oraz $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

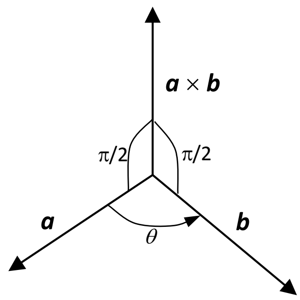
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 =$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3)a_1 - (a_1b_3 - b_1a_3)a_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)a_3 =$$

$$= a_2b_3\, a_1 - b_2a_3a_1 - a_1b_3\, a_2 + b_1a_3a_2 + a_1b_2\, a_3 - b_1a_2a_3 = 0.$$

Podobnie dowodzimy, że $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$. □

W interpretacji geometrycznej, rys. 11.6, twierdzenie 11.3 pokazuje, że jeśli wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zaczepione są w jednym punkcie, to iloczyn wektorowy $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jego zwrot wyznaczony jest za pomocą reguły śruby prawoskrętnej: obracając wektor $\boldsymbol{a}$ w stronę wektora $\boldsymbol{b}$ zgodnie ze strzałką, wybieramy zwrot wektora $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ wskazany przez „wkręcanie się" śruby prawoskrętnej.
Iloczyn wektorowy, podobnie jak skalarny, może być użyty do wyznaczania kąta między wektorami.



Rys. 11.6

Twierdzenie 1.4

Jeśli θ jest kątem między dwoma niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to $\lvert\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\rvert = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\ \lvert\boldsymbol{b}\rvert \sin\theta$

Z powyższego twierdzenia oraz z własności sin 0 = 0 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.3

Niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Iloczyn wektorowy ma następujące własności.

Twierdzenie 1.5

Jeśli $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ są dowolnymi wektorami, $\boldsymbol{0}$ jest wektorem zerowym, $m \neq 0$ jest skalarem, to: a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, c) $(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b})$, d) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$, e) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, f) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, g) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Zastosowania.

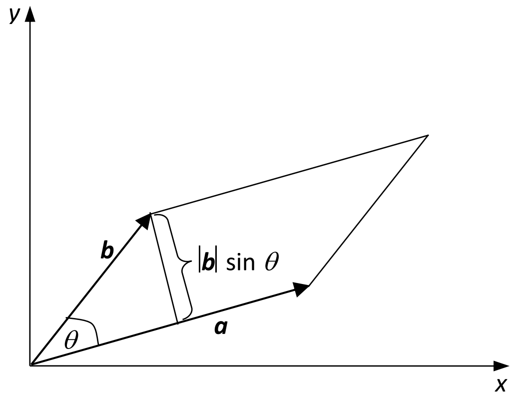
Twierdzenie 1.6

Pole równoległoboku, którego przyległymi bokami są wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, jest równe P = $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

Dowód.

Niech $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ będą przyległymi bokami równoległoboku, a θ niech będzie kątem między nimi, rys. 11.7. Ze wzoru na pole równoległoboku mamy:
P = $|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \sin \theta$.
Zatem zgodnie z twierdzeniem 11.4,

P = $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. □



Rys. 11.7

Przykład 1.6

Obliczyć pole równoległoboku, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty o współrzędnych (2, 5, 3), (1, -1, 3) i (5, 4, 2).

Rozwiązanie

Mając trzy kolejne wierzchołki możemy utworzyć trzy równoległoboki. Ponieważ pole każdego równoległoboku jest równe podwojonemu polu trójkąta utworzonego przez trzy kolejne wierzchołki, zatem pola tych równoległoboków będą jednakowe. Wystarczy wyliczyć pole jednego z nich, np. równoległoboku, którego przyległymi bokami są wektory $\boldsymbol{a}$ o początku w punkcie (1, -1, 3) i końcu w punkcie (2, 5, 3) oraz $\boldsymbol{b}$ o początku w punkcie (1, -1, 3) i końcu w punkcie (5, 4, 2).
Wektory te maja następujące współrzędne.
$\boldsymbol{a} = (2 - 1)\boldsymbol{i} + (5 + 1)\boldsymbol{j} + (3 - 3)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = (5 - 1)\boldsymbol{i} + (4 + 1)\boldsymbol{j} + (2 - 3)\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Zatem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 19\boldsymbol{k}$.

Zatem P = $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + (-19)^2} = \sqrt{36+1+361} = \sqrt{398}$. □

Zad. Czy wektory [1,1,1], [0,1,1] i [1,0,0] są liniowo niezależne?

Wektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... $\mathbf{a}_n$ są liniowo niezależne, jeśli żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych, to znaczy nie istnieje taki zestaw liczb a_1, a_2, ... a_n, że
$\boldsymbol{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{a_j}$ gdzie $j \neq i$.

Dla podanych trzech wektorów widać, że *nie* są one liniowo niezależne: pierwszy wektor jest sumą drugiego i trzeciego.

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Wektory są liniowo niezależne, gdy wyznacznik macierzy z nich utworzonej jest różny od zera. Sprawdźmy, że

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

Przedstaw wektor **w**=[2,2,3] w postaci kombinacji liniowej wektorów **a**=[1,0,1], **b**=[0,1,1] i **c**=[1,0,0]
Sprawdźmy, czy podane trzy wektory są liniowo niezależne

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -1$$ czyli te wektory są liniowo niezależne

Szukamy liczb *a, b, c* takich, że $a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c} = \mathbf{w}$

czyli
$$a\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$$

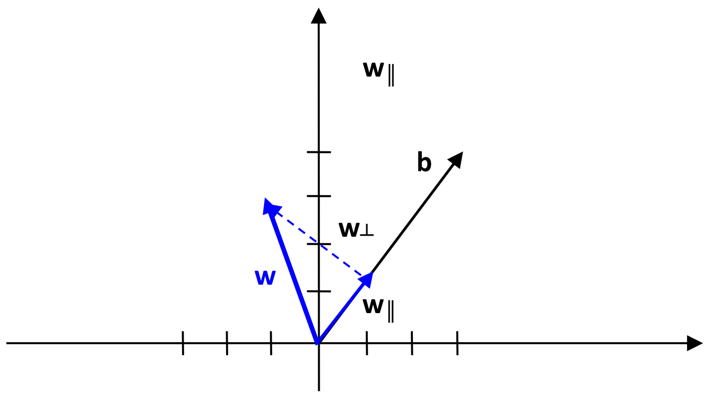
Jest to układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi, *a*, *b, c*.
Możemy go zapisać jako
$a + c = 2$
$b = 2$ (*)
$a + b = 3$, skąd otrzymujemy $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

Sprawdzamy:

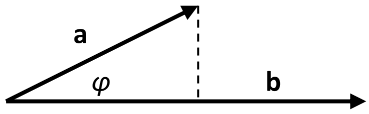
$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$$

Za pomocą kombinacji liniowej podanych tu wektorów **a**, **b**, **c** można przedstawić dowolny wektor w przestrzeni trójwymiarowej, mogą więc one stanowić *bazę* w takiej przestrzeni.

Zad. Dla wektora **w** = [- 1,3] znaleźć składową równoległą i prostopadłą do wektora **b** = [3,4]



Długość składowej równoległej $|\mathbf{w}_{\|}|$ znajdziemy z definicji iloczynu skalarnego.
Przypominamy



$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$

Zauważmy, że $|\mathbf{a}| \cos \varphi$ to rzut wektora **a** na wektor **b** czyli

$|\mathbf{a}| \cos \varphi = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) / |\mathbf{b}|$ (*)

Obliczmy dla podanych wektorów długość wektora **b**

$|\mathbf{b}| = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5$

Iloczyn skalarny wektora **w** [-1 , 3]
i wektora **b** [3 , 4]

wynosi -3+12 = 9, czyli długość rzutu wektora **w** na wektor **b** wynosi ze wzoru (*) $|\mathbf{w}_{\|}| = 9/5$.

Wektor $\mathbf{w}_{\|}$ znajdziemy mnożąc tę długość przez *wersor* (czyli wektor o długości 1) równoległy do wektora **b**

$\mathbf{w}_{\|} = \mathbf{w}_{\|} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{b}| = 9/25 \cdot [3,4] = [27/25 , 36/25]$ (porównaj na rysunku)

Ogólnie, wzór na wektor $\mathbf{a}_1$, będący składową wektora **a** równoległą do wektora **b** wynosi

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Składową prostopadłą do wektora **b** znajdziemy jako różnicę między wektorem **w** i $\mathbf{w}_{\|}$
$\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_{\|} = [-1, 3] - [27/25 , 36/25] = [-52/25 , 39/25]$ (porównaj na rysunku)

Sprawdźmy, jeszcze czy wektory $\mathbf{w}_{\perp}$ **i** $\mathbf{w}_{\|}$ są prostopadłe, czyli $\mathbf{w}_{\perp} \circ \mathbf{w}_{\|} = 0$

$$-\frac{52}{25}\frac{27}{25} + \frac{36}{25}\frac{39}{25} = 0$$

Inne rozwiązania zadań z algebry

Zad. Sprawdź czy relacja $R \subset N \times N$ (N-zbiór liczb naturalnych), określona przez $mRn \Leftrightarrow 2|(n+m)$ jest relacją równoważności. Jeśli tak, to znajdź zbiór ilorazowy.

Rozwiązanie:

Musimy sprawdzić, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia:

- *zwrotność* $\forall_{x \in N} : xRx$
  Relacja jest zwrotna ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej zachodzi $2|(x + x)$.

- *symetryczność* $\forall_{x,y \in N} : xRy \Rightarrow yRx$
  Relacja jest symetryczna ponieważ dla dowolnej pary liczb naturalnych, z prawa przemienności dodawania wynika, że jeżeli zachodzi relacja $xRy = 2|(x + y)$ to również musi zachodzić relacja $yRx = 2|(y + x)$.

- *przechodniość* $\forall_{x,y,z \in N} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Jeżeli zachodzą $xRy = 2|(x + y)$ oraz $yRz = 2|(y + z)$, to $x + y = 2k$, $y + z = 2l$ dla pewnych $k, l \in N$. Stąd wynika, że $(x + z) = 2\,(k + l - y)$, czyli zachodzi również $xRz = 2|(x + z)$. Zatem relacja R jest przechodnia.

Klasą abstrakcji dowolnego elementu $a \in N$ względem relacji R jest zbiór $[a]_R$ wszystkich liczb naturalnych o tej samej parzystości co a. Możemy zatem wyodrębnić dwie klasy abstrakcji dla danej relacji R:

- $K_1 = [0]_R = [2]_R = [4]_R = \ldots = \{x : x = 2n,\ n \in N_0\}$ - liczby naturalne parzyste
- $K_2 = [1]_R = [3]_R = [5]_R = \ldots = \{x : x = 2n+1,\ n \in N_0\}$ - liczby naturalne nieparzyste

Zbiór ilorazowy to zbiór wszystkich klas abstrakcji danej relacji równoważności: $N/R = \{K_1, K_2\}$.

Zad. Korzystając z tw. Kroneckera-Capellego sprawdź ile rozwiązań ma układ równań:

$$\begin{cases} -x - y + z + t = 4 \\ x - y - z + t = 0 \\ x - y - z - t = -8 \end{cases}$$

Przypomnienie:

Twierdzenie Kroneckera-Capellego:

Niech dany będzie układ równań liniowych $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, gdzie rząd macierzy $\boldsymbol{A}$ typu m x n (co oznacza, że n jest liczbą niewiadomych, a m określa liczbę równań) wynosi r, a rząd macierzy rozszerzonej układu $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ wynosi s. Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r = s$.

Z twierdzenia wynika, że:

- jeżeli $r = s = n$ – rozwiązanie układu wyznaczone jest jednoznacznie. Taki układ nazywamy oznaczonym.
- jeżeli $r = s < n$ – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów. Taki układ nazywamy nieoznaczonym.
- układ nie ma rozwiązań, kiedy rząd macierzy głównej nie jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej. Taki układ nazywamy sprzecznym.

Rozwiązanie:

- Zapisujemy rozpatrywany układ równań w postaci macierzowej $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Liczba równań $m = 3$, liczba niewiadomych $n = 4$.

- Tworzymy macierz rozszerzoną $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$:

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

- Wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy $\boldsymbol{U}$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej w celu wyznaczenia jednocześnie rzędów macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{U}$:

Do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy:

$$U \xrightarrow{w_2+w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

Do wiersza trzeciego dodajemy wiersz pierwszy:

$$\xrightarrow{w_3+w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Od wiersza trzeciego odejmujemy wiersz drugi:

$$\xrightarrow{w_3-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Uzyskana macierz schodkowa ma trzy niezerowe wiersze w części ***A***. Czyli rząd macierzy ***A*** jest równy rzędowi macierzy ***U***: $r = s = 3$. Zatem układ ma rozwiązania. Ponieważ r = s < n, układ jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru ($n - r = 4 - 3 = 1$).

- Przepisujemy układ równań korzystając ze schodkowej postaci macierzy ***A*** i ***U***:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} -x - y + z + t = 4 \\ -2y + 2t = 4 \\ -2t = -8 \end{cases}$$

Rozwiązując ostatni układ przez podstawienie i traktując x jako parametr otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 2 + x \\ t = 4 \end{cases}$$

Można sprawdzić dla kilku dowolnych wartości x, że powyższy wynik zawsze będzie rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań.

Zad. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wykorzystując rozwinięcie Laplace'a.

Przypomnienie:

Zgodnie z rozwinięciem Laplace'a, wyznacznik macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 2$ jest równy sumie iloczynów elementów i-tego wiersza lub j-tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych:

$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in}$ dla rozwinięcia względem i-tego wiersza

$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}$ dla rozwinięcia względem j-tej kolumny

gdzie D_{ij} to dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} powstałe z przemnożenia czynnika $(-1)^{i+j}$ przez minor elementu a_{ij}.

Rozwiązanie:

Wybieramy liczbę wierzy lub kolumn z największą ilością zer – w tym przypadku jest to trzecia kolumna. Dokonujemy rozwinięcia Laplace'a wyznacznika względem niezerowych elementów trzeciej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Wyznaczniki macierzy dopełnień (minory o wymiarach 3 x 3) liczymy metodą Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 20 + 56) - (16 + 35 + 4) = 78 - 55 = 23$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 25 + 8) - (20 + 5 + 6) = 36 - 31 = 5$$

Po podstawieniu do rozwinięcia Laplace'a i kilku elementarnych obliczeniach dostajemy szukany wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot 23 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 5 = -92 + 5 = -87$$

Zad. W zależności od wartości parametru a rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y - az = -1 \\ ax + y + az = 4 \\ 4x + y + 4z = a \end{cases}$$

Rozwiązanie

Jest to układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi x, y i z oraz parametrem a.

Do jego rozwiązania możemy posłużyć się np. metodą wyznaczników (wzory Cramera). Obliczmy wyznacznik główny:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & a \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a + 4.$$

Układ posiada jedno rozwiązanie, gdy wyznacznik główny jest różny od zera, tj.
(po otrzymaniu rozwiązań równania kwadratowego $-a^2 + 3a + 4 = 0$) dla $a \neq -1$ i $a \neq 4$.

Obliczmy teraz dalsze wyznaczniki (kolumnę współczynników kolejno przy x, y i z zastępujemy kolumną wyrazów wolnych – z prawej strony układu równań):

$$W_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ 4 & 1 & a \\ a & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3a - 20, \quad W_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 4 & a \\ 4 & a & 4 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 16a + 16,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 4 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 16.$$

Mamy tym samym określoną postać rozwiązania dla przypadków $a \neq -1$ i $a \neq 4$ (zgodnie z wzorami Carmera): $x = \dfrac{Wx}{W}$, $y = \dfrac{W_y}{W}$, $z = \dfrac{Wz}{W}$.

Pozostaje nam sprawdzić dwa inne przypadki:

1) Układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań) mielibyśmy wtedy, gdy wszystkie cztery wyznaczniki się zerują. Ponieważ wiemy już, że dla głównego wyznacznika jest to możliwe jedynie dla $a = -1$ lub $a = 4$, łatwo sprawdzić, że dla żadnej z tych dwóch liczb nie otrzymamy wszystkich wyznaczników równych zero. Nie jest zatem możliwe, by układ był nieoznaczony.
2) Sprawdzając wartości wyznaczników dla $a = -1$ lub $a = 4$, zapewne zauważyliście, że w pierwszym przypadku ($a = -1$) otrzymamy $W_y = 0$, ale przy niezerowych pozostałych dwóch wyznacznikach, zaś w drugim ($a = 4$) mamy co prawda $W_z = 0$, ale pozostałe dwa są różne od zera.
   Jest to cechą układu sprzecznego (brak rozwiązań).

Podsumowując powiemy, że rozważany układ ma jedno rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq 4$ oraz jest układem sprzecznym (nie ma rozwiązań) przy $a = -1$ lub $a = 4$.

Zad. Sprawdź, czy podane macierze są do siebie wzajemnie odwrotne:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{17}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

<u>Krótkie wyjaśnienie</u>

Załóżmy, że macierz A jest macierzą kwadratową stopnia n. Mówimy, że macierz B tego samego wymiaru jest <u>macierzą odwrotną do A</u>, jeżeli spełniona jest równość:
$A\cdot B=B\cdot A=I$.

<u>Uwaga:</u> Macierz A jest odwracalna, czyli posiada macierz odwrotną, wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera, czyli jest ona tzw. <u>macierzą nieosobliwą</u>.

Rozwiązanie:

a) Obliczymy iloczyn $A\cdot B$:

$A\cdot B=\begin{bmatrix}3-2 & -6-6\\ 1-1 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -12\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, czyli $A\cdot B\neq I$, a więc podane macierze nie są do siebie wzajemnie odwrotne. Oczywiście nie *musimy* już obliczać drugiego z iloczynów podanych w definicji macierzy odwrotnej.

b) Podobnie jak powyżej, obliczymy iloczyn:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}-\frac{17}{4}+5 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} & \frac{9}{4}-\frac{17}{4}+2 & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{2}{4}+\frac{2}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{8}+\frac{3}{8} & \frac{6}{8}+\frac{2}{8} & \frac{15}{8}-\frac{17}{8}+\frac{2}{8}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

zatem podane macierze są do siebie wzajemnie odwrotne.

Zad. Wyznacz macierz odwrotną:

a)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},$$

b)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>Krótkie wyjaśnienie</u>

Aby wyznaczyć macierz odwrotną do A, wykonujemy następujące czynności:

1) *Obliczamy wyznacznik macierzy A; jeśli* $\det A = 0$, to *macierz odwrotna nie istnieje,*
2) *Jeśli det A* $\neq 0$*, to obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A (dopełnieniem algebraicznym wyrazu* a_{ij} *macierzy A nazywamy wyznacznik podmacierzy powstałej z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny, pomnożony przez liczbę* $(-1)^{i+j}$*) dopełnienie algebraiczne wyrazu* a_{ij} *będziemy oznaczać przez* A_{ij}.
3) *Tworzymy macierz dopełnień:*

   $$D=\left[A_{ij}\right]_{i,j=1,\dots,n},$$

4) *Wyznaczamy macierz transponowaną do D*
5) *Macierzą odwrotną do A jest macierz*

   $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot D^{T}$$

Rozwiązanie:

a) Najpierw obliczymy wyznacznik macierzy A:

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5\neq 0$$

, zatem A jest odwracalna.

Obliczymy teraz dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów tej macierzy:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1,$$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Zauważmy, że w tym przypadku dopełnienia algebraiczne wyrazów są wyznacznikami macierzy wymiaru 1×1, czyli zawierającej tylko jeden wyraz. Taki wyznacznik jest równy temu wyrazowi.

Macierz *D* ma więc postać :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

zatem

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy wreszcie macierz

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wykonanych obliczeń, możemy obliczyć odpowiednie iloczyny:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem otrzymaliśmy poprawny wynik.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - (-1) - (-3) = 10 \neq 0$$

Zatem istnieje macierz odwrotna do *A*. Obliczymy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy *A*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 2) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 6) = 7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Otrzymujemy stąd macierz

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix},$$

następnie

$$D^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

i wreszcie

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wykonamy jeszcze sprawdzenie:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1+3+6 & -3+1+2 & -1+7-6 \\ -3+3 & 9+1 & 3-3 \\ 3-3 & 1-1 & 7+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = I,$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1+9 & -1+1 & -2+3-1 \\ -3+3 & 3+7 & 6+1-7 \\ -3+3 & 3-3 & 6+1+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = I$$

zatem wykonaliśmy poprawne obliczenia.