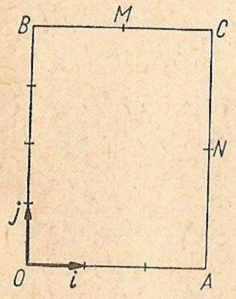
4° Współrzędna wektora względem osi. Niech wektor **a** tworzy kąt φ z osią Ox. Wtedy współrzędną wektora względem tej osi opisuje wzór

$$a_x = \mathrm{wsp}_x\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi = a\cos(\widehat{\mathbf{a}, Ox})$$

Współrzędna sumy wektorów względem osi jest równa sumie współrzędnych wektorów składowych względem tej osi,

$$\mathrm{wsp}_x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{wsp}_x\,\mathbf{a} + \mathrm{wsp}_x\,\mathbf{b}$$

372. Na bokach OA i OB prostokąta $OACB$ zostały odłożone wektory jednostkowe **i** oraz **j** (rys. 15). Wyrazić za pomocą **i** oraz **j** wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{BA}$, jeżeli $|OA| = 3$, a $|OB| = 4$.



Rys. 15

373. Niech na rys. 15 punkt M będzie środkiem boku BC, zaś punkt N środkiem boku AC. Wyznaczyć wektory $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, i $\overrightarrow{MN}$ gdy $|OA| = 3$, a $|OB| = 4$.

374. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (0; -2)$, $B = (4; 2)$ i $C = (4; -2)$. W początku układu współrzędnych przyłożono siły $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Narysować siłę $\overrightarrow{OM}$ równoważną tym siłom. Obliczyć jej współrzędne względem osi układu oraz jej wielkość liczbową. Wyrazić siły $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OM}$ przez wektory jednostkowe **i**, **j** układu osi współrzędnych.

375. Dane są trzy komplanarne wektory jednostkowy **m**, **n**, **p** przy czym $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = 30°$ i $(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{p}}) = 60°$. Narysować wektor $\mathbf{u} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n} - 3\mathbf{p}$ i obliczyć jego moduł.

Wskazówka. W łamanej zbudowanej z wektorów **m**, 2**n** i -3**p** przedłużyć pierwszy odcinek aż do przecięcia się z trzecim.

376. Udowodnić analitycznie i geometrycznie tożsamości wektorowe:

1) $\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$; 2) $\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$.

377. Na trzech niekomplanarnych wektorach $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ zbudować równoległościan. Wskazać przekątne równe wektorom: $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$ i $\mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{c}$.

378. Posługując się rysunkiem z zad. 377 wykazać własność przemienności dodawania wektorów: $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c} = \mathbf{a}-\mathbf{c}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}-\mathbf{c} = \mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{a}$.

379. Dane są wektory $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Wektor $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ jest środkową $\triangle OAB$. Przedstawić analitycznie i geometrycznie: 1) wektor **c** za pomocą wektorów **a** i **b**; 2) wektor **a** za pomocą wektorów **b** i **c**.

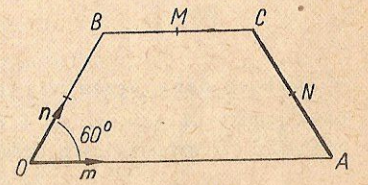
380. W prostokącie $OACB$ (rys. 15) M i N są środkami boków: $|BC| = 3$ i $|AC| = 4$. Wyrazić wektor $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ przez składowe o kierunkach wektorów $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{ON} = \mathbf{b}$.

Wskazówka. W warunku $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ wektory **a**, **b** i **c** wyrazić za pomocą **i**, **j** i przyrównać współczynniki po lewej i po prawej stronie przy **i** oraz **j**.

381. Dany jest regularny sześciokąt $OABCDE$ o boku $|OA| = 3$. Oznaczając wektory jednostkowe skierowane zgodnie z $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ przez **m**, **n**, **p** znaleźć zależność między nimi (na przykład rozpatrując trapez $OABC$). Wyrazić następnie przez **m** i **n** wektory $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{DA}$.

* * *

382. W równoramiennym trapezie $OACB$ (rys. 16) kąt $BOA = 60°$, $|OB| = |BC| = |CA| = 2$, a M i N są środkami boków BC i AC, Wyrazić wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ i $\overrightarrow{MN}$ przez wektory jednostkowe **m** i **n** o kierunkach $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.



Rys. 16

383. Dane są wektory **a** i **b** i kąt między nimi równy 120°. Zbudować wektor $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 1{,}5\mathbf{b}$ oraz obliczyć jego moduł, jeżeli $a = 3$, $b = 4$.

384. Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (3; 3)$, $B = (-3; 3)$ i $C = (-3; 0)$. W początku układu współrzędnych przyłożono siły $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Zbudować siłę wypadkową $\overrightarrow{OM}$, obliczyć jej współrzędne względem osi układu oraz jej moduł. Wyrazić siły $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OM}$ przez wersory **i**, **j** osi układu współrzędnych.

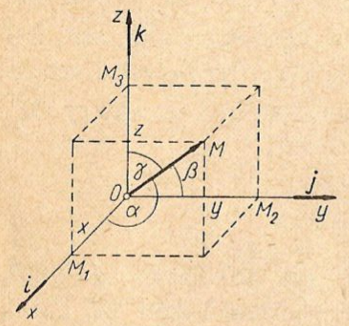
385. 1) W trapezie $OABC$ długość boku $|BC| = \frac{1}{3}|OA|$, przy czym $BC \parallel OA$. Wyrazić (geometrycznie i analitycznie) wektor $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ za pomocą składowych o kierunkach wektorów $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

Wskazówka. Z $\triangle OBC$ wektor **c** można wyrazić przez **b** i **a**, następnie rozwiązać otrzymane równanie względem **a**.

2) Punkt B dzieli łuk okręgu $\overarc{AC} = 90°$ w stosunku 1 : 2. Punkt O jest środkiem okręgu. Wyrazić wektor $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ przez wektory $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.

2.2. Prostokątne współrzędne punktu i wektora w przestrzeni

1° Definicja. Niech dane będą trzy wzajemnie prostopadłe osie współrzędnych o wspólnym początku O oraz punkt M (rys. 17). Współrzędne wektora wodzącego $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ względem osi układu współrzędnych $(OM)_x = x$, $(OM)_y = y$ i $(OM)_z = z$ nazywają się *współrzędnymi prostokątnymi* punktu M lub wektora $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.



Rys. 17

2° Wektor wodzący punktu w przestrzeni. Moduł lub długość wektora wodzącego $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ jest równy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

Wektory jednostkowe osi układu współrzędnych $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ oraz $\mathbf{k}$ nazywają się *wersorami osi*. Wektor wodzący wyraża się za pomocą wersorów osi wzorem

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{2}$$

3° Wektor dany przez współrzędne swego początku i końca. Niech dane będą punkty $A = (x_1; y_1; z_1)$ i $B = (x_2; y_2; z_2)$. Współrzędnymi wektora $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ względem osi współrzędnych będą:

$$\begin{aligned} (AB)_x &= X = x_2 - x_1 \\ (AB)_y &= Y = y_2 - y_1 \\ (AB)_z &= Z = z_2 - z_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Analogiczne do wzorów (1) i (2) mamy wzory

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} \tag{5}$$

Jeżeli α, β i γ są kątami, jakie tworzy niezerowy, wektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ z osiami układu współrzędnych, to:

$$\cos\alpha = \frac{X}{u}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{u}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{u} \tag{6}$$

przy czym

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{7}$$

tzn. *suma kwadratów cosinusów kierunkowych wektora jest równa* 1.

Ze wzorów (4), (5) i (6) wynika, że wektor $\mathbf{u}$ w zupełności jest określony trzema liczbami X, Y, Z, będącymi jego współrzędnymi. Dlatego niekiedy pisze się i mówi: dany jest wektor $\mathbf{u} = [X; Y; Z]$.

386. Dany jest punkt $M = (5; -3; 4)$; obliczyć długość oraz wyznaczyć kierunek jego wektora wodzącego.

387. Narysować wektor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ i obliczyć jego długość oraz wyznaczyć kierunek (sprawdzić za pomocą wzoru $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

388. Pewien wektor tworzy z osiami Ox i Oz kąty 40° i 80°. Obliczyć jego kąt względem osi Oy.

389. Wektor wodzący punktu M tworzy z osią Ox kąt 45°, a z osią Oy kąt 60°. Jego długość wynosi $r = 6$. Obliczyć współrzędne punktu M, jeżeli jej współrzędna z jest ujemna; wyrazić wektor $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ przez wersory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

390. Dane są punkty $A = (1; 2; 3)$ i $B = (3; -4; 6)$. Narysować wektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, jego rzuty na osie układu współrzędnych oraz obliczyć długość i oznaczyć kierunek wektora. Narysować kąty, jakie tworzy wektor $\mathbf{u}$ z osiami układu współrzędnych.

391. Zbudować równoległościan na wektorach $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{k} - 3\mathbf{j}$ oraz obliczyć długość jego przekątnych.

392. W punkcie $A = (2; 1; -1)$ została przyłożona siła $R = 7$ kG. Dane są dwie współrzędne tej siły $X = 2$ kG i $Y = -3$ kG. Wyznaczyć kierunek i koniec wektora przedstawiającego tę siłę.

393. Na płaszczyźnie xOy dane są punkty $A = (4; 2)$; $B = (2; 3)$ i $C = (0; 5)$ oraz wektory $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Wyrazić wektor $\mathbf{a}$ za pomocą składowych o kierunkach $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

* * *

394. Dane są punkty $A = (2; 2; 0)$ i $B = (0; -2; 5)$. Zbudować wektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, obliczyć jego długość i wyznaczyć kierunek.

395. Wektor $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ tworzy z osiami współrzędnych równe kąty ostre. Obliczyć te kąty i zbudować wektor $\mathbf{r}$, jeżeli jego długość wynosi $2\sqrt{3}$.

396. Pewien wektor tworzy z osiami Oy i Oz kąty 60° i 120°. Jaki kąt tworzy on z osią Ox?

397. Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku: $A = (1; -2; 3)$, $B = (3; 2; 1)$ i $C = (6; 4; 4)$. Znaleźć czwarty wierzchołek D.

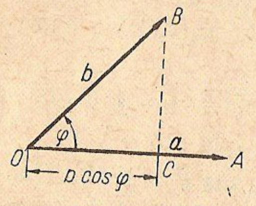
Wskazówka. Z równości $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ wynika, że równe są ich współrzędne: $x - 1 = 6 - 3$ itd.

398. Na płaszczyźnie xOy zbudować wektory $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ i $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Wyrazić wektor $\mathbf{c}$ za pomocą składowych kolinearnych z wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

2.3. Iloczyn skalarowy dwóch wektorów

1° Definicja. *Iloczynem skalarowym dwóch niezerowych wektorów nazywa się iloczyn ich modułów pomnożony przez cosinus kąta zawartego między nimi*; iloczyn skalarowy dwóch wektorów, z których przynajmniej jeden jest wektorem zerowym, jest równy zeru. Iloczyn skalarowy wektora $\mathbf{a}$ i wektora $\mathbf{b}$ oznacza się przez $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi, & \text{gdy} & \mathbf{a} \neq 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{b} \neq 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, & \text{gdy} & \mathbf{a} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{b} = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$



Rys. 18

Z rysunku 18 widać, że $b \cos \varphi = \text{wsp}_a \mathbf{b} = b_a$. Wobec tego

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi = a \, \text{wsp}_a \mathbf{b} = b \, \text{wsp}_b \mathbf{a} = ab_a = ba_b \tag{2}$$

2° Własności mnożenia skalarowego:

I. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ – przemienność mnożenia

II. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania

III. Jeżeli $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, to $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \pm ab$. W szczególności $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = aa \cos 0° = a^2$; stąd

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^2} > 0 \tag{3}$$

IV. Jeżeli $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, to $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos 90° = 0$.

V. Iloczyn skalarowy wersorów osi układu współrzędnych:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

VI. Jeżeli wektory dane są przez współrzędne, np. $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{4}$$

3° Kąt między niezerowymi wektorami:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \tag{5}$$

Warunek równoległości: $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ lub $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = m$.

Warunek prostopadłości: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ lub $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

399. Obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

400. Obliczyć kąty w $\triangle ABC$ o wierzchołkach $A = (2; -1; 3)$, $B = (1; 1; 1)$ i $C = (0; 0; 5)$.

401. Dane są punkty $A = (a; 0; 0)$, $B = (0; 0; 2a)$ i $C = (a; 0; a)$. Zbudować wektory $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{AB}$, obliczyć kąt między nimi.

402. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt o wierzchołkach $O = (0; 0)$, $A = (2a; 0)$ i $B = (a; -a)$. Obliczyć kąt zawarty między bokiem OB i środkową OM tego trójkąta.

403. Obliczyć kąt między dwusiecznymi kątów xOy i yOz.

404. Z wierzchołka kwadratu poprowadzono proste dzielące przeciwległe boki na połowy. Obliczyć kąt między tymi prostymi.

405. Obliczyć kąt między przekątnymi równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

406. Dane są wektory $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Obliczyć $\text{wsp}_b \mathbf{a} = a_b$ i $\text{wsp}_a \mathbf{b} = b_a$.

407. Wykonać działanie

$$(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} + (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})^2.$$

408. Obliczyć: 1) $(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$, jeżeli $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi, a kąt między nimi równa się 30°; 2) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$, jeżeli $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 135°$.

409. Otworzyć nawiasy w wyrażeniach 1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$; 2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$. Wyjaśnić sens geometryczny otrzymanych wzorów.

410. Dane są komplanarne wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$, przy czym $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60°$ i $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}}) = 60°$. Zbudować wektor $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ i obliczyć jego moduł posługując się wzorem

$$u = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})^2}$$

411. Obliczyć wartość siły wypadkowej czterech komplanarnych się przyłożonych w punkcie O, jeżeli wielkość każdej siły jest równa 10 kG, kąt zaś między dwiema kolejnymi siłami jest równy 45°

412. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi, między którymi zawarty jest kąt 60°.

413. Dany jest wektor $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi tworzącymi ze sobą kąt 120°. Znaleźć coś $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{m}})$ i cos $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{n}})$.

414. Obliczyć kąt między dwusiecznymi dwu płaskich kątów regularnego czworościanu poprowadzonymi z jednego wierzchołka.

Wskazówka. Jeżeli $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ są jednostkowymi wektorami krawędzi, to $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ i $\mathbf{m}+\mathbf{p}$ są wektorami równoległymi do dwusiecznych.

* * *

415. Na osiach Ox, Oy i Oz zostały odłożone równe odcinki $a = 4$ i na nich został zbudowany sześcian. Niech M będzie środkiem górnej ściany, zaś N środkiem prawej bocznej ściany sześcianu. Zbudować wektory $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{ON}$ i obliczyć kąt między nimi.

416. Dane są wektory $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, przy czym $a = 2$, $b = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60°$. Obliczyć kąt między środkową $\overrightarrow{OM}$ trójkąta AOB i bokiem $\overrightarrow{OA}$.

417. Z wierzchołka prostokąta o bokach 6 i 4 cm poprowadzono proste dzielące przeciwległe boki na połowy. Obliczyć kąt φ między nimi.

418. Dane są trzy kolejne wierzchołki równoległoboku: $A = (-3; -2; 0)$, $B = (3; -3; 1)$ i $C = (5; 0; 2)$. Znaleźć czwarty wierzchołek D i obliczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

419. Dane są punkty $A = (3; 3; -2)$, $B = (0; -3; 4)$, $C = (0; -3; 0)$ i $D = (0; 2; -4)$. Zbudować wektory $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$ oraz obliczyć współrzędną b_a.

420. W równobocznym trapezie $OACB$ (rys. 16) M i N są środkami boków $|BC| = 2$ i $|AC| = 2$. Kąt ostry trapezu ma 60°. Obliczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{ON}$.

421. Obliczyć kąt między wektorami $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ są wektorami jednostkowymi tworzącymi ze sobą kąt 120°.

422. Wykazać, że kąt między przekątnymi prostokąta zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) oblicza się wg wzoru:

$$\cos\varphi = +\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

423. Współrzędne wektora przesunięcia punktu względem osi współrzędnych równe są: $s_x = 2$ m, $S_y = 1$ m, $s_z = -2$ m, a współrzędne siły $\mathbf{F}$ działającej na ten punkt wynoszą: $F_x = 5$ kG, $F_y = 4$ kG i $F_z = 3$ kG. Obliczyć pracę A siły $\mathbf{F}$ ($A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$) i kąt między siłą $\mathbf{F}$ a wektorem przesunięcia $\mathbf{s}$.

424. W wierzchołku foremnego czworościanu o krawędzi a zostały przyłożone trzy siły równe jego krawędziom. Znaleźć siłę wypadkową.

Wskazówka. Szukana wielkość jest równa $a\sqrt{(\mathbf{m}+\mathbf{n}+\mathbf{p})^2}$, gdzie $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ i $\mathbf{p}$ są wektorami jednostkowymi danych sił.

425. Dzielimy kwadrat na trzy równe pasy (prostokąty) i budujemy z nich ściany boczne prawidłowego pryzmatu trójkątnego. Obliczyć kąt między dwoma sąsiednimi odcinkami łamanej powstałej w ten sposób (na ścianach bocznych pryzmatu) z przekątnej kwadratu.

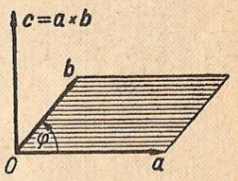
2.4. Iloczyn wektorowy pary wektorów

1° Definicja. Iloczynem wektorowym wektora $\mathbf{a}$ i niekolinearnego z nim wektora $\mathbf{b}$ nazywamy taki wektor $\mathbf{c}$ (rys. 19), który:

1) ma moduł równy liczbowo polu równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$;

2) jest prostopadły do płaszczyzny tego równoległoboku;

3) w przypadku prawej orientacji przestrzeni jest skierowany w tę stronę, z której obrót o kąt mniejszy z dwu możliwych od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$ widać jako niezgodny z obrotem wskazówek zegara. Taki układ wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nazywamy *układem prawoskrętnym*. Gdy wektor $\mathbf{c}$ jest skierowany przeciwnie, układ nazywamy *lewoskrętnym*.



Rys. 19

Iloczyn wektorowy dwu wektorów kolinearnych jest równy zeru.
Iloczyn wektorowy oznacza się przez $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lub $[\mathbf{ab}]$. Zatem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

jeżeli
$$\begin{cases} 1)\ c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\varphi \\ 2)\ \mathbf{c} \perp \mathbf{a} \text{ i } \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \\ 3)\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ tworzą układ prawoskrętny (lub lewoskrętny [1]).} \end{cases}$$

2° Własności iloczynu wektorowego:

I. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ – antyprzemienność mnożenia,

II. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania,

III. Jeżeli $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$; w szczególności $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

3° Iloczyn wektorowy wersorów osi układu współrzędnych

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{1}$$

Ogólnie pomnożenie dowolnych dwóch różnych wersorów osi układu można przedstawić następująco:

$$\underleftarrow{\overrightarrow{\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k}\ \mathbf{i}\ \mathbf{j}}^{\,+}}_{-}$$

[1]) W przypadku lewej orientacji przestrzeni.

gdzie pomnożenie w kolejności oznaczonej strzałką u góry daje wektor ze znakiem +, zaś w kolejności przeciwnej wektor ze znakiem −.

4° Wyrażenie iloczynu wektorowego za pomocą współrzędnych wektorów $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_z & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

5° Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach **a** i **b**:

$$S_{\square} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{3}$$

Pole trójkąta zbudowanego na wektorach **a** i **b**

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{4}$$

426. Znaleźć wektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jeżeli: 1) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; 3) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach **a** i **b**.

427. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach: $A = (7; 3; 4)$, $B = (1; 0; 6)$ i $C = (4; 5; -2)$.

428. Zbudować równoległobok na wektorach $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ oraz obliczyć jego pole i wysokość.

429. Wykonać działania i uprościć wyrażenia:

1) $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$;
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$;
3) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
4) $2\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 3\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 4\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$.

430. Wykazać, że $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ i wyjaśnić znaczenie geometryczne tej tożsamości.

431. Wektory **a** i **b** tworzą ze sobą kąt 45°. Obliczyć pole trójkąta rozpiętego na wektorach $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ i $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, jeżeli $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$.

432. Obliczyć pole równoległoboku, którego przekątnymi są wektory $2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ i $4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, gdzie **m** i **n** są wektorami jednostkowymi tworzącymi ze sobą kąt 45°.

Wskazówka. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ i $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$, gdzie **a** i **b** są to boki równoległoboku traktowane jako wektory. Mnożąc wektor $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ przez $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ znajdziemy wektor $2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, którego moduł jest równy podwojonemu poszukiwanemu polu.

* * *

433. Zbudować wektory $\mathbf{a} = 3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ i $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Obliczyć moduł wektora **c** i pole trójkąta zbudowanego na wektorach **a** i **b**.

434. Zbudować trójkąt o wierzchołkach $A = (1; -2; 8)$, $B = (0; 0; 4)$ i $C = (6; 2; 0)$. Obliczyć jego pole i wysokość BD.

435. Obliczyć przekątne i pole równoległoboku zbudowanego na wektorach: $\mathbf{a} = \mathbf{k} - \mathbf{j}$ i $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

436. Wykazać, że $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 3\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

437. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ i $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$, gdzie **m** i **n** są wektorami jednostkowymi tworzącymi ze sobą kąt 30°.

2.5. Iloczyn mieszany trójki wektorów

1° Definicja. Iloczynem mieszanym trójki wektorów **a**, **b** i **c** nazywa się wyrażenie $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Jeżeli wektory **a**, **b** i **c** są wyrażone przez współrzędne, to

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

2° Własności iloczynu mieszanego:

Iloczyn mieszany zmienia znak w wyniku przestawienia dwóch dowolnych czynników

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \tag{2}$$

II. Jeżeli dwa spośród trzech danych wektorów są równe lub równoległe, to ich iloczyn mieszany jest równy zeru.

III. Znaki operacji iloczynu skalarowego (kropka) i wektorowego (krzyżyk) można przestawiać miejscami

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

wobec czego iloczyn mieszany można oznaczać **abc**, tzn. bez znaków działań i bez nawiasów.

3° Objętość równoległościanu zbudowanego (rozpiętego) na wektorach **a**, **b** i **c**

$$V_{równ} = \pm\, \mathbf{abc} \begin{cases} + \text{ przy prawoskrętnym układzie wektorów } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \\ - \text{ przy lewoskrętnym[1] układzie wektorów } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \end{cases}$$

[1] Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego (str. 67) przyjmujemy prawą orientację przestrzeni.

Objętość czworościanu zbudowanego na wektorach **a**, **b**, **c**

$$V_{czw} = \frac{1}{6} |\mathbf{abc}|$$

4° Warunek komplanarności. Jeżeli **a**, **b** i **c** są komplanarne, to $\mathbf{abc} = 0$, i odwrotnie, oraz między **a**, **b** i **c** istnieje zależność o postaci $m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} = 0$, przy czym $m^2 + n^2 + c^2 > 0$.

438. Zbudować równoległościan na wektorach $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ i obliczyć jego objętość. Czy układ wektorów **a**, **b**, **c** jest lewoskrętny, czy prawoskrętny?

439. Zbudować czworościan o wierzchołkach $O = (0; 0; 0)$, $A = (5; 2; 0)$, $B = (2; 5; 0)$ i $C = (1; 2; 4)$ i obliczyć jego objętość, pole ściany ABC oraz wysokość czworościanu spuszczoną na tę ścianę.

440. Wykazać, że punkty $A = (2; -1; -2)$, $B = (1; 2; 1)$, $C = (2; 3; 0)$ i $D = (5; 0; -6)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

441. Wykazać, że wektory $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ i $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ są komplanarne i rozłożyć wektor **c** na składowe o kierunkach wektorów **a** i **b**.

442. Wykazać, że: 1) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}] = -\mathbf{abc}$;
2) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})] = 3\mathbf{abc}$.

443. Obliczyć objętość czworościanu zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, jeżeli wektory te są skierowane zgodnie z dwusiecznymi kątów między osiami układu współrzędnych, zaś długość każdego wektora jest równa 2.

* * *

444. Zbudować czworościan o wierzchołkach $A = (2; 0; 0)$, $B = (0; 3; 0)$, $C = (0; 0; 6)$ i $D = (2; 3; 8)$ oraz obliczyć jego objętość i wysokość spuszczoną na ścianę ABC.

445. Zbudować wektory $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ i wykazać, że są one komplanarne. Wyznaczyć zależność liniową między tymi wektorami.

446. Wykazać, że objętość równoległościanu zbudowanego na przekątnych ścian danego równoległościanu jest równa podwojonej objętości danego równoległościanu.

447. Dane są wektory jednostkowe **m**, **n** i **p**. Kąt $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \widehat{[\mathbf{p}, (\mathbf{m} \times \mathbf{n})]} = \alpha$. Wykazać, że $(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

448. Przy dowolnych wektorach **a**, **b** i **c** wektory $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ i $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ są komplanarne. Wykazać to analitycznie i geometrycznie (rozpatrując równoległościan zbudowany na wektorach **a**, **b** i **c**).

449. Obliczyć objętość równoległościanu $OABCO_1A_1B_1C_1O$, w którym dane są trzy wierzchołki dolnej podstawy: $O = (0; 0; 0)$, $A = (2; -3; 0)$ i $C = (3; 2; 0)$ oraz wierzchołek górnej podstawy $B_1 = (3; 0; 4)$ leżący na krawędzi BB_1 przeciwległej krawędzi OO_1.