STATYKA PUNKTU I BRYŁY

OBLICZANIE ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI

Położenie środka ciężkości dowolnej figury (bryły) określa się wg wzorów

$$x_c = \frac{S_y}{A} \qquad y_c = \frac{S_x}{A}$$

gdzie A — pole powierzchni figury

S_x, S_y — tzw. statyczne momenty bezwładności,

ogólnie $S_x = \int_A y \, dA$, $S_y = \int_A x \, dA$

lub – dla figur, dla których znamy położenie środka ciężkości

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{ci} \; , \; S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i x_{ci}$$

gdzie A_i, x_{ci}, y_{ci} oznaczają odpowiednio pole powierzchni oraz współrzędne środka ciężkości i-tej figury składowej.

Wzory z całkowaniem wykorzystamy w zadaniach 135 (poniżej) i domowym 136, sumowanie (z podziałem na mniejsze figury) w zadaniach 121 i 123 (oraz domowych 122 i 124). Pierwsze zadanie obliczymy odnosząc się do obliczeń środka masy.

Zad. 117

Dane: $Q_1 = 19\,MN$, $y_1 = 6m$

$Q_2 = 4{,}5\,MN$, $y_2 = 3m$

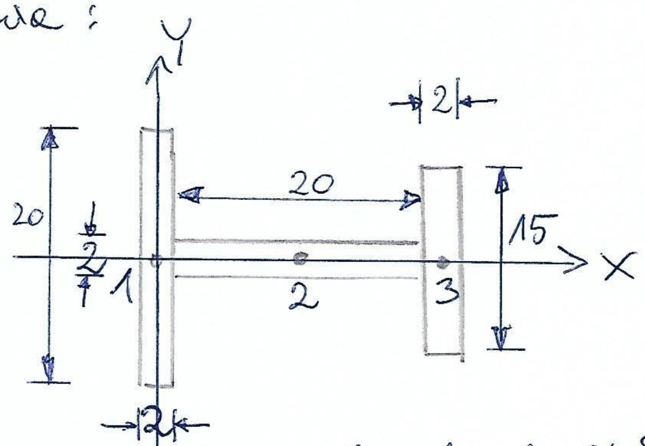
$Q_3 = 5\,MN$, $y_3 = 4.6m$

Zapiszemy wzór, który jest analogiczny do wzoru określającego środek masy:

$$y_c = \frac{\sum Q_i \cdot y_i}{\sum Q_i} = \frac{19\cdot 6 + 4{,}5\cdot 3 + 5\cdot 4{,}6}{19+4{,}5+5} \approx 5{,}28\ m.$$

Zad. 121

Przyjmiemy układ odniesienia tak, by uprościć obliczenia:



Możemy na podstawie danych określić pole powierzchni i położenie środków ciężkości figur 1, 2, 3:

$A_1 = 40 \quad x_{c1} = 0 \quad y_{c1} = 0$

$A_2 = 40 \quad x_{c2} = 11 \quad y_{c2} = 0$

$A_3 = 30 \quad x_{c3} = 22 \quad y_{c3} = 0$

Obliczamy środek ciężkości całej figury, złożonej z trzech mniejszych:

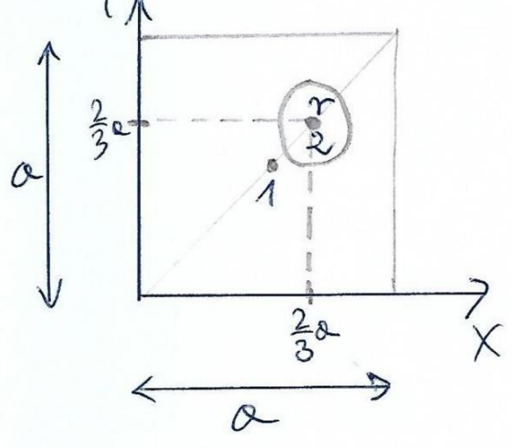
$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{0\cdot 40 + 11\cdot 40 + 22\cdot 30}{40+40+30} = \frac{1100}{110} = 10$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{0\cdot 40 + 0\cdot 40 + 0\cdot 30}{110} = 0$$

Uwaga: W odpowiedzi, zgodnie z zaznaczoną pozycją x_c na rys. 70, podajemy $x_c = 9$.

Uwaga 2: Jeśli w figurze, której środek ciężkości określamy, występuje otwór, obliczając statyczne momenty bezwładności, odejmujemy, a nie dodajemy stosowne iloczyny – patrz zad. 123 poniżej. Również pole powierzchni otworu odejmujemy.

Zad. 123



Możemy zapisać współrzędne środków ciężkości oraz pola powierzchni figur 1 (kwadratu) i 2 (koła wyciętego):

$x_{c1} = \frac{1}{2}a \quad y_{c1} = \frac{1}{2}a \quad A_1 = a^2$

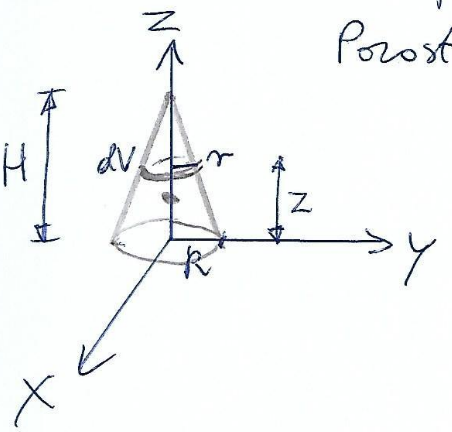
$x_{c2} = \frac{2}{3}a \quad y_{c2} = \frac{2}{3}a \quad A_2 = \pi r^2$

Ze względu na symetrię:

$$x_c = y_c = \frac{\frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}\pi r^2 a}{a^2 - \pi r^2}$$

Zad. 135

Układ odniesienia przyjmiemy tak, aby $x_c = y_c = 0$



Pozostaje więc tylko określić z_c.

Dla bryły

$$x_c = \frac{S_{yz}}{V}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{V},$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{V}$$

Z kolei $S_{yz} = \int_V x\,dV$, $S_{xz} = \int_V y\,dV$, $S_{xy} = \int_V z\,dV$

oraz $V = \int_V dV$.

Całkowanie po objętości zastąpimy całkowaniem wzdłuż osi z (od 0 do H, gdzie H – wysokość stożka), rozważmy zaznaczoną na rysunku objętość elementarnej warstwy dV:

$$dV = \pi r^2 \cdot dz$$, gdzie r – promień tej warstwy

Z podobieństwa trójkątów możemy zapisać związek:

$$\frac{H-z}{r} = \frac{H}{R} \Rightarrow r = \frac{H-z}{H} \cdot R$$

$$dV = \pi \frac{(H-z)^2}{H^2} \cdot R^2 \, dz$$

Sprawdźmy, jak zadziała całkowanie zgodnie

(5)

z definicji objętości:

$$V=\int_V dV=\int_0^H \frac{\pi}{H^2}R^2(H-z)^2dz=\frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H k^2dk=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{1}{3}k^3\right]_0^H=$$

podst.: $k=H-z$

$dk=-dz$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H.$$

Otrzymaliśmy poprawny wzór na objętość stożka.
Możemy teraz obliczyć statyczny moment bezwładności S_{xy}:

$$S_{xy}=\int_V z\,dV=\int_0^H\frac{\pi}{H^2}R^2 z(H-z)^2dz=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\int_0^H(H^2z-2Hz^2+z^3)dz\right]$$

$$=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{1}{2}H^2z^2-\frac{2}{3}Hz^3+\frac{1}{4}z^4\right]_0^H=$$

$$=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(\frac{1}{2}H^4-\frac{2}{3}H^4+\frac{1}{4}H^4\right)=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{1}{12}H^4=\frac{\pi R^2H^2}{12}$$

Podstawiamy do wzoru na z_c:

$$z_c=\frac{S_{xy}}{V}=\frac{\frac{\pi R^2H^2}{12}}{\frac{1}{3}\pi R^2H}=\frac{H}{4}.$$

(w $\frac{3}{4}$ wysokości, licząc od góry)

UWAGA: Warto też przeanalizować przykłady wyznaczania środków ciężkości figur, wycinka koła, różnych elementów konstrukcji zamieszczonych na stronie

https://obliczeniowo.com.pl/97