Wektory

Kombinacja liniowa wektorów $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}$

Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ jedynie dla $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Iloczyn wektorowy
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) \vec{e_\perp} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$
gdzie $\vec{e_\perp} \perp \vec{a}$ i $\vec{e_\perp} \perp \vec{b}$ oraz wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{e_\perp}$ tworzą układ prawoskrętny.

Iloczyn mieszany
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \equiv \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$
$$= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Podwójny iloczyn wektorowy $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Pochodna wektora
$$\frac{d\vec{a(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a_x(t), a_y(t), a_z(t) \right) = \left(\frac{da_x(t)}{dt}, \frac{da_y(t)}{dt}, \frac{da_z(t)}{dt} \right)$$

Całka wektora
$$\int dt\, \vec{a}(t) = \int dt\, (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = \left(\int dt a_x(t), \int dt a_y(t), \int dt a_z(t)\right)$$

Zadania II

1. Rozłożyć wektor $\vec{w}$ na składowe wzdłuż wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (geometrycznie i algebraicznie) oraz na składowe wzdłuż wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (algebraicznie):

$\vec{w}$	$\vec{a}$	$\vec{b}$
$(5, 5)$	$(2, 1)$	$(1, 3)$
$(5, -3)$	$(1, 3)$	$(-1, 3)$
$(0, 5)$	$(-2, -1)$	$(2, -4)$
$(1, 2)$	$(-3, 1)$	$(-2, -4)$
$(3, 3)$	$(-1, 2)$	$(2, -4)$

$\vec{w}$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$(0, 2, 6)$	$(1, 1, 1)$	$(1, -1, 1)$	$(-1, 1, 1)$
$(2, -3, 1)$	$(-1, 1, -1)$	$(-1, -1, -1)$	$(1, -1, 1)$
$(-1, -3, 2)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(0, 0, 1)$
$(-1, -3, 2)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(1, 1, 1)$
$(2, 5, -2)$	$(3, 1, -2)$	$(2, -3, -3)$	$(0, -3, -4)$
$(3, 2, -7)$	$(3, -2, 1)$	$(1, -2, 3)$	$(4, 0, -1)$
$(7, -3, 0)$	$(2, 3, -3)$	$(1, 4, -5)$	$(1, -1, 2)$

2. Dla jakich wartości parametru p wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne?

$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$(2, -3, 4)$	$(0, -1, 2)$	$(-2, 2, p)$
$(-3, 2, -2)$	$(1, p, 1)$	$(3, -2, 3)$
$(3, -2, -1)$	$(-2, 3, 4)$	$(p, -2, -3)$
$(2, -1, 1)$	$(3, p, -3)$	$(-4, 2, 2)$

3. W dowolnym pięciokącie poprowadzono 5 wektorów ze środka każdego boku do przeciwległego wierzchołka. Wykazać, że suma tych wektorów jest równa zeru. Jaki ogólny wniosek można wysnuć z tego zadania?

4. Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tworzą boki trójkąta ABC. Wykazać, że jeżeli punkty D, E i F dzielą odpowiednio boki BC, CA i AB w stosunku $m : n$, to z wektorów $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CF}$ można zbudować trójkąt.

5. Wykazać, że jeżeli wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ i $\vec{D}$ mają wspólny początek, a ich końce leżą na jednej płaszczyźnie to $\vec{D} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$, gdzie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

6. Rozłozyć wektor $\vec{p}$ na składowe prostopadłą i równoległą do wektora $\vec{q}$, oraz odwrotnie - wektor $\vec{q}$ względem wektora $\vec{p}$, dla:

$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{p}$	$\vec{q}$
$(1,8)$	$(2,-3)$	$(1,1,1)$	$(1,-1,1)$
$(-5,2)$	$(0,-4)$	$(2,-1,3)$	$(0,1,1)$
$(-1,4)$	$(2,-8)$	$(-2,-3,6)$	$(4,0,-1)$
$(5,-1)$	$(3,-1)$	$(-3,-1,1)$	$(2,-1,5)$

7. Wyznaczyć wektor jednostkowy prostopadły do wektorów $\vec{a} = (1,-1,0)$ i $\vec{b} = (1,1,1)$.

8. Wektor $\vec{A} = (2,1)$ ma początek w punkcie $(0,0)$. Znaleźć wektor prostopadły do niego o początku w punkcie $(2,-1)$ i końcu leżącym na wektorze $\vec{A}$.

9. Udowodnić, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

10. Znaleźć składowe wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$ równoległą i prostopadłą do wektora $\overrightarrow{P_1P_3}$ dla punktów $P_1(1,2,-1)$, $P_2(0,4,-3)$ i $P_3(-1,-2,3)$.

11. Znaleźć odległość punktu $A(2,3,1)$ od prostej zadanej parametrycznie $\vec{r} = \vec{p} + \mu\vec{q}$ dla $\vec{p} = (2,-1,3)$ i $\vec{q} = (1,1,-2)$.

12. Jeżeli wektor $\vec{a}$ leży na płaszczyźnie, to jego cosinusy kierunkowe spełniają relację $\cos^2(\varphi_x) + \cos^2(\varphi_y) = 1$, gdyż $\cos(\varphi_y) = \sin(\varphi_x)$. Znaleźć relację wiążącą cosinusy kierunkowe wektora w przestrzeni trójwymiarowej.

13. Wektor $\vec{a}$ tworzy z osią OX kąt 60^o, a z osią OZ kąt 135^o. Jaki jest kąt pomiędzy wektorem $\vec{a}$ i osią OY?

14. Pewien wektor tworzy z osiami układu kartezjańskiego kąty α, 2α i 3α. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości kąta α.

15. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $L_1(0,0,1)$, $L_2(0,1,0)$, $L_3(-1,0,1)$ i $L_4(1,-1,0)$.

16. W punktach $A(-2,-1,0)$ i $B(-3,2,1)$ zaczepione są dwa wektory: $\overrightarrow{AC} = (2,-4,1)$ i $\overrightarrow{BD} = (0,-4,3)$. Jeżeli wektory te nie leżą w jednej płaszczyźnie to można na nich zbudować równoległościan (Jak? Czy w sposób jednoznaczny?). Obliczyć jego objętość.

17. Wektory $\overrightarrow{AB} = (0,-4,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,0,-4)$ i $\overrightarrow{AD} = (4,0,0)$ tworzą krawędzie pewnego czworościanu. Obliczyć pole powierzchni tego czworościanu.

18. Wyrazić w prostszej formie (tzn. w postaci wymagającej prostszych obliczeń) następujące iloczyny:
    (a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$
    (b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$
    (c) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$
    (d) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})$

19. Wykazać słuszność następujących relacji:
    (a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\left[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\right] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$
    (b) $(\vec{a}\times\vec{b})^2(\vec{a}\times\vec{c})^2 - \left[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})\right]^2 = a^2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$

20. Wykazać, że jeżeli $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nie leżą na jednej płaszczyźnie, to dla dowolnego $\vec{d}$ zachodzi relacja
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a} + [\vec{a},\vec{d},\vec{c}]\vec{b} + [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}$$

21. Z wersorów $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ zbudować potrójny iloczyn wektorowy typu $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ o największej wartości.

22. Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znaleźć wektor $\vec{c}$ spełniający relacje: $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{b}$ i $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$.

23. Dane są niezerowe wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ oraz parametry liczbowe α i β. Wyznaczyć wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ spełniające układ równań: $\alpha\vec{x}+\vec{y}\times\vec{c} = \vec{a}$ oraz $\beta\vec{y}+\vec{x}\times\vec{c} = \vec{b}$. Podać wzór ogólny oraz rozwiązanie dla $\vec{a} = (5,-3,0)$, $\vec{b} = (6,1,-5)$, $\vec{c} = (1,-1,-1)$, $\alpha = 2$ i $\beta = -1$.