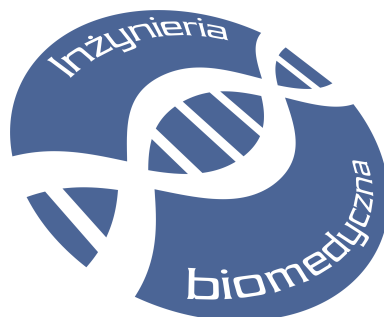


Politechnika Gdańska, międzywydziałowy kierunek "Inżynieria Biomedyczna"



Skrypt do przedmiotu

## Repetitorium z Fizyki

Opracowanie:

mgr inż. Justyna Szostak  
dr Małgorzata Obarowska  
mgr Tomasz Neumann  
dr inż. Kamila Żelechowska  
mgr inż. Małgorzat Molin

Gdańsk, 2011



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt "Przygotowanie i realizacja kierunku inżynieria biomedyczna - studia międzywydziałowe"

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Kinematyka punktu materialnego.</b>	<b>3</b>
1.1	Wstęp teoretyczny . . . . .	3
1.2	Zadania . . . . .	5
1.3	Rozwiązania . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Dynamika punktu materialnego i bryły sztywnej.</b>	<b>24</b>
2.1	Wstęp teoretyczny . . . . .	24
2.2	Zadania z rozwiązaniami . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Ruch obrotowy bryły sztywnej</b>	<b>37</b>
3.1	Wstęp teoretyczny . . . . .	37
3.2	Zadania . . . . .	39
3.3	Rozwiązania . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Zasady zachowania w mechanice.</b>	<b>50</b>
4.1	Wstęp teoretyczny . . . . .	50
4.1.1	Pęd. Zasada zachowania pędu . . . . .	50
4.1.2	Zasada zachowania momentu pędu . . . . .	51
4.1.3	Praca . . . . .	52
4.1.4	Moc . . . . .	53
4.1.5	Energia kinetyczna . . . . .	53
4.1.6	Energia potencjalna grawitacji . . . . .	54
4.1.7	Zasada zachowania energii mechanicznej . . . . .	55
4.2	Zadania . . . . .	57
4.3	Rozwiązania . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Termodynamika. Kinetyczna teoria gazów.</b>	<b>73</b>
5.1	Wstęp teoretyczny . . . . .	73
5.2	Zadania z rozwiązaniami . . . . .	80
5.3	Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	89
5.4	Założenia teorii kinetyczno-molekularnej gazów: model gazu doskonałego . . . . .	91
5.5	Zadania . . . . .	94
5.6	Rozwiązania . . . . .	95

<b>6</b>	<b>Drgania mechaniczne. Ruch falowy.</b>	<b>97</b>
6.1	Wstęp . . . . .	97
6.1.1	Oscylator harmoniczny prosty . . . . .	97
6.1.2	Składanie drgań, dudnienia . . . . .	99
6.1.3	Oscylator harmoniczny tłumiony . . . . .	100
6.1.4	Oscylator wymuszony. Rezonans . . . . .	102
6.1.5	Ruch falowy . . . . .	103
6.1.6	Funkcja falowa . . . . .	103
6.1.7	Fale stojące . . . . .	105
6.1.8	Efekt Dopplera . . . . .	105
6.1.9	Nateżenie fali . . . . .	106
6.2	Zadania . . . . .	106
6.3	Rozwiązania . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Materiały dodatkowe</b>	<b>122</b>
<b>A</b>	<b>Podział wielkości fizycznych.</b>	<b>122</b>
<b>B</b>	<b>Rachunek wektorowy.</b>	<b>123</b>
B.1	Dodawanie wielkości wektorowych. . . . .	123
B.2	Mnożenie wielkości wektorowych. . . . .	124
B.3	Gradient, dywergencja i rotacja. . . . .	126
<b>C</b>	<b>Operator Laplace'a</b>	<b>127</b>
<b>D</b>	<b>Twierdzenia całkowe</b>	<b>128</b>

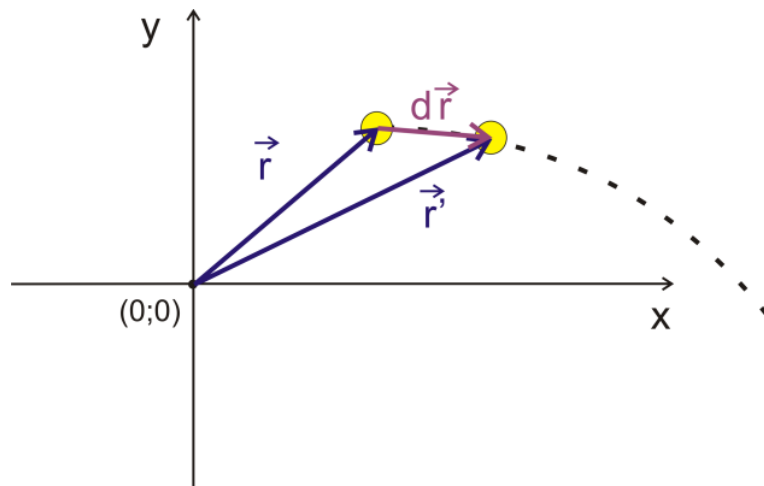
# 1 Kinematyka punktu materialnego.

## 1.1 Wstęp teoretyczny

Kinematyka to dział fizyki zajmujący się opisem ruchu ciał bez analizy przyczyn tego ruchu.

Podstawowymi wielkościami wektorowymi opisującymi ruch ciała są:

- położenie ciała w określonym układzie współrzędnych  $\vec{r}$ ,
- prędkość  $\vec{v}$ ,
- przyspieszenie  $\vec{a}$ .



Rysunek 1: Położenie ciała  $\vec{r}$  w kartezjańskim układzie współrzędnych. Linia przerywana-tor ruchu ciała,  $\vec{r}'$  -położenie ciała po czasie  $dt$ ,  $d\vec{r}$ -zmiana położenia ciała następująca w czasie  $dt$ .

Położenie ciała w danym układzie współrzędnych określa wektor  $\vec{r}$  poprowadzony z początku danego układu współrzędnych do punktu, w którym znajduje się ciało (rys.1). Każde ciało będące w ruchu zmienia swoje położenie w czasie, a miarą szybkości tych zmian jest prędkość ciała

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1)$$

$d\vec{r}$ - zmiana położenia ciała, która nastąpiła w czasie  $dt$ . Tak zdefiniowaną prędkość nazywamy prędkością chwilową ciała. Zauważmy, że kierunek i zwrot wektora prędkości są takie same jak kierunek i zwrot wektora  $d\vec{r}$ . Zwróćmy uwagę na fakt, że odległość ciała od początku układu współrzędnych może nie ulegać zmianie w czasie, a mimo to ciało może się poruszać- wystarczy, że zmieniał się będzie kierunek wektora położenia. W tym przypadku ciało porusza się po okręgu, a prędkość tego ciała jest zawsze prostopadła do wektora położenia. Krzywą, po której porusza się dane ciało nazywamy torem ruchu tego ciała, a fragment długości tej krzywej to droga  $s$ , jaką ciało przebywa w danym odstępie czasu, a zatem dla

nieskończenie małego (infinitesimalnego) przedziału czasu  $dt$  wartość zmiany położenia ciała  $dr$  jest równa drodze  $ds$  przebytej przez to ciało w danej chwili czasu

$$ds = dr = vdt. \quad (2)$$

Jak już wspomnieliśmy, miarą zmian położenia ciała w czasie jest prędkość. Jeżeli wielkość ta ulega zmianie w czasie, to miarą szybkości tych zmian jest przyspieszenie ciała  $\vec{a}$ . Definiujemy je zatem w sposób analogiczny do prędkości

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3)$$

Z powyższego równania wynika, że wektor przyspieszenia ciała ma ten sam kierunek i zwrot co wektor  $d\vec{v}$  określający zmianę prędkości ciała w czasie  $dt$ . Podobnie jak w przypadku położenia, przyspieszenie ciała może być niezerowe nawet wtedy, gdy wartość wektora prędkości nie zmienia się w czasie. Ciało poruszające się ze stałą co do wartości prędkością posiada niezerowe przyspieszenie, jeśli kierunek wektora prędkości się zmienia (ciało nie porusza się po linii prostej). Takie przyspieszenie nie powoduje zatem zmiany wartości prędkości ciała a jedynie zmianę jej kierunku i nazywane jest przyspieszeniem normalnym  $\vec{a}_n$  (gdyż jest ono zawsze prostopadłe do stycznej poprowadzonej w danym punkcie toru). Przyspieszenie normalne nazywane jest także przyspieszeniem dośrodkowym. Przyspieszenie, które związane jest jedynie ze zmianą samej wartości prędkości ciała nazywamy przyspieszeniem stycznym  $\vec{a}_s$  (ponieważ w każdej chwili czasu jest ono styczne do toru ciała) lub liniowym i definiujemy wzorem

$$a_s = \frac{dv}{dt}. \quad (4)$$

Całkowite przyspieszenie ciała jest zatem sumą geometryczną przyspieszenia stycznego i normalnego

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n. \quad (5)$$

Jeżeli ciało porusza się ze stałą prędkością  $\vec{v} = const$  ruch tego ciała nazywamy ruchem jednostajnym prostoliniowym. Z definicji prędkości (1), drogi (9) oraz przyspieszenia (11) otrzymamy wówczas

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \quad (6)$$

$$s = vt \quad (7)$$

oraz

$$\vec{a} = 0. \quad (8)$$

Jeśli zmianie nie ulega jedynie wartość prędkości ruch tego ciała jest ruchem jednostajnym. W tym przypadku położenie ciała trzeba określić korzystając z definicji prędkości 1

$$d\vec{r} = \vec{v}dt. \quad (9)$$

Wobec tego

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int \vec{v}dt. \quad (10)$$

Skoro zmienia się tylko kierunek wektora prędkości to ciało to będzie posiadało niezerowe przyspieszenie normalne

$$\vec{a}_n = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (11)$$

i zerowe przyspieszenie styczne ( $a_s = 0$ ), więc droga przebyta przez to ciało może być określona ze wzoru 7.

Ruch, w którym wektor przyspieszenia jest stały ( $\vec{a} = const$ ) jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, ale nie koniecznie prostoliniowym. Aby ruch był prostoliniowy przyspieszenie ciała musi mieć ten sam kierunek co wektor prędkości (ciało posiada jedynie przyspieszenie styczne, przyspieszenie normalne jest równe zero). Dla dowolnego ruchu, w którym  $a_s = const = a$  mamy

$$v(t) = v_0 + at \quad (12)$$

oraz

$$s(t) = v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (13)$$

W przypadku, gdy ruch ciała jest zmienny wygodnie jest posługiwać się pojęciem prędkości średniej  $\bar{v}$ , którą definiujemy jako stosunek całkowitej drogi przebytej przez ciało  $s_c$  do całkowitego czasu  $t_c$  potrzebnego na przebycie tej drogi

$$\bar{v} = \frac{s_c}{t_c}. \quad (14)$$

## 1.2 Zadania

1.1 Wyprowadzić wzory na zależność położenia i prędkości od czasu w ruchu:

- jednostajnym prostoliniowym,
- jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym,

c) prostoliniowym, w którym przyspieszenie jest następującą funkcją czasu:

$a(t) = At^2 + Be^{-Ct}$ , gdzie  $A$ ,  $B$  i  $C$  to stałe wyrażone w odpowiednich jednostkach, jeśli  $v(t = 0) = v_0$  i  $x(t = 0) = x_0$ .

**1.2\*** Na ciało poruszające się z początkową prędkością  $v_0$  działa siła oporu. Znaleźć przyspieszenie, prędkość i drogę przebytą przez ciało w dowolnej chwili czasu.

**1.3** Położenie ciała w przestrzeni dane jest wzorem  $\vec{r}(t) = \hat{x} \sin \omega t + \hat{y} e^{2t} - 2\hat{z}$ . Znaleźć  $\vec{v}(t)$  i  $\vec{a}(t)$  oraz narysować wektory  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{a}$  dla chwili  $t = 0$ .

**1.4** Ciało porusza się z przyspieszeniem  $\vec{a} = \hat{x}\pi^2 \sin \pi t$ . Znaleźć zależność  $\vec{v}(t)$  i  $\vec{r}(t)$ , jeżeli  $\vec{v}_0 = 2\hat{x} + \hat{z}$ , a  $\vec{x}_0 = 0$ .

**1.5** Położenie ciała w czasie wyraża się wzorem  $x = A \cos \omega t$ . Znaleźć zależność prędkości i przyspieszenia tego ciała od czasu. Wykreślić  $x(t)$ ,  $v(t)$  i  $a(t)$ . Jaki to ruch?

**1.6** Z punktu  $A$  wyrusza łódź płynąca do punktu  $B$  wzdłuż brzegu rzeki z prędkością  $\vec{v}$  względem wody. W tej samej chwili z punktu  $B$  wypływa prom, kierując się do punktu  $A$  z tą samą co do wartości prędkością względem wody co łódź. Zakładając, że prędkość obu statków oraz prędkość rzeki nie ulegają zmianie wyznacz po jakim czasie dojdzie do spotkania statków i znajdź prędkość rzeki. Odległość pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  wynosi  $x$  a czas, w jakim prom pokonuje ten dystans jest 1,5 razy dłuższy niż czas, w jakim łódź przebywa tą samą drogę.

**1.7** Samochód jadący z prędkością  $60 \text{ km/h}$  mija w czasie  $0,9 \text{ s}$  kolumnę 5 koni ustawionych jeden za drugim na poboczu drogi. Ile czasu zajmie wyprzedzenie poruszającej się jezdnią kolumny koni pojazdowi jadącemu z prędkością  $50 \text{ km/h}$ , jeżeli konie stępują z prędkością  $6 \text{ km/h}$  zachowując średni odstęp z przodu i z tyłu równy średniej długości jednego konia. Załóż, że samochód zmienia pas  $50 \text{ m}$  przed i  $50 \text{ m}$  za kolumną koni.

**1.8** Z punktu  $A$  wyrusza statek płynący z prędkością  $v = \sqrt{2} \frac{m}{s}$  względem wody pod pewnym kątem do brzegu rzeki, w której prędkość nurtu wynosi  $v_r = 1 \frac{m}{s}$ . Znajdź wspomniany kąt oraz czas, po którym statek dopływnie na drugi brzeg rzeki, jeśli wiadomo, że statek dopłynął do niego w punkcie  $B$ , leżącym o szerokość rzeki poniżej punktu  $A$ . Szerokość rzeki wynosi  $15 \text{ m}$ .

**1.9** Łucznik strzela do tarczy znajdującej się w odległości  $d$ . Strzała wystrzelona została z prędkością  $v_0$  pod kątem  $\alpha$  do poziomu i trafiła w środek tarczy znajdujący się na wysokości  $H$ . Obliczyć z jakiej wysokości wystrzelono strzałę.

**1.10** W samolocie lecącym z prędkością  $v_0 = 720 \text{ km/h}$  przestały działać silniki. Na jakiej minimalnej wysokości  $H$  musi znajdować się w tym momencie samolot, aby zdołał dolecieć do lotniska znajdującego się w odległości  $x = 8 \text{ km}$ ? Zaniedbać opory powietrza, przyjmując  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**1.11** Paczki z lekarstwami dostarczane są drogą lotniczą. W jakiej odległości od celu należy rzucić paczkę jeśli samolot leci na stałej wysokości  $h$  z prędkością  $v_0$ , a spadochron, w

który wyposażona jest paczka otwiera się po czasie  $t_1$ ? Przyjmij, że od momentu otwarcia spadochronu paczka opada ze stałą prędkością.

**1.12** Znajdź i wykreśl równanie toru piłki wyrzuconej poziomo z wysokości  $H_0$  z prędkością  $v_0$ . Podaj przedział zmienności współrzędnych położenia piłki na płaszczyźnie  $XY$  jeśli początek układu współrzędnych znajduje się na ziemi pod punktem, z którego wyrzucono piłkę. Podaj wektorowe i skalarne równania ruchu piłki względem a) początku układu współrzędnych, b) punktu, z którego wyrzucono piłkę.

**1.13** Z piątego piętra wyrzucono ciało nie nadając mu prędkości początkowej. Po czasie  $T$  (przed upadkiem ciała na ziemię) rzucono z ziemi pionowo do góry inne ciało z prędkością początkową  $v_0$ . Wyznacz czas i wysokość na jakiej spotkają się te ciała, jeśli wysokość jednego piętra wynosi  $x$ .

**1.14** Dzieci próbują przerzucić piłkę nad płotem o wysokości  $L$ . W jakiej odległości powinny się ustawić, aby rzucając piłkę z prędkością  $v_0$  pod kątem  $\alpha$  do poziomu dzieci miały największą szansę na przerzucenie piłki? Opory powietrza można zaniedbać.

**1.15** Równia pochyła o kącie nachylenia  $\beta$  może przemieszczać się w kierunku poziomym. Z jakim przyspieszeniem powinna poruszać się równia, aby swobodnie spadające na nią z góry ciało znajdowało się stale w tej samej odległości od nachylonej płaszczyzny równi? Zakładamy, że ruch ciała i równi zaczyna się w tej samej chwili.

**1.16** Sonda kosmiczna dociera do atmosfery Ziemi z prędkością  $v_s$ . Hamowanie w atmosferze powoduje jednostajne zmniejszanie prędkości sondy do wartości  $k\%$  prędkości początkowej. Jaka jest grubość atmosfery, jeżeli całkowite wyhamowanie sondy w takich samych warunkach zabrałoby  $t_s$  sekund, a sonda wchodzi w atmosferę pod kątem  $\alpha$  do normalnej?

**1.17** Kajakarz przepłynął  $1/3$  drogi z prędkością  $v_1$ , połowę pozostałego dystansu pokonał z prędkością dwukrotnie większą, natomiast ostatni odcinek przepłynął w czasie o 25% dłuższym od poprzedniego odcinka. Oblicz prędkość średnią kajakarza na pierwszych dwóch odcinkach drogi oraz na całej trasie.

**1.18** Z miasta A do B wyrusza samochód i jedzie ze stałą prędkością  $v_1$ . Z jaką prędkością  $v_2$  powinien jechać samochód z miasta B do C, aby średnia prędkość na całej trasie wynosiła  $2v_1$ ? Odległość między A i B oraz B i C jest jednakowa i wynosi  $l$ .

**1.19** Przez pierwsze  $x$  sekund ciało poruszało się z prędkością  $v_x$  a przez następne  $y$  sekund poruszało się z prędkością  $v_y$ . Znajdź prędkość średnią tego ciała, wiedząc, że  $x = 3y$ .

**1.20** Tarcza o promieniu  $R$  wykonuje  $n_0$  obrotów w ciągu jednej minuty. Oblicz: częstotliwość, okres obiegu oraz prędkość kątową i liniową punktów znajdujących się na obwodzie tarczy. Znajdź stosunek dróg kątowych oraz dróg liniowych przebywanych przez punkty na obwodzie tarczy i punkty znajdujące się w odległości  $1/3R$  od osi wirującej tarczy w tym samym czasie.

**1.21** Punkt materialny porusza się po okręgu tak, że kąt pomiędzy prędkością liniową i



przyspieszeniem wynosi  $\alpha$ . Oblicz stosunek przyspieszenia normalnego i stycznego punktu.

**1.22** Koło zamachowe wykonujące początkowo  $N$  obrotów na minutę zaczyna zwalniać. Oblicz czas, po którym prędkość kątowna koła zmniejszy się o połowę, jeśli ruch tarczy jest ruchem jednostajnie opóźnionym, a tarcza wykonała w tym czasie  $x$  obrotów.

**1.23** Spoczywającą początkowo tarczę wprowadzono w ruch obrotowy. Znajdź prędkość kątową tarczy po czasie  $t_k$ , wiedząc, że punkty znajdujące się na obwodzie tarczy pokonały w tym czasie drogę  $100\pi r$ , gdzie  $r$ -promień tarczy. Przyjmij, że przyspieszenie kątowe tarczy jest stałe.

### 1.3 Rozwiązania

**1.1 a)** W ruchu jednostajnym prostoliniowym  $\vec{a} = 0$ . W naszym przypadku z definicji przyspieszenia

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (15)$$

wynika, że

$$a = \frac{dv}{dt} = 0, \quad (16)$$

więc

$$v = \text{const} = v_0. \quad (17)$$

Z definicji prędkości, przy założeniu, że ciało porusza się w kierunku  $x$  otrzymamy zależność

$$dx = v dt. \quad (18)$$

Całkowanie powyższej zależności w odpowiednich granicach (chwili czasu  $t = 0$  położenie ciała wynosi  $x_0$ , natomiast chwili czasu  $t = t_k$  odpowiada położenie  $x_k$ ) daje

$$\int_{x_0}^{x_k} dx = [x]_{x_0}^{x_k} = x_k - x_0 = \int_0^{t_k} v dt = v_0 \int_0^{t_k} dt = v_0(t_k - 0) = v_0 t_k. \quad (19)$$

Prędkość  $v = v_0$  została wyciągnięta przed całkę, gdyż nie zależy ona od zmiennej całkowania (czyli czasu). Dla dowolnej chwili czasu  $t = t_k$  otrzymamy następującą zależność położenia ciała od czasu

$$x(t) = x_0 + v_0 t. \quad (20)$$

W przypadku ruchu prostoliniowego różnica położenia ciała w dowolnej chwili czasu  $x(t)$  i jego położenia początkowego  $x_0$  jest równa drodze  $s$  przebytej przez to ciało w czasie

$t$ . Podobne rozważania można przeprowadzić dla wielkości wektorowych: przyspieszenia  $\vec{a}$ , prędkości  $\vec{v}$  i położenia w przestrzeni  $\vec{r}$ . Wiedząc, że  $\vec{a} = 0$  otrzymamy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \quad (21)$$

zatem  $\vec{v} = const = \vec{v}_0$ . Wartość prędkości oraz jej kierunek i zwrot nie ulegają zmianie w czasie, więc ciało będzie się poruszało wzdłuż linii prostej wyznaczonej przez wektor prędkości początkowej  $\vec{v}_0$ . Skorzystajmy teraz ponownie z definicji prędkości

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (22)$$

stąd

$$d\vec{r} = \vec{v}dt. \quad (23)$$

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymamy

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_k} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_k} \vec{v}dt, \quad (24)$$

gdzie  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ , a  $\vec{r}_k = \vec{r}(t = t_k)$ , a prędkość  $\vec{v}$  nie zależy od czasu i wynosi  $\vec{v}_0$ , zatem można ją wyciągnąć przed całkę

$$[\vec{r}]_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_k} = \vec{v}_0 \int_0^{t_k} dt = \vec{v}_0 [t]_0^{t_k} = \vec{v}_0 \cdot t_k, \quad (25)$$

$$\vec{r}_k - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot t_k, \quad (26)$$

zatem położenie ciała  $\vec{r} = \vec{r}_k$  w dowolnej chwili czasu  $t = t_k$  będzie wyrażało się wzorem

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t. \quad (27)$$

b) W tym przypadku  $\vec{a} = const$ , a zatem  $a = const$ . Obliczenia przeprowadzimy jedynie na wartościach poszczególnych wektorów. Z definicji przyspieszenia wynika, że

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (28)$$

a zatem

$$dv = a dt. \quad (29)$$

Całkując powyższe równanie w odpowiednich granicach (chwili czasu  $t = 0$  odpowiada prędkość  $v_0$ , natomiast w chwili  $t_k$  ciało porusza się z prędkością  $v_k$ ) otrzymamy

$$\int_{v_k}^{v_0} dv = \int_{t_k}^0 a dt, \quad (30)$$

a ponieważ przyspieszenie ciała w tym ruchu nie zależy od czasu otrzymujemy

$$v_k - v_0 = a \int_0^{t_k} dt = at_k. \quad (31)$$

W związku z powyższym, dla dowolnej chwili czasu  $t = t_k$  mamy

$$v(t) = v_0 + at. \quad (32)$$

Całkowanie powyższej zależności w odpowiednich granicach daje

$$\int_{x_0}^{x_k} dx = x_k - x_0 = \int_0^{t_k} v dt = \int_0^{t_k} (v_0 + at) dt, \quad (33)$$

przy czym, ani  $v_0$ , ani  $a$  nie zależą od czasu. Stąd analogicznie do przypadku a) podstawiając za  $t_k$  dowolną chwilę czasu  $t$  otrzymamy

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (34)$$

c) Tak, jak w poprzednich przykładach

$$dv = a dt = (At^2 + Be^{-Ct}) dt. \quad (35)$$

Po scałkowaniu równania 35 w odpowiednich granicach i podstawieniu  $t_k = t$  otrzymujemy

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{3} At^3 - \frac{B}{C} e^{-Ct}, \quad (36)$$

natomiast obustronne scałkowanie tego równania prowadzi do następującej zależności

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{12} At^4 - \frac{B}{C^2} e^{-Ct}. \quad (37)$$

**1.2\*** Siła oporu  $\vec{F}_o$  jest zależna od prędkości z jaką porusza się ciało

$$\vec{F}_o = -b\vec{v}, \quad (38)$$

gdzie  $b$  jest pewną stałą, zależną od ośrodka, w którym porusza się ciało. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona (odnośnik) nasze ciało będzie się poruszało z przyspieszeniem  $\vec{a}$  wynoszącym

$$\vec{a} = -\frac{b\vec{v}}{m}, \quad (39)$$

$m$ - masa ciała, która dla małych prędkości ( $v \ll c$ ,  $c$ -prędkość światła) jest stała. Wartość tego przyspieszenia będzie ujemna (siła oporu powoduje zmniejszenie prędkości ciała) i będzie wynosiła

$$a = -\frac{bv}{m}. \quad (40)$$

Jak wynika z powyższego równania, wartość przyspieszenia z jakim porusza się ciało pod działaniem siły oporu zależy od prędkości ciała, a zatem  $a = a(t)$ . Wobec tego ciało to porusza się ruchem niejednostajnie zmiennym (opóźnionym). Skorzystajmy teraz z definicji przyspieszenia ciała

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{bv}{m} \quad (41)$$

i przemnożmy równanie 41 przez różniczkowy przyrost czasu  $dt$  oraz podzielmy je przez wartość prędkości ciała  $v$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt. \quad (42)$$

Dzięki temu uzyskaliśmy rozdzielenie zmiennych  $v$  i  $t$  (przy czym przyrostowi czasu  $dt$  odpowiada zmianie prędkości  $dv$ ). Całkowanie otrzymanego równania we właściwych granicach zmiennych  $v$  i  $t$  ( $v(t=0) = v_0$ ,  $v(t=t_k) = v_k$ ) daje

$$\int_{v_0}^{v_k} \frac{dv}{v} = -\int_0^{t_k} \frac{b}{m}dt. \quad (43)$$

Przy małych prędkościach  $b$  i  $m$  są stałe, więc

$$[\ln v]_{v_0}^{v_k} = -\frac{b}{m} [t]_0^{t_k}, \quad (44)$$

stąd

$$\ln(v_k) - \ln(v_0) = \ln \frac{v_k}{v_0} = -\frac{b}{m}t_k. \quad (45)$$

Zatem

$$\frac{v_k}{v_0} = \exp\left(-\frac{b}{m}t_k\right). \quad (46)$$

Podstawienie  $t_k = t$ , a zatem  $v_k = v$  oraz przemnożenie równania 46 przez  $v_0$  prowadzi do następującej zależności prędkości ciała od czasu

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right). \quad (47)$$

Znając zależność prędkości ciała od czasu i wiedząc, że siła oporu działa na kierunku prędkości (ciało porusza się zatem po linii prostej) możemy znaleźć wartość drogi  $s$  przebytej przez ciało w czasie  $t$ , która jest równa zmianie położenia ciała  $\Delta r$ , a zatem

$$dr = v dt, \quad (48)$$

więc

$$\int_{r_0}^{r_k} dr = r_k - r_0 = \int_0^{t_k} v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) dt, \quad (49)$$

gdzie  $r_0 = r(t=0)$ ,  $r_k = r(t=t_k)$ . Po podstawieniu  $t_k = t$  i  $r_k - r_0 = \Delta r = s$  otrzymamy

$$s(t) = \left[-\frac{m}{b}v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]_0^{t_k} = \frac{v_0 m}{b} \left(1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right). \quad (50)$$

Z równań 46 i 50 wynika, że czas ruchu jest praktycznie nieskończony (siła oporu maleje wraz z prędkością ciała) a całkowita droga przebyta przez ciało dla  $t \rightarrow \infty$  wynosi

$$s = \frac{v_0 m}{b}. \quad (51)$$

**1.3** Zgodnie z definicją

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x}\omega \cos \omega t + 2\hat{y}e^{2t} \quad (52)$$

oraz

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\hat{x}\omega^2 \sin \omega t + 4\hat{y}e^{2t}. \quad (53)$$

Zatem

$$\vec{a}(t=0) = 4\hat{y}, \quad \vec{v}(t=0) = \hat{x}\omega + 2\hat{y}, \quad \vec{r}(t=0) = \hat{y} + 2\hat{z}. \quad (54)$$

Powyższe wektory należy wykreślić w układzie  $xyz$ .

**1.4**

$$\vec{v} = [2 + \pi(1 - \cos \pi t)]\hat{x} + \hat{z}. \quad (55)$$

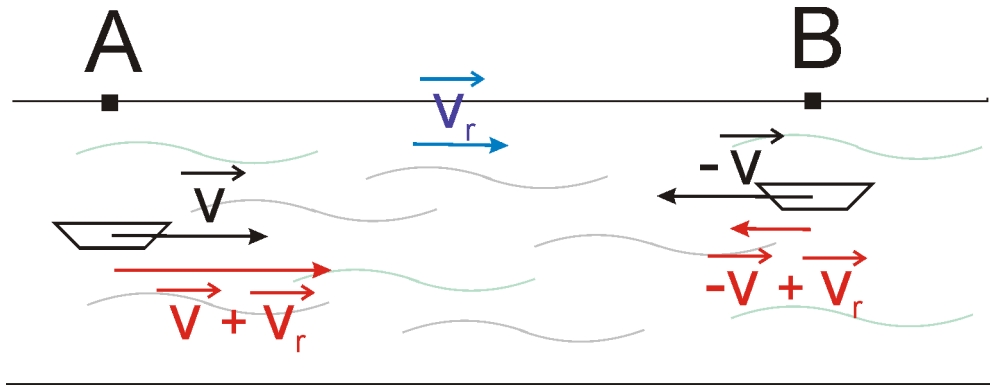
$$\vec{r} = [(2 + \pi)t - \sin \pi t]\hat{x} + \hat{z}. \quad (56)$$

**1.5** Jest to ruch harmoniczny prosty, w którym

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t, \quad a(t) = -A\omega^2 \cos \omega t. \quad (57)$$

**1.6** Przedstawmy rozważany problem na rysunku (Rys.2) i obierzmy zwrot prędkości wody w rzece, np. od punktu A do punktu B.

Prędkości  $\vec{v}$  i  $-\vec{v}$  są odpowiednio prędkościami łodzi i promu względem wody, zatem należy wyznaczyć prędkości tych obiektów względem brzegu, stąd



Rysunek 2: Rozkład prędkości

$$\begin{aligned} \vec{v}_l &= \vec{v} + \vec{v}_r \\ \vec{v}_p &= -\vec{v} + \vec{v}_r, \end{aligned} \quad (58)$$

gdzie  $\vec{v}_l$  oznacza prędkość łodzi a  $\vec{v}_p$  prędkość promu. Wartości tych prędkości wynoszą:

$$\begin{aligned} v_l &= v + v_r \\ v_p &= v - v_r. \end{aligned} \quad (59)$$

Odległość pomiędzy punktem A i B możemy wyrazić przez sumę dróg przebytych przez poszczególne jednostki do czasu ich spotkania:

$$x = s_l + s_p \quad (60)$$

Ponieważ prędkości statków oraz wody w rzece nie ulegają zmianie w czasie, to oba statki poruszają się ruchem jednostajnym. Jeżeli przez  $t$  oznaczymy czas jaki upłynie do spotkania, to drogi przebyte przez łódź i prom do tego czasu możemy zapisać odpowiednio jako:

$$\begin{aligned} s_l &= v_l \cdot t \\ s_p &= v_p \cdot t. \end{aligned} \quad (61)$$

Po podstawieniu tych wielkości do równania 60 otrzymamy:

$$t = \frac{x}{v_l + v_p} = \frac{x}{v + v_r + v - v_r} = \frac{x}{2v} \quad (62)$$

Sprawdźmy otrzymaną jednostkę (wstawiamy do wzoru 62 podstawowe jednostki drogi i prędkości w układzie SI):

$$t = \frac{m}{\frac{m}{s}} = s \quad (63)$$

Wyznamy teraz prędkość rzeki wiedząc jaki jest stosunek czasów, w których obie jednostki przebywają ten sam dystans  $x$ . Jeżeli przez  $t_l$  i  $t_p$  oznaczymy odpowiednio czas pokonania odległości  $|AB|$  przez łódź i prom, to:

$$t_p = \frac{3}{2} \cdot t_l \quad \text{oraz} \\ t_l \cdot v_l = t_p \cdot v_p, \quad (64)$$

zatem

$$t_l \cdot v_l = \frac{3}{2} \cdot t_l \cdot v_p. \quad (65)$$

Dzieląc powyższe równanie obustronnie przez  $t_l$  oraz podstawiając zależności 58 otrzymujemy:

$$v + v_r = \frac{3}{2} \cdot (v - v_r), \quad (66)$$

stąd:

$$v_r = \frac{1}{5}v. \quad (67)$$

Jednostka prędkości rzeki będzie taka sama jak jednostka prędkości  $v$ .

**1.7** Oznaczmy prędkość samochodu mijającego stojącą kolumnę koni przez  $v_1$  a czas mijania przez  $t_1$ . Droga, jaką przebywa samochód ruchem jednostajnym w czasie  $t_1$  jest równa długości kolumny  $x_1$ :

$$v_1 t_1 = x_1 \quad (68)$$

Wiemy, że poruszająca się kolumna koni (której długość oznaczymy przez  $x_2$ ) jest dłuższa, ponieważ konie idą w odstępach równych średniej długości jednego konia, która będzie równa długości stojącej kolumny podzielonej przez ilość koni  $n=5$ . Pomiedzy  $n$  końmi będzie  $n-1$  odstępów, zatem kolumna wydłuży się o  $\frac{n-1}{n}$  razy. Zatem

$$x_2 = x_1 + \frac{n-1}{n}x_1 = \frac{2n-1}{n}x_1 \quad (69)$$

Oznaczmy przez  $v_2$  prędkość drugiego samochodu i wyznaczmy jego prędkość względem poruszającej się z szybkością  $v_k$  kolumny koni. Ponieważ samochód i konie poruszają się w tą samą stronę, to wartość prędkości względnej będzie różnicą poszczególnych prędkości:

$$v = v_2 - v_k \quad (70)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że wyprzedzający kolumnę koni samochód musi zmienić pas  $z=50$  m przed i za kolumną całkowity dystans  $s$ , jaki pokona w trakcie manewru wyprzedzania (jadąc z prędkością  $v$ ) będzie wynosił:

$$s = x_2 + 2z = vt, \quad (71)$$

gdzie  $t$  oznacza czas wyprzedzania. Uwzględniając równania 68, 69, 70 i 71 otrzymujemy:

$$t = \frac{\frac{2n-1}{n}v_1t_1 + 2z}{v_2 - v_k} \quad (72)$$

Ponieważ prędkość  $v_1$ ,  $v_2$  i  $v_k$  dane są w  $km/h$  a czas  $t_1$  i dystans  $z$  dane są odpowiednio w  $s$  oraz  $m$ , to wygodnie jest wyrazić prędkości  $v_1$  i  $v_2 - v_k$  w  $m/s$ :

$$v_1 = \frac{50}{3} \frac{m}{s}$$

a

$$v_2 - v_k = \frac{110}{9} \frac{m}{s}$$

Sprawdźmy teraz jednostkę wyliczonego przez nas czasu  $t$ :

$$[t] = \frac{m}{\frac{m}{s}} = s \quad (73)$$

i podstawmy wartości liczbowe do równania 72:

$$t = \frac{\frac{2 \cdot 5 - 1}{5} \cdot \frac{50}{3} \cdot 0,9 + 2 \cdot 50}{\frac{110}{9}} \approx 10,4 \text{ s} \quad (74)$$

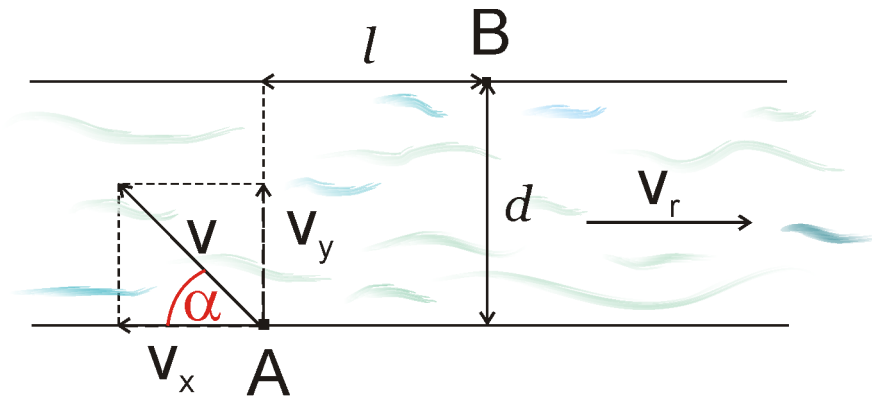
**1.8** Sporządźmy rysunek (Rys.3) i wprowadźmy oznaczenia:  $\alpha$ -kąt pomiędzy wektorem  $\vec{v}$  i brzegiem rzeki,  $t$ - czas potrzebny na przepłynięcie rzeki,  $v_x$ -prędkość łodzi w kierunku  $x$  liczona względem wody,  $v_2$ -prędkość łodzi w kierunku  $y$  liczona względem wody,  $v_1$ -prędkość łodzi w kierunku  $x$  liczona względem brzegu,  $v_2$ -prędkość łodzi w kierunku  $y$  liczona względem brzegu,  $d$ -szerokość rzeki,  $l$ -droga, jaką łódź przebywa w kierunku poziomym od pkt A do pkt B. Z powyższego rysunku wynika, że:

$$v_x = v \cos \alpha \quad i \quad v_y = v \sin \alpha \quad (75)$$

natomiast prędkości liczone względem brzegu rzeki będą wynosiły:

$$v_1 = v_r - v_x \quad i \quad v_2 = v_y \quad (76)$$





Rysunek 3: Rozkład prędkości łodzi i wody w rzece.

Ruch łodzi względem brzegu możemy potraktować jako dwa niezależne ruchy jednostajne: jeden w kierunku  $x$  z prędkością  $v_1$ , drugi w kierunku  $y$  z prędkością  $v_1$ . Czas obu ruchów jest jednakowy i wynosi  $t$ . W tym czasie łódź pokonuje dystans  $l$  w kierunku  $x$  oraz odległość  $d$  w kierunku  $y$ . Zatem:

$$v_1 t = l \quad a \quad v_2 t = d \quad (77)$$

Stąd:

$$t(v_r - v \cos \alpha) = l \quad a \quad t v \sin \alpha = d \quad (78)$$

Uwzględniając fakt, że  $l = d$  możemy przyrównać do siebie lewe strony powyższych równań i podzielić obustronnie przez czas  $t$ :

$$v_r - v \cos \alpha = v \sin \alpha \quad (79)$$

a zatem:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{v_r}{v} \quad (80)$$

Podnieśmy obie strony równania 80 do kwadratu:

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{v_r}{v}\right)^2 \quad (81)$$

Z zależności trygonometrycznych wynika, że  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  oraz  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ , więc równanie 81 upraszcza się do postaci:

$$\sin 2\alpha = \left(\frac{v_r}{v}\right)^2 \quad (82)$$

Po podstawieniu wartości prędkości do powyższego równania otrzymujemy:

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \quad (83)$$

Ponieważ kąt  $\alpha \in \langle 0; \Pi \rangle$  to kąt  $2\alpha \in \langle 0; 2\Pi \rangle$  Istnieją dwa rozwiązania powyższego równania w tym przedziale:

$$2\alpha = \frac{\Pi}{6} \quad \vee \quad 2\alpha = \frac{5\Pi}{6} \quad (84)$$

zatem:

$$\alpha_1 = \frac{\Pi}{12} = 15 \text{ deg} \quad \vee \quad \alpha_2 = \frac{5\Pi}{12} = 75 \text{ deg} \quad (85)$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć czas  $t$ . W tym celu posłużmy się drugim równaniem z 78:

$$t = \frac{d}{v \sin \alpha} \quad (86)$$

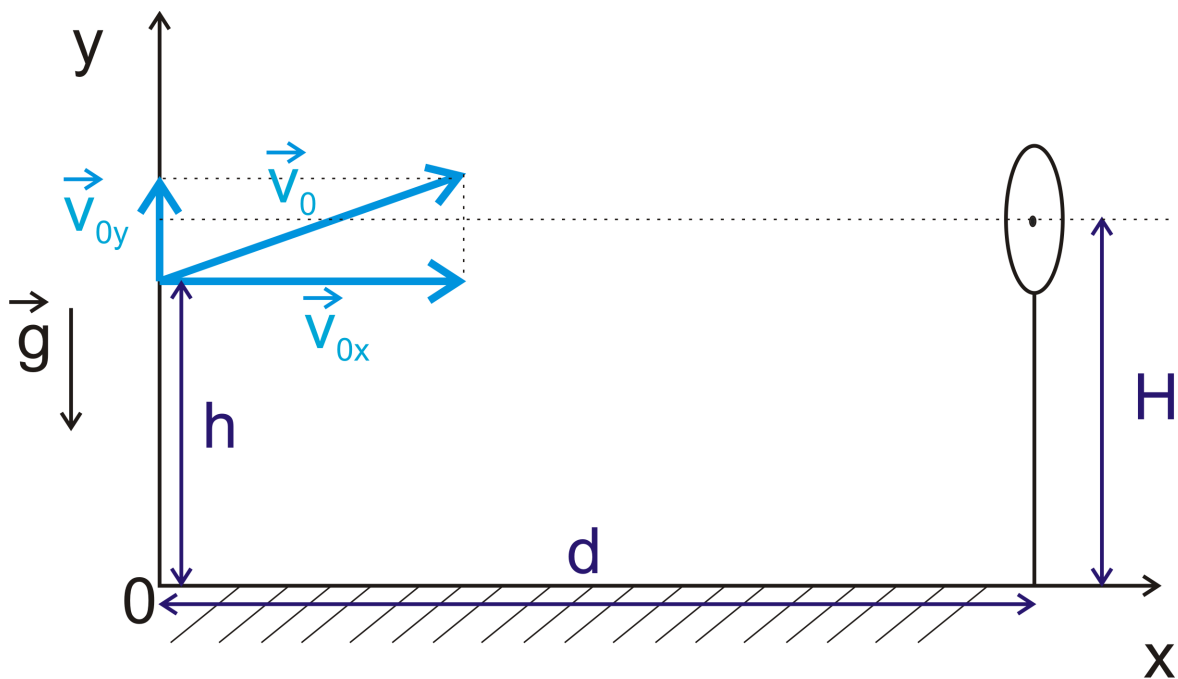
Otrzymana jednostka to:

$$t = \frac{m}{\frac{m}{s}} = s \quad (87)$$

Ponieważ mamy dwa różne rozwiązania dla kąta  $\alpha$ , to otrzymamy także dwa różne rozwiązania dla czasu  $t$ :

$$t_1 \approx 41 \text{ s} \quad \vee \quad t_2 \approx 11 \text{ s} \quad (88)$$

### 1.9



Rysunek 4:

Przedstawmy sytuację na rysunku (rys.4). W kierunku  $x$  nie działa na strzałę żadna siła, wobec tego, zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona, ruch w tym kierunku jest ruchem jednostajnym, zatem wartość prędkości  $v_x$  jest niezmienna i wynosi  $v_{0x}$ . W tym kierunku strzała pokonuje odległość  $d$  (tarcza znajduje się w odległości  $d$  od luczniaka), więc

$$d = v_{0x} t_z, \quad (89)$$

przy czym  $t_z$  jest czasem, potrzebnym na pokonanie tej odległości. Z rysunku wynika, że  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ , stąd

$$d = v_0 t_z \cos \alpha. \quad (90)$$

W kierunku  $y$  pionowo w dół działa na strzałę siła grawitacji nadając strzale stałe w czasie przyspieszenie  $\vec{a} = \vec{g}$ . Ruch strzały w kierunku  $y$  jest więc ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Prędkość  $v_y$  jest zatem następującą funkcją czasu

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (91)$$

Znak „-” przed przyspieszeniem ziemskim wynika z faktu, że ma ono zwrot przeciwny do zwrotu osi  $y$ . Wysokość  $y$  (położenie strzały na kierunku pionowym), na której znajduje się strzała w danym momencie możemy zatem wyrazić jako (patrz zadanie 1.1 b, równanie 34)

$$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad (92)$$

przy czym  $h$  jest początkowym położeniem na kierunku  $y$ , a więc poszukiwaną przez nas wysokością, z której wystrzelono strzałę. Wiemy już, że strzała uderza w tarczę po czasie  $t_z$ , zatem musi się ona w tej samej chwili znaleźć na wysokości  $H$ , stąd

$$y(t_z) = H = h + v_0 t_z \sin \alpha - \frac{gt_z^2}{2}. \quad (93)$$

Czas  $t_z$  wyznaczmy z równania 90

$$t_z = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \quad (94)$$

i wstawimy do równania 93 wyznaczając z niego  $h$

$$h = H - v_0 \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha + \frac{g \left( \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \right)^2}{2} = H - d \operatorname{tg} \alpha + \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (95)$$

**1.10**

$$H = \frac{gx^2}{2v_0^2} = 7848m \quad (96)$$

**1.11**

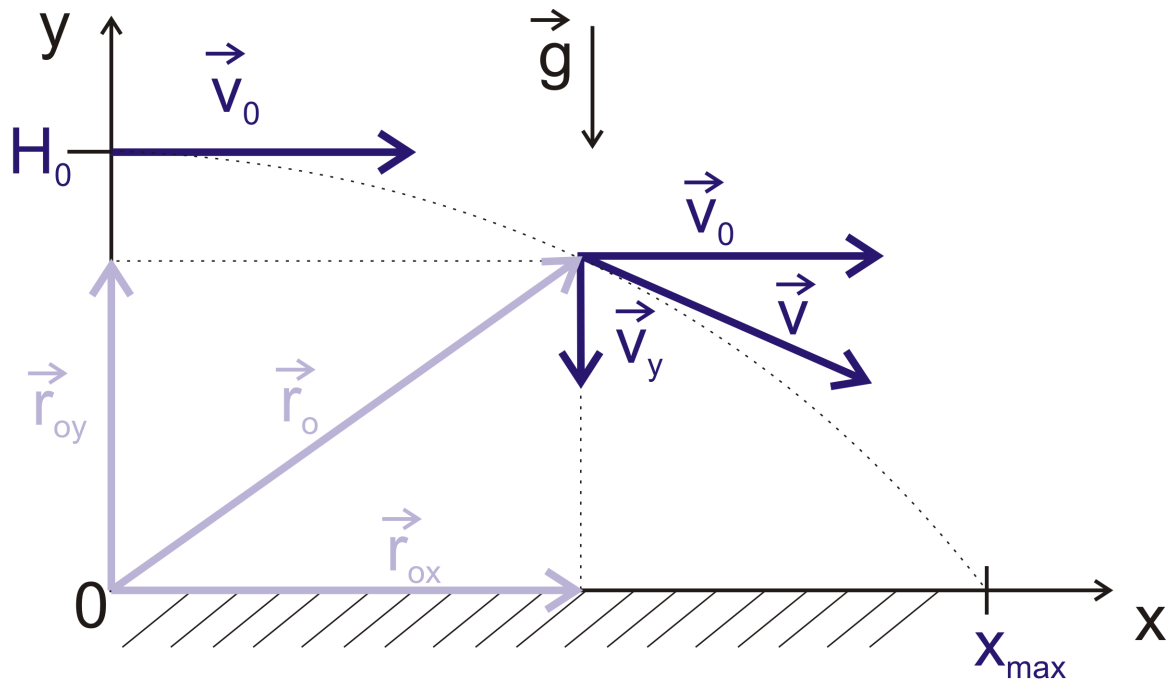
$$z = v_0 \left( \frac{h}{gt_1} + \frac{t_1}{2} \right) \quad (97)$$

**1.12** Ruch w kierunku  $x$  (patrz rys.5) jest ruchem jednostajnym, zatem

$$x(t) = v_0 t, \quad (98)$$

a ruch w kierunku  $y$  zanim piłka spadnie na ziemię jest ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej z przyspieszeniem  $\vec{g}$ , więc

$$y(t) = H_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (99)$$



Rysunek 5:

Jeżeli z równania 98 wyznaczymy czas  $t$  w funkcji położenia ciała na kierunku  $x$  i podstawimy tę zależność do równania 99 otrzymamy równanie toru piłki

$$y(x) = H_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (100)$$

Ustalmy teraz przedziały zmienności współrzędnej  $x$ -owej i  $y$ -owej położenia piłki. Wiemy, że  $y \in \langle 0; H_0 \rangle$ . W momencie wyrzutu  $x = 0$  a  $y = H_0$ , natomiast w momencie uderzenia w ziemię  $y = 0$ , zatem maksymalną wartość  $x$  obliczymy przyrównując  $y$  do zera

$$0 = H_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \quad (101)$$

stąd

$$x_{max} = v_0 \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \quad \vee \quad x_{max} = -v_0 \sqrt{\frac{2H_0}{g}}. \quad (102)$$

Przy tak zorientowanym układzie współrzędnych ma sens jedynie dodatnia wartość  $x_{max}$ . Zatem tor ruchu piłki jest wycinkiem paraboli o równaniu 100, przy czym  $x \in \langle 0; v_0 \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \rangle$ , a  $y \in \langle 0; H_0 \rangle$ . Wektorowe równania ruchu piłki względem początku układu współrzędnych będą miały następującą postać

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_0\hat{x} - gt\hat{y}, \quad (103)$$

$$\vec{r}_o(t) = \vec{r}_{ox} + \vec{r}_{oy} = v_0t\hat{x} + \left(H_0 - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{y}, \quad (104)$$

a równania skalarne

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 - g^2t^2}, \quad (105)$$

$$r_o(t) = \sqrt{v_0^2t^2 + \left(H_0 - \frac{gt^2}{2}\right)^2}. \quad (106)$$

Równania wektorowe i skalarne prędkości względem punktu wyrzutu będą miały taką samą postać jak równania 103 i 105, natomiast równania położenia ciała względem punktu, z którego wyrzucono ciało będą miały poniższą postać

$$\vec{r}(t) = v_0t\hat{x} - \frac{gt^2}{2}\hat{y}, \quad (107)$$

a zatem

$$r(t) = \sqrt{v_0^2t^2 + \frac{g^2t^4}{4}}. \quad (108)$$

**1.13** Ciała spotkają się po czasie, w którym przebyte przez nie drogi będą w sumie równe wysokości  $H$  z jakiej zrzucono pierwsze ciało. Jeżeli przez  $t$  oznaczymy czas mierzony od chwili wyrzucenia drugiego ciała, to drogi  $s_1$  i  $s_2$  przebyte przez te ciała do chwili spotkania możemy zapisać jako

$$s_1 = \frac{g(t+T)^2}{2} \quad (109)$$

i

$$s_2 = v_0t - \frac{gt^2}{2}, \quad (110)$$

stąd

$$\frac{g(t+T)^2}{2} + v_0t - \frac{gt^2}{2} = H. \quad (111)$$

Zatem ciała spotkają się po czasie  $t$  równym

$$t = \frac{2H - gT^2}{2(v_0 + gT)} \quad (112)$$

od momentu wyrzucenia w górę drugiego ciała. Wysokość jednego piętra wynosi  $x$ , więc  $H = 5x$ . Znając czas  $t$  można z równania 110 wyznaczyć wysokość  $h$ , na której spotkają się ciała

$$h = s_2 = \frac{10x - gT^2}{2(v_0 + gT)} \left[ v_0 - \frac{g(10x - gT^2)}{4(v_0 + gT)} \right], \quad (113)$$

**1.14** Szanse przelazczenia piłki na drugą stronę płotu będą największe jeśli dzieci ustawią się w takiej odległości  $x$  od płotu, dla której piłka osiągnie swoją maksymalną wysokość dokładnie nad płotem, a zatem

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (114)$$

**1.15**

$$a = gctg\alpha \quad (115)$$

**1.16**

$$d = \frac{v_s t_s (1 - k \cdot 10^{-2})}{2 \cos \alpha} \quad (116)$$

**1.17** Prędkość średnią na pierwszych dwóch odcinkach określamy zgodnie z definicją (14)

$$v_{1,2}^- = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}. \quad (117)$$

Z treści zadania wynika, że wszystkie odcinki trasy mają taką samą długość  $s_1 = s_2 = s_3 = 1/3s$ . Ruch kajakarza na poszczególnych odcinkach trasy jest ruchem jednostajnym, więc

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{3v_1}, \quad (118)$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{6v_1}, \quad (119)$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{5}{4} \frac{s}{6v_1} = \frac{5s}{24v_1}. \quad (120)$$

Zatem prędkość średnia na pierwszych dwóch odcinkach wynosi

$$v_{1,2}^- = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s}{\frac{s}{3v} + \frac{s}{6v}} = \frac{\frac{2}{3}s}{\frac{1}{2}v_1} = \frac{4}{3}v_1. \quad (121)$$

Analogicznie postępujemy obliczając prędkość średnią kajakarza na całej trasie w rezultacie czego dostajemy

$$\bar{v} = \frac{24}{17}v_1. \quad (122)$$

**1.18** Z warunków zadania wynika następujący związek pomiędzy prędkościami  $v_1$  i  $v_2$

$$\frac{v_1}{v_2}, \quad (123)$$

a skoro  $v_1 \neq 0$ , to prędkość  $v_2 \rightarrow \infty$ , co jest niemożliwe.

**1.19**

$$\bar{v} = \frac{3v_x + v_y}{4}. \quad (124)$$

**1.20** Tarcza wykonuje  $n_0$  obrotów na minutę, zatem czas jednego obiegu (okres) dla dowolnego punktu na obwodzie wyrażony w sekundach wynosi

$$T = \frac{60}{n_0}, \quad (125)$$

stąd częstotliwość, będąca odwrotnością okresu, to

$$f = \frac{1}{T} = \frac{n_0}{60}. \quad (126)$$

Prędkość kątową  $\omega$  obliczymy z zależności

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi n_0}{30}, \quad (127)$$

a prędkość liniową ustalimy na podstawie zależności pomiędzy wielkościami liniowymi i kątowymi

$$v = \omega r = \frac{\pi n_0 R}{30}. \quad (128)$$

Droga kątowa, jaką pokonują punkty znajdujące się na obwodzie tarczy i w odległości  $1/3R$  od jej środka jest identyczna, gdyż wszystkie punkty na tarczy zakreślają w tym samym czasie jednakowy kąt. W ruchu jednostajnym po okręgu

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi n_0 t}{30}, \quad (129)$$

zatem stosunek dróg kątowych jest równy 1. Dla dróg liniowych otrzymujemy

$$s_1 = \varphi r_1 = \omega t R \quad (130)$$

oraz

$$s_2 = \varphi r_2 = \frac{\omega t R}{3}, \quad (131)$$

stąd

$$\frac{s_1}{s_2} = 3. \quad (132)$$

**1.21**

$$\frac{a_n}{a_s} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (133)$$

**1.22** Punkty na tarczy poruszają się ruchem jednostajnie opóźnionym po okręgu, więc

$$\omega(t) = \omega_0 - \epsilon t = \frac{\omega_0}{2}, \quad (134)$$

a zatem opóźnienie tarczy wynosi

$$\epsilon = \frac{\omega_0}{2t}. \quad (135)$$

Liczba obrotów, którą wykonuje tarcza w czasie  $t$  to stosunek drogi kątovej  $\varphi$  przebywanej przez dowolny punkt na tarczy podzielonej przez kąt  $2\pi$  odpowiadający jednemu pełnemu obrotowi

$$x = \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (136)$$

W ruchu jednostajnie opóźnionym drogę kątową wyrażamy wzorem

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{\epsilon t^2}{2}, \quad (137)$$

gdzie

$$\omega_0 = 2\pi N \text{ [1/min]}. \quad (138)$$

Z równań 135, 136, 137 i 138 otrzymujemy poszukiwany przez nas czas

$$t = \frac{8\pi x}{3\omega_0} = \frac{4x}{3N} \text{ [min]}. \quad (139)$$

**1.23** Ruch punktów na tarczy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. Prędkość kątovej w tym ruchu wyraża się wzorem

$$\omega(t) = \epsilon t, \quad (140)$$

Prędkość kątovej tarczy po czasie  $t_k$  znajdziemy wyznaczając nieznanne przyspieszenie kątovej tarczy. Wiemy, że punkty na obwodzie tarczy przebywają w czasie  $t_k$  drogę liniową  $s = 100\pi r$ ,  $r$ - promień tarczy. Skorzystajmy ze związku między drogą kątową  $\varphi$  i liniową  $s$  oraz ze wzoru na drogę kątową w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej

$$s(t) = \varphi(t)r = \frac{\epsilon t^2}{2}r, \quad (141)$$

stąd

$$\epsilon = \frac{2s}{rt_k^2} = \frac{200\pi r}{rt_k^2} = \frac{200\pi}{t_k^2}. \quad (142)$$

Po wstawieniu wyznaczonego przyspieszenia do wzoru 140 otrzymujemy

$$\omega(t = t_k) = \frac{200\pi}{t_k}. \quad (143)$$



## 2 Dynamika punktu materialnego i bryły sztywnej.

### 2.1 Wstęp teoretyczny

Dynamika to dział fizyki, w którym rodzaj ruchu określa się na podstawie analizy sił działających na dane ciało i odwrotnie- obserwując ruch ciała można określić czy na dane ciało działają jakieś siły. Analizy tej dokonujemy bazując na trzech podstawowych prawach dynamiki- zasadach dynamiki Newtona:

I zasada dynamiki Newtona:

Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające na ciało równoważą się, ciało pozostaje w spoczynku, lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym

$$\vec{F}_w = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = const, \quad (144)$$

gdzie  $\vec{F}_w$ -wypadkowa siła działająca na ciało,  $\vec{v}$ - prędkość ciała. Z powyższej zależności wynika także, że jeśli ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym ( $\vec{v} = const$ ) siły działające na ciało muszą się równoważyć lub w ogóle na dane ciało nie działają.

II zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało działa niezerowa siła wypadkowa  $\vec{F}_w$  ciało doznaje przyspieszenia  $\vec{a}$ , które jest wprost proporcjonalne do działającej siły a odwrotnie proporcjonalne do masy  $m$  tego ciała

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}. \quad (145)$$

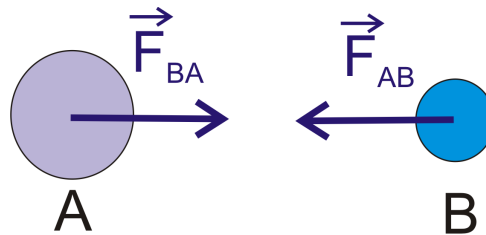
Zgodnie z tą zasadą przyspieszenie, z jakim ciało porusza się pod działaniem siły wypadkowej ma taki sam kierunek i zwrot jak siła  $\vec{F}_w$ . Jeżeli siła wypadkowa nie zmienia swojej wartości w czasie ciało będzie się poruszało ze stałym przyspieszeniem. Z I i II zasady dynamiki Newtona możemy wywnioskować, że niezerowa siła wypadkowa jest niezbędna do tego, by zmienić ruch ciała (zmienić wektor prędkości ciała co do wartości, kierunku bądź obydwu tych parametrów jednocześnie). Analizując tor ruchu ciała i wartość prędkości tego ciała można określić rodzaj działającej na ciało siły.

III zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli ciało  $A$  działa na ciało  $B$ , ciało  $B$  działa na ciało  $A$  z jednakową co do wartości i kierunku siłą, ale zwróconą przeciwnie

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}. \quad (146)$$

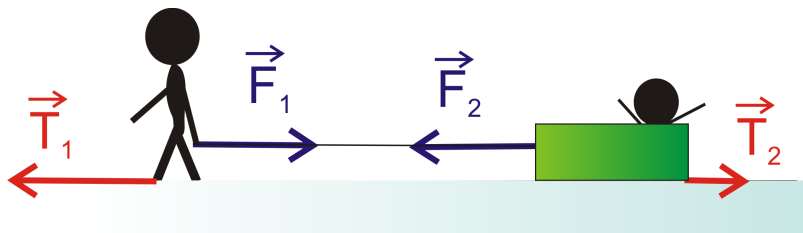
Należy pamiętać o tym, że siły akcji i reakcji, o których mowa w powyższej zasadzie, nie



Rysunek 6:  $\vec{F}_{AB}$  -siła z jaką ciało A działa na ciało B,  $\vec{F}_{BA}$  -siła z jaką ciało B działa na ciało A.

równoważą się, ponieważ są przyłożone do dwóch różnych ciał!

Wyobraźmy sobie teraz sytuację, w której rodzic ciągnie na sankach swoje dziecko (rys.7). Skoro, zgodnie z III zasadą dynamiki każdej akcji towarzyszy jednakowa, ale zwrócona przeciwnie reakcja - rodzic ciągnie sanki, więc sanki ciągną rodzica z dokładnie taką samą co do wartości siłą, ale zwróconą przeciwnie- co decyduje o tym, w którą stronę porusza się rozważany przez nas układ?



Rysunek 7:  $\vec{F}_2$  -siła z jaką rodzic ciągnie sanki,  $\vec{F}_1$  -siła z jaką sanki ciągną rodzica,  $\vec{T}_1$  -siła tarcia działająca na rodzica,  $\vec{T}_2$  -siła tarcia działająca na sanki

W takim układzie o kierunku i rodzaju ruchu decydują siły więzów- w tym przypadku są to siły tarcia  $\vec{T}_1$  i  $\vec{T}_2$ . Siły tarcia posuwistego działające pomiędzy dwiema przesuwającymi się względem siebie powierzchniami będącymi w kontakcie są zwrócone w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu (są to siły oporu). Siły te są siłami akcji i reakcji, przy czym siła tarcia nie może być większa od siły powodującej przemieszczanie się powierzchni trących względem siebie. W naszym przypadku (patrz rys. 7) siła tarcia  $\vec{T}_1$  działająca na człowieka jest zwrócona w lewo, ponieważ człowiek idąc działa na podłoże próbując odepchnąć je do tyłu (w tym wypadku w prawo). Zatem zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona podłoże działa na człowieka siłą skierowaną w przód (a więc w lewo). Jeśli  $\vec{T}_1 > \vec{F}_1$ , co oznacza także, że  $\vec{T}_1 > \vec{T}_2$  rozważany układ porusza się w lewo. Jeśli siła tarcia  $\vec{T}_1$  jest zbyt mała,

człowiek przewróci się (poślizgnie) nie wprawiając układu w ruch (patrz rozdział „dynamika bryły sztywnej”). Wartość siły tarcia kinetycznego  $T$  (w ruchu) określamy ze wzoru

$$T = \mu F_N, \quad (147)$$

przy czym  $\mu$ - współczynnik tarcia kinetycznego, zależny od rodzaju trących o siebie powierzchni,  $F_N$ - siła nacisku. Siła nacisku jest siłą z jaką jedno ciało działa na drugie w kierunku prostopadłym do powierzchni styku tych ciał. W przypadku, w którym rozważany przez nas układ stanowi człowiek oraz sanki, które ten człowiek ciągnie, siły tarcia ( $\vec{T}_1$  i  $\vec{T}_2$ ) są siłami zewnętrznymi (pochodzą z zewnątrz układu, z oddziaływania z podłożem), natomiast siły wzajemnego oddziaływania człowieka i sanek ( $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ ) są siłami wewnętrznymi (pochodzą od ciał wchodzących w skład układu). Warto pamiętać, że o ruchu całego układu decydują jedynie siły zewnętrzne.

Siła tarcia pojawia się także wtedy, gdy działamy na ciało spoczywające na jakiejś powierzchni siłą  $\vec{F}$ , która jest zbyt mała by wprawić to ciało w ruch. Wówczas tarcie występujące pomiędzy ciałem i podłożem nazywamy tarcie statycznym  $\vec{T}_s$ . Tarcie to, zgodnie z I zasadą dynamiki Newtona równoważy przyłożoną do ciała siłę  $\vec{F}$  (ciało nie porusza się, więc działające na nie siły równoważą się)

$$\vec{F} + \vec{T}_s = 0. \quad (148)$$

## 2.2 Zadania z rozwiązaniami

### Zadanie 1.1

Samochód o masie  $M$  jest hamowany siłą oporu  $\vec{F} = -k\vec{v}$ . W chwili rozpoczęcia hamowania ( $t = 0$ ), prędkość samochodu jest równa  $v_0$ . Przedstawić na wykresie zależność prędkości samochodu od czasu. Po jakim czasie, prędkość samochodu zmaleje do  $1/4$  wartości początkowej?

### Rozwiązanie

Siła oporu działająca na samochód jest równa sile wypadkowej, stąd na podstawie drugiej zasady dynamiki możemy napisać:

$$ma = -kv \quad (149)$$

Korzystając z definicji przyspieszenia, otrzymamy równanie różniczkowe stopnia pierwszego:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (150)$$

Które po rozdzieleniu zmiennych całkujemy w granicach od 0 do  $v_0$ , oraz od 0 do  $t$ :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt \quad (151)$$

Rozwiązanie równania:

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{k}{m}[t - 0] \quad (152)$$

Korzystając z własności logarytmów, postać końcowa wzoru opisująca zmiany prędkości samochodu od czasu:

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \quad (153)$$

Czas  $\tau$  po którym prędkość samochodu zmaleje do  $\frac{1}{4}v_0$  wyznaczymy z równania:

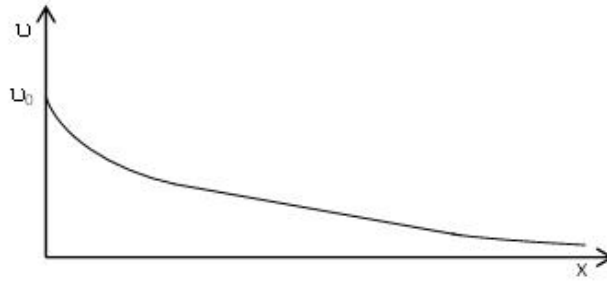
$$\frac{v_0}{4} = v_0 \exp\left(-\frac{k\tau}{m}\right) \quad (154)$$

Otrzymana wartość czasu dana jest wzorem:

$$\tau = \frac{m \ln 4}{k} \quad (155)$$

Zadanie 1.2.

Ciało o masie  $m$  porusza się z przyspieszeniem, które zależy od czasu:  $a(t) = At^2$ , gdzie  $A$  to odpowiednia stała dana w jednostkach  $[\frac{m}{s^4}]$ . Znaleźć zależność prędkości i położenia tego ciała od czasu, przyjmując, że dla  $t = 0$  ciało posiadało prędkość początkową 0.



Rysunek 8:

Rozwiązanie

Na podstawie drugiej zasady dynamiki otrzymamy:

$$ma = mA t^2 \quad (156)$$

Po uwzględnieniu definicji przyspieszenia, równanie przyjmie postać:

$$m \frac{dv}{dt} = mA t^2 \quad (157)$$

Tak jak w zadaniu poprzednim, rozdzielamy zmienne i całkujemy stronami w granicach:

$$\int_{v_0}^v dv = A \int_0^t t^2 dt \quad (158)$$

Równanie prędkości ma postać:

$$v = v_0 + \frac{At^2}{3} \quad (159)$$

Korzystając z definicji prędkości znajdziemy równanie z którego wyznaczymy zależność położenia od czasu:

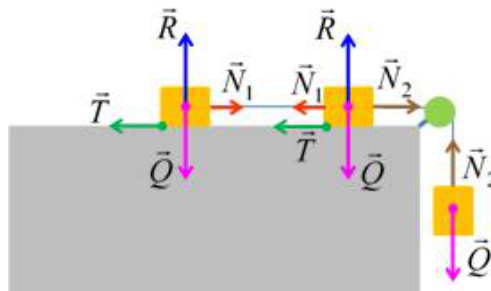
$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{At^2}{3} \quad (160)$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu otrzymamy zależność położenia ciała od czasu:

$$x = v_0 t + \frac{At^3}{12} \quad (161)$$

Zadanie 1.3.

Na stole o współczynniku tarcia  $f$  znajdują się dwa ciała połączone nitką, natomiast trzecie ciało, zawieszone na tej samej nitce, przerzucono przez lekki bloczek. Wszystkie ciała mają równe masy. Wyznaczyć przyspieszenie układu oraz siły napinające nici.



Rysunek 9:

Rozwiązanie

Układ opisany w zadaniu przedstawiono na rysunku wraz z wektorami sił, które działają na poszczególne elementy układu. Dla każdego klocka zapisujemy równanie ruchu, czyli drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$m_A a = N_1 - T \quad (162)$$

$$m_B a = N_2 - T - N_1 \quad (163)$$

$$m_C a = m_C g - N_2 \quad (164)$$

Wartości sił tarcia działających na klocki A i B będą takie same i równe:

$$T = f m_A g = f m_B g = f m_C g = f m g \quad (165)$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymamy:

$$a = \frac{g(1 - 2f)}{3} \quad (166)$$

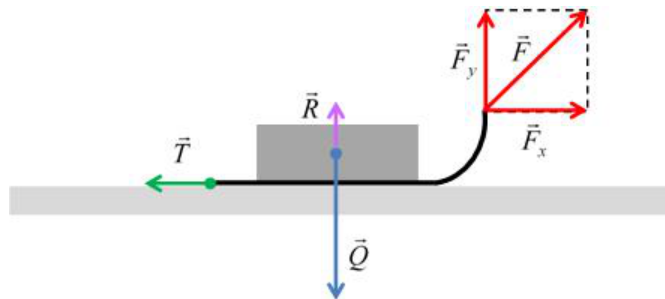
$$N_1 = \frac{mg(1 + f)}{3} \quad (167)$$

$$N_2 = \frac{2mg(1 + f)}{3} \quad (168)$$

Zadanie 1.4.

Dziecko ciągnie sanki o masie  $m = 5 \text{ kg}$  siłą równą  $F = 15\text{N}$ . Współczynnik tarcia między podłożem, a płozami sanek wynosi  $f = 0.1$ . Oblicz przyspieszenie sanek, jeżeli sznurek, za który ciągnie dziecko, tworzy z poziomem kąt  $45^\circ$ . Z jakim przyspieszeniem poruszałyby się sanki, gdyby dziecko zaczęło je popychać z siłą  $F$  przyłożoną pod kątem  $45^\circ$ ?

Rozwiązanie



Rysunek 10:

Na rysunku przedstawiono dziecko ciągnące sanki, wraz z zaznaczonymi wektorami sił. Równanie ruchu dla sanek ma następującą postać:

$$ma = F_x - T = F \cos 45^\circ - T \quad (169)$$

$$mg = R + F_y = R + F \sin 45^\circ \quad (170)$$

Siła tarcia występująca między płozami sanek, a podłożem:

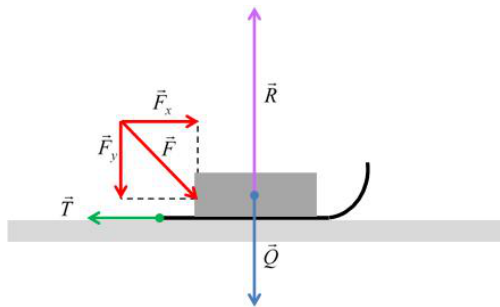
$$T = fR = f(mg - F \sin 45^0) \quad (171)$$

Z powyższego układu równań znajdujemy:

$$a = \frac{F}{m} \cos 45^0 - f(g - \frac{F}{m} \sin 45^0) \quad (172)$$

Stąd  $a = 1.3[\frac{m}{s^2}]$ .

Podobnie jak w części pierwszej zadania należy zapisać drugą zasadę dynamiki dla sanek, które teraz dziecko pcha z siłą  $F$  (patrz rysunek):



Rysunek 11:

$$ma = F_x - T = F \cos 45^0 - T \quad (173)$$

$$R = mg + F_y = mg + F \sin 45^0 \quad (174)$$

Siła tarcia stąd ma większą wartość, niż w poprzednim przypadku:

$$T = fR = f(mg + F \sin 45^0) \quad (175)$$

Wartość przyspieszenia sanek na podstawie powyższego układu równań:



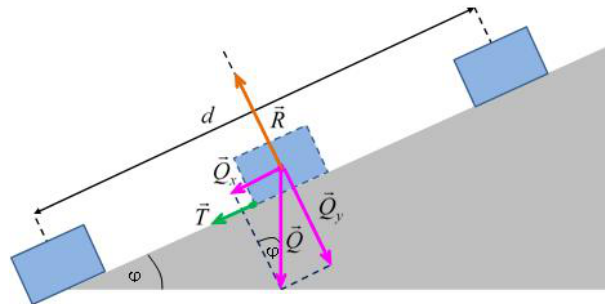
$$a = \frac{F}{m} \cos 45^\circ - f \left( g + \frac{F}{m} \sin 45^\circ \right) \quad (176)$$

$$a = 0.9 \frac{m}{s^2} \quad (177)$$

Zadanie 1.5.

Klocek o masie  $m$  pchnięto w górę równi pochyłej o kącie nachylenia, nadając mu prędkość początkową  $0$ . Klocek po przebyciu drogi  $d$  zatrzymał się. Znaleźć wzór opisujący współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem, a równią.

Rozwiązanie



Rysunek 12:

Na podstawie równań kinematyki ruchu jednostajnie opóźnionego znajdziemy przyspieszenie, z jakim porusza się klocek w górę równi:

$$a = \frac{v_0^2}{2d} < 0 \quad (178)$$

Równanie ruchu dla klocka:

$$ma = mg \sin \varphi + T \quad (179)$$

Tarcie kinetyczne:

$$T = fR = fmg \cos \varphi \quad (180)$$

Stąd na podstawie powyższych równań otrzymamy:

$$f = \frac{v_0^2}{2dg \cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi \quad (181)$$

### Zadania dodatkowe

1.1.1. Znaleźć wzór na prędkość graniczną jaką osiągnie kula o promieniu  $R$  i gęstości  $\rho$ , spadająca swobodnie w powietrzu. Przyjąć, że siła oporu ośrodka dana jest wzorem  $F_{op} = -kSv^2$ , gdzie  $k$  jest współczynnikiem, który powinien zostać wyznaczony doświadczalnie,  $S$  jest polem największego przekroju ciała płaszczyzną prostopadłą do kierunku ruchu, a  $v$  oznacza prędkość ciała. Wyznaczyć prędkość graniczną jaką osiągnie kula spadająca w powietrzu.

Odpowiedź:  $v_{gr} = \operatorname{sqr}t{\frac{R\rho g}{3k}}$

1.1.2. Wyznaczyć zależności prędkości i położenia od czasu dla ciała o masie  $m$  poruszającego się wzdłuż prostej  $x$  pod wpływem tylko siły tarcia kinetycznego. Współczynnik tarcia jest równy  $f$ , a  $v(0) = \text{upsilon}_0$ ,  $x(0) = x_0$ . Znaleźć drogę, jaką ciało przebędzie do chwili zatrzymania się.

Odpowiedź:  $v(t) = v_0 - fgt$ ,  $x(t) = v_0t - \frac{fgt^2}{2}$ ,  $x_{max} = \frac{v_0^2}{2fg}$

1.1.3. Dwa pudła o masach 75 kg i 110 kg położono obok siebie na stole. Do pudła o masie 75 kg przyłożono poziomą siłę o wartości 620 N. Jeżeli współczynnik tarcia między pudłami a stołem jest równy 0.1 obliczyć przyspieszenie z jakim będą poruszały się pudła oraz siłę ich wzajemnego oddziaływania.

Odpowiedź:  $a = 2.35 \frac{m}{s^2}$ ;  $F_{12} = F_{21} = 368,6N$

1.1.4. Alpinista o masie 75 kg porusza się w dół, wewnątrz skalnego komina, podtrzymywany przez siły tarcia wywierane przez jego stopy oraz plecy na skalne ściany. Współczynnik tarcia statycznego między stopami, a skałą jest równy 0.8, natomiast plecami alpinisty, a skałą 0.7. Wyznaczyć minimalną wartość siły nacisku wywieraną przez alpinistę na skalne ściany. Założyć, że ściany komina są pionowe, a siły tarcia statycznego mają wartości maksymalne. Zaniedbać siłę naciągu liny asekuracyjnej.

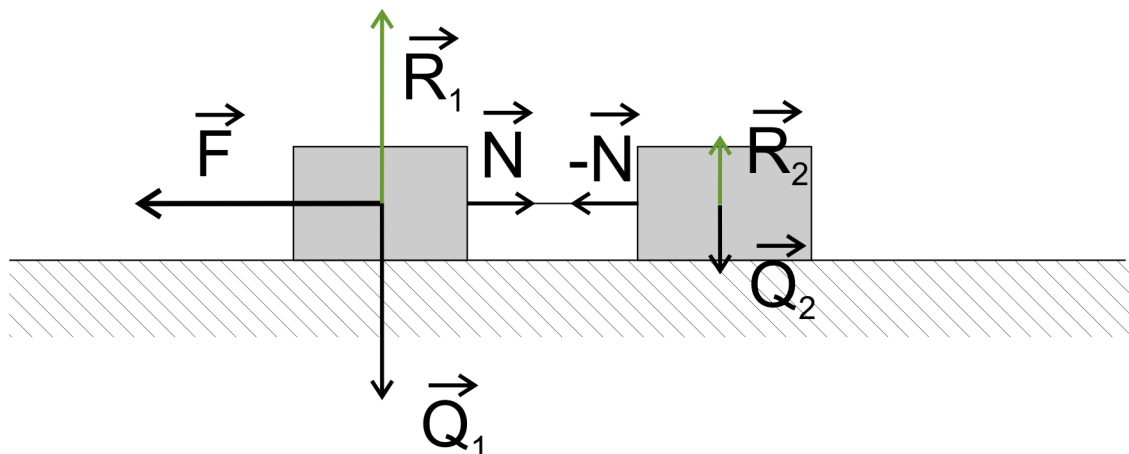
Odpowiedź:  $F_N = 500N$

1.1.5. Rowerzysta o masie 65 kg (wraz z masą roweru) zjeżdża z góry o nachyleniu  $10^\circ$  ze stałą prędkością 6 km/h z uwzględnieniem siły oporu powietrza. Jaką siłę musi włożyć, aby wjechać na górę z taką samą prędkością?

Odpowiedź:  $F = 225.7N$

1.1.6.R Dwa ciała o masach  $m_1 = 200\text{ kg}$  i  $m_2 = 100\text{ kg}$  połączono nicią, która jest w stanie wytrzymać maksymalny naciąg równy  $N_{max} = 1\text{ kN}$ . Jaką siłą można ciągnąć masę  $m_1$ , aby nie zerwać nici i jakie przyspieszenie nada ta siła rozważanemu układowi w przypadku braku tarcia? Pod jakim kątem należałoby przyłożyć do ciała o masie  $m_2$  maksymalną siłę obliczoną w powyższym przypadku aby nie zerwała się?

Czy obecność tarcia ma wpływ na maksymalną wartość przykładanej siły? Załóż, że nie jest nieważka.



Rozrysujmy wszystkie siły działające na ciała wchodzące w skład układu w przypadku braku tarcia (reffig:dyn26):  $F$ - siłą, z jaką ciągniemy ciało o masie  $m_1$ ,  $Q_1$ - siła ciężkości działająca na to ciało,  $R_1$ - siła reakcji podłoża, równa co do wartości sile  $Q_1$ ,  $N$  - siła naciągu nici (ponieważ nie jest niwazka siły naciągu nici z obu stron nici są jednakowe),  $Q_2$ - siła ciężkości działająca na ciało o masie  $m_2$ ,  $R_2$ - siła reakcji podłoża, równa co do wartości sile  $Q_2$ . Jak widać siły wypadkowe działające na każde z ciał mają jedynie składowe poziome, gdyż siły ciężkości są równoważone przez siły reakcji podłoża. Siłę wypadkową działającą na każde z ciał możemy zapisać jako iloczyn masy danego ciała i przyspieszenia  $a$  jakie nadaje mu ta siła (przyspieszenie tych ciał jest identyczne skoro są one połączone nicią), a zatem

$$am_1 = F - N , \tag{182}$$

$$am_2 = N . \tag{183}$$

Przyspieszenie układu wynosi

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} ,$$

a siła naciągu nici

$$N = \frac{F m_2}{m_1 + m_2} . \quad (184)$$

Aby nić nie uległa zerwaniu siła naciągu nie może przekroczyć wartości  $N_{max}$

$$\frac{F m_2}{m_1 + m_2} \leq N_{max} ,$$

więc siła, jaką można przyłożyć do ciała o masie  $m_1$  spełniać musi poniższy warunek

$$F \leq \frac{N_{max}(m_1 + m_2)}{m_2} ,$$

zatem

$$F \leq 3000 N ,$$

a przyspieszenie układu

$$a \leq 10 \text{ m/s}^2 .$$

Zastanówmy się teraz jak zmieniła by się wartość siły naciągu gdyby siła  $F$  przyłożona została do ciała o masie  $m_2$ . Otrzymalibyśmy równania analogiczne do równań ?? i ??

$$a m_2 = F - N ,$$

$$a m_1 = N .$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymalibyśmy następujące równanie określające naciąg nici

$$N = \frac{F m_1}{m_1 + m_2} ,$$

a zatem

$$F \leq \frac{N_{max}(m_1 + m_2)}{m_2}$$

aby niedopuszczyć do zerwania nici należałoby przyłożyć do ciała o masie  $m_2$  siłę

$$F \leq \frac{N_{max}(m_1 + m_2)}{m_1} ,$$

zatem siłę nie przekraczającą 1500 N. W przypadku braku tarcia przyłożenie siły  $F$  pod dowolnym kątem  $\alpha$  powoduje jedynie zmniejszenie siły ciągnącej (zmienia się także siła nacisku, jednak nie wpływa to na siły oporów ruchu). Siła powodująca ruch układu jest

składową poziomą  $F_x = F \sin \alpha$  przyłożonej siły  $F$ . Jeśli do masy  $m_2$  mamy przyłożyć siłę  $3000\text{ N}$  musimy ją przyłożyć pod kątem  $\alpha \geq 60\text{ deg}$ , tak aby składowa pozioma nie przekroczyła  $1500\text{ N}$ .

Sprawdźmy teraz czy tarcie ma wpływ na wartość siły maksymalnej przykładanej do ciała o masie  $m_1$ . 2.2 przedstawia nowy rozkład sił. Siła tarcia jest iloczynem współczynnika tarcia i siły nacisku, która w naszym przypadku dla obydwu ciał jest równa sile ciężkości ciała

$$T_1 = f_1 Q_1 = f_1 m_1 g ,$$

$$T_2 = f_2 Q_2 = f_2 m_2 g ,$$

gdzie  $f_1$  i  $f_2$  oznaczają odpowiednio współczynniki tarcia ciała pierwszego i drugiego o podłoże. Równania wynikające z drugiej zasady dynamiki przyjmują teraz następującą postać

$$am_1 = F - N - f_1 m_1 g ,$$

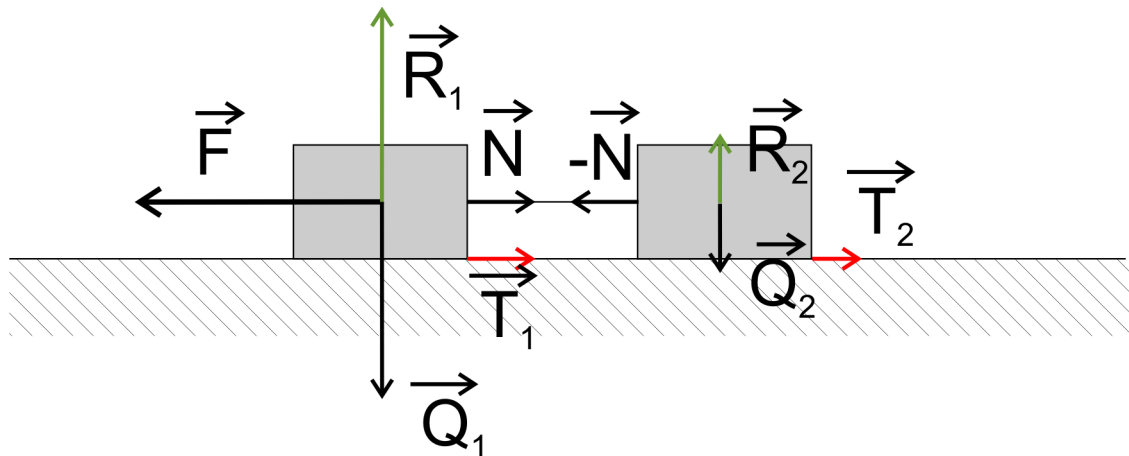
$$am_2 = N - f_2 m_2 g .$$

Po przekształceniu powyższych równań otrzymujemy

$$a = \frac{F - g(m_1 f_1 + m_2 f_2)}{m_1 + m_2} \quad i$$

$$N = \frac{m_2 F - g m_1 m_2 (f_1 - f_2)}{m_1 + m_2} .$$

Z powyższego wzoru wynika, że jeśli współczynniki tarcia  $f_1$  i  $f_2$  są takie same tarcie nie ma wpływu na wartość siły naciągu ( otrzymana wartość siły naciągu jest taka sama jak w przypadku, w którym tarcie nie występuje - patrz 184), a więc nie ma wpływu na wartość siły maksymalnej. W przypadku gdy współczynniki tarcia są różne maksymalna siła, jaką możemy ciągnąć ciała zależy od obecności tarcia.



### 3 Ruch obrotowy bryły sztywnej

#### 3.1 Wstęp teoretyczny

Mówiąc o ruchu obrotowym będziemy posługiwali się pojęciem bryły sztywnej. Bryła sztywna tak jak punkt materialny jest modelem fizycznym. W odróżnieniu od punktu materialnego jest to ciało, którego rozmiary nie mogą być zaniedbywalne wobec rozważanych przesunięć. Ponadto kształt bryły sztywnej nie zmienia się pod wpływem sił zewnętrznych (zgniatających, rozciągających, ścinających itp.) Jeżeli więc bryłę sztywną potraktujemy, jako układ  $N$  punktów materialnych to ich wzajemne odległości pozostaną stałe. W ruchu obrotowym bryły sztywnej wokół ustalonej osi, wszystkie punkty zataczają okręgi o różnych promieniach, których środki leżą na jednej prostej zwanej osią obrotu. Promienie tych okręgów stanowią więc odległości punktów bryły sztywnej od osi obrotu. Wielkością, odpowiadającą za wywołanie ruchu obrotowego jest moment siły, który definiujemy jako iloczyn wektorowy wektora wodzącego i siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (185)$$

Gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem wodzącym punktu przyłożenia siły  $\vec{f}$  względem punktu leżącego na osi obrotu. Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, wartość momentu siły przedstawia wzór:

$$M = r \cdot F \sin \alpha \quad (186)$$

Gdzie  $\alpha$  to kąt jaki tworzą wektory  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ . Odcinek o długości  $r \sin \alpha = r_x$  nazywamy ramieniem siły stąd wartość momentu siły możemy również zapisać, korzystając z tej wielkości jako:

$$M = r_x \cdot F \quad (187)$$

Moment pędu  $\vec{L}$  (kręt) punktu materialnego względem dowolnego punktu S nazywamy iloczynem wektorowym wektora wodzącego ( $\vec{r}$ ) i wektora pędu ( $\vec{p}$ ), co możemy przedstawić wzorem:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (188)$$

Moment siły i moment pędu odgrywają w ruchu obrotowym analogiczną rolę do tej jaką spełniają w ruchu postępowym siła i pęd, zatem możemy wyrazić ich związek w postaci:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (189)$$

Powyższy wzór stanowi drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego. Gdzie  $\vec{M}$  oznacza wypadkowy moment wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę sztywną, natomiast  $\vec{L}$  jest sumą wszystkich wektorów momentów pędu elementarnych mas składających się na daną bryłę. Jeśli na bryłę sztywną działają tylko takie siły, których moment względem osi obrotu jest równy zero ( $\vec{M} = 0$ ) to wówczas moment pędu w dowolnej chwili jest taki sam jak na początku. Tak sformułowany wniosek stanowi treść zasady zachowania momentu pędu. Jeżeli do wzoru definiującego moment pędu podstawimy zamiast pędu wzór wynikający z definicji tej wielkości:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (190)$$

Otrzymamy:

$$\vec{L} = mr^2 \cdot \vec{\omega} = I \cdot \omega \quad (191)$$

Gdzie  $I = mr^2$  nazywamy momentem bezwładności punktu materialnego o masie  $m$  względem środka okręgu o promieniu  $r$ , po którym porusza się ten punkt. Moment bezwładności bryły sztywnej względem ustalonej osi jest równy sumie momentów bezwładności wszystkich elementów masy tej bryły względem wybranej osi obrotu:

$$\sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 \quad (192)$$

Gdy rozmiary elementów masy na które dzielimy bryłę sztywną dążą do zera powyższą definicję momentu bezwładności możemy przedstawić za pomocą całki:

$$I = \int_M r^2 dm = \int_V \rho \cdot r^2 \cdot dV \quad (193)$$

Wykorzystując definicję momentu bezwładności możemy raz jeszcze przedstawić moment siły jako:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon} \quad (194)$$

Natomiast moment pędu jako:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (195)$$

W czasie obrotu bryły sztywnej każdy jej element o masie  $m_i$  porusza się z prędkością liniową  $v_i$ , czyli posiada energię kinetyczną  $E_{Ki}$ :

$$E_{Ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (196)$$

Energia kinetyczna bryły, w ruchu obrotowym, jest sumą energii kinetycznych wszystkich jej elementów masy, na które została podzielona stąd możemy zapisać:

$$E_K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (197)$$

Ponieważ prędkości liniowa i kątowa w ruchu obrotowym są związane zależnością:

$$v_i = r_i \cdot \omega_i \quad (198)$$

Stąd energia kinetyczna bryły sztywnej:

$$E_K = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (r_i \cdot \omega_i)^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \quad (199)$$

## 3.2 Zadania

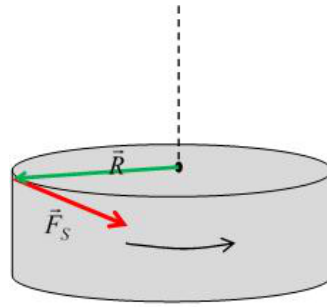
Zadanie 2.1.

Do obwodu wirującego ze stałym przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon$  walca o masie  $M$ , promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I$ , przyłożono stałą siłę styczną równą  $\vec{F}$ . Wyznacz moment tej siły względem osi walca oraz oblicz moment sił tarcia występujący w czasie ruchu obrotowego walca.

## 3.3 Rozwiązania

Moment siły  $\vec{F}$  stycznej do obwodu walca, względem punktu leżącego na osi obrotu walca, zgodnie z definicją dany jest wzorem:





Rysunek 13:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \quad (200)$$

Wartość tego momentu jest równa:

$$M = R \cdot F_s \cdot \sin 90^0 = R \cdot F_s \quad (201)$$

Ruch obrotowy walca odbywa się zgodnie z II zasadą dynamiki pod wpływem niezerowego momentu siły, który oznaczmy jako  $M_0$ , gdzie:

$$M_0 = I \cdot \varepsilon_0 \quad (202)$$

Zgodnie z treścią zadania na walec działają siła styczna oraz siła tarcia, stąd wypadkowy moment sił  $M_0$ , który jest sumą wszystkich momentów sił działających na walec jest równy:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_S + \vec{M}_T \quad (203)$$

Natomiast wartość wypadkowego momentu sił:

$$M_0 = RF_S - M_T \quad (204)$$

Stąd po podstawieniu wzoru opisującego wartość momentu  $M_0$  do powyższego równania otrzymamy:

$$M_T = RF_S - I\varepsilon \quad (205)$$

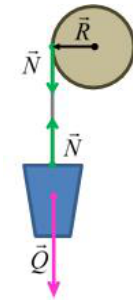
Zadanie 2.2.

Oblicz przyspieszenie liniowe, z jakim będzie opadać w dół studni wiadro o masie  $m$ , które zamocowano na łańcuchu przytwierdzonym do drewnianej belki o masie  $M$ . Przyjmij, że łańcuch jest nieważki, natomiast belka ma kształt walca o średnicy  $2R$ , a jej moment bezwładności równy jest  $I$ . Zadanie rozwiąż korzystając z zasad dynamiki.

Rozwiązanie

Niech  $\vec{N}$  wyraża siłę naciągu nici, natomiast  $\vec{Q}$  siłę ciężkości. Analizując sytuację opisaną w zadaniu, ruch wiadra w dół studni będzie ruchem jednostajnie przyspieszonym, natomiast ruch belki będzie ruchem obrotowym odbywającym się ze stałym przyspieszeniem kątowym  $\vec{\varepsilon}$ . Stąd drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego możemy zapisać w postaci:

$$ma = Q - N \quad (206)$$



Rysunek 14:

Siłą, której moment liczony względem osi belki powoduje jej ruch obrotowy jest siła naciągu, natomiast wartość momentu tej siły dana jest wzorem:

$$M = R \cdot N \quad (207)$$

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego belki:

$$I \cdot \varepsilon = RN \quad (208)$$

Wykorzystując fakt, że przyspieszenie liniowe, z jakim będzie opadać w dół studni wiadro jest takie samo jak przyspieszenie styczne punktów leżących na brzegu obracającej się belki,

możemy zapisać związek przyspieszenia liniowego z kątowym w postaci:

$$a = \varepsilon \cdot R \quad (209)$$

Łącząc równania w układ równań otrzymamy:

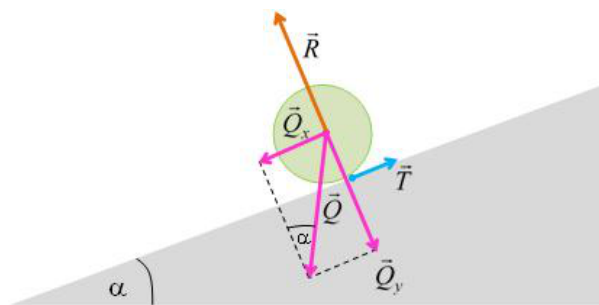
$$\begin{cases} ma = mg - N \\ I\varepsilon = RN \\ a = \varepsilon R \end{cases} \quad (210)$$

Jednym z rozwiązań powyższego układu jest wzór przedstawiający przyspieszenie liniowe z jakim wiadro opada w dół studni:

$$a = \frac{mgR}{I + mR^2} \quad (211)$$

Zadanie 2.3.

Z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  stacza się bez poślizgu kula o masie  $m$ , promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I = \frac{2}{5}mR^2$ . Wyznaczyć przyspieszenie liniowe z jakim kula się stacza w dół równi. Znaleźć współczynnik tarcia tocznego dla staczającej się kuli.



Rysunek 15:

Rozwiązanie

Dla bryły toczącej się bez poślizgu z równi pochyłej prawdziwy jest diagram sił przedstawiony na rysunku. Toczenie się ciała możemy potraktować jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego względem środka kuli. Równania ruchu wyznaczone na podstawie drugiej zasady

dynamiki ruchu postępowego:

$$ma = mg \sin \alpha - T \quad (212)$$

oraz drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego:

$$I \cdot \varepsilon = R \cdot T \quad (213)$$

tworzą układ równań, który uzupełniamy wzorem przedstawiającym związek przyspieszenia liniowego z kątowym:

$$a = \varepsilon \cdot R \quad (214)$$

Rozwiązaniem układu trzech powyższych równań są wzory opisujące przyspieszenie liniowe staczającej się bez poślizgu kuli i tarcie toczne dane w postaci:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{5}{7}g \sin \alpha \quad (215)$$

Oraz

$$T = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{2}{7}mg \sin \alpha \quad (216)$$

Tarcie toczne powstaje podczas toczenia się bez poślizgu kuli po powierzchni równi i należy pamiętać, że jest znacznie mniejsze od tarcia posuwistego (kinematycznego). Zgodnie z definicją siła tarcia tocznego wyraża się wzorem:

$$T = f_t \frac{F_n}{R} \quad (217)$$

Gdzie  $R$  oznacza promień toczącego się ciała,  $f_t$  jest współczynnikiem tarcia tocznego i w odróżnieniu od współczynników tarcia statycznego i kinematycznego posiada wymiar długości.  $F_n$  jest siłą reakcji podłoża na siłę nacisku (czyli siłę dociskającą do siebie kulę i powierzchnię równi). W naszym przypadku siła reakcji podłoża ma wartość:

$$F_n = mg \cos \alpha \quad (218)$$

Stąd wyznaczona na podstawie trzech powyższych równań wartość współczynnika tarcia tocznego jest równa:

$$f_t = \frac{2}{7}R \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (219)$$

Zadanie 2.4.

Walec o masie  $M$  i promieniu  $R$  obraca się wokół osi przechodzącej przez jego środek. Ruch obrotowy walca można opisać równaniem  $\varphi(t) = At^2 - Bt^3$ , gdzie  $\varphi(t)$  oznacza drogę kątową przebytą przez każdy punkt walca leżący poza osią obrotu,  $t$  czas, natomiast  $A$  i  $B$  to stałe. Znaleźć zależność momentu siły działającego na walec od czasu ( $M(t)$ ).

Rozwiązanie

Punktem wyjścia jest druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym dana w postaci:

$$M = I \cdot \varepsilon \quad (220)$$

Gdzie przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$ , zgodnie z definicją to pierwsza pochodna drogi kątowej  $\varphi$  po czasie:

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} \quad (221)$$

Stąd obliczając pochodną po czasie z drogi kątowej otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}(At^2 - Bt^3) = 2At - 3Bt^2 \quad (222)$$

Po podstawieniu powyższego równania do wzoru na moment siły otrzymamy:

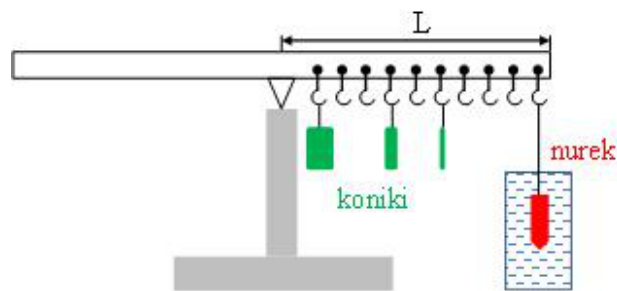
$$M = M(t) = I \cdot \varepsilon(t) = \frac{1}{2}mR^2(2A - 3Bt^2) \cdot t \quad (223)$$

Zadanie 2.5.

Jednym ze sposobów wyznaczenia gęstości cieczy jest wykorzystanie tzw. wagi Mohra (patrz

rysunek), która jest dźwignią dwuramienną. Na końcu dźwigni zawieszony jest szklany nurek, zanurzony w menzurce z cieczą. Aby uzyskać równowagę ramienia dźwigni, które podzielone jest na 10 równych części zaopatrzonych w haczyki, wieszają się ciężarki, których stosunek mas wynosi: 1:10:100. Przyjmując znaną gęstość cieczy wzorcowej  $\rho_W$  oraz wiedząc, że dla cieczy wzorcowej waga jest w równowadze, gdy na haczykach o numerach  $p_W$ ,  $q_W$  i  $r_W$  wiszą ciężarki o masach  $m$ ,  $m/10$  i  $m/100$ , natomiast dla cieczy badanej odczytane numery to  $p$ ,  $q$  i  $r$ . Wyznaczyć wzór na gęstość cieczy badanej.

Rozwiązanie



Rysunek 16:

Po zanurzeniu nureka w cieczy o znanej gęstości w warunkach równowagi wypadkowy moment sił działających na dźwignię musi być równy zero. Stąd moment siły wyporu liczony względem punktu podparcia (w odległości  $L$ ) musi równoważyć momenty sił ciężkości ciężarków zawieszonych w odległościach  $p_W \cdot L/10$ ,  $q_W \cdot L/10$  oraz  $r_W \cdot L/10$ :

$$\rho_W \cdot V \cdot g \cdot L = mg \left( \frac{p_W}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{q_W}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{r_W}{10} \right) \quad (224)$$

Analogiczne równanie dostaniemy dla przypadku, w którym nurek zostanie zanurzony w cieczy o nieznannej gęstości :

$$\rho \cdot V \cdot g \cdot L = mg \left( \frac{p}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{q}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{r}{10} \right) \quad (225)$$

Dzieląc równania stronami otrzymamy:

$$\rho = \rho_W \frac{p + \frac{q}{10} + \frac{r}{100}}{p_W + \frac{q_W}{10} + \frac{r_W}{100}} \quad (226)$$

Zadanie 2.6

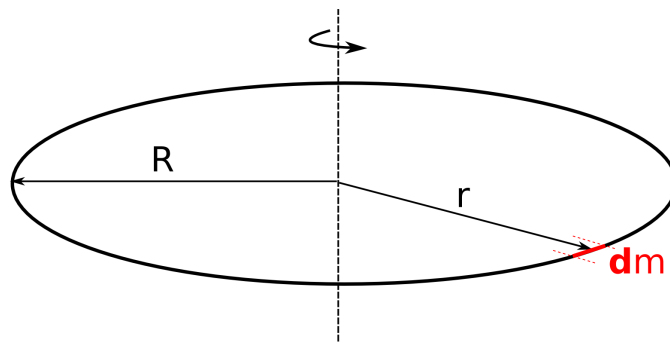
Korzystając z definicji momentu bezwładności dla ciągłego rozkładu masy wyznacz moment bezwładności jednorodnej kuli o masie  $m$  i promieniu  $R$  dla osi obrotu przechodzącej przez środek masy tej kuli.

Rozwiązanie

W kuli, jako obiekcie trójwymiarowym, może wyodrębnić płaszczyznę kolistą, która z kolei składa się z współśrodkowych okręgów. Na tej podstawie zwiększając wymiar rozpatrywanego obiektu od pierścienia poprzez koło wyznaczmy moment bezwładności kuli zgodnie z równaniem 193.

a) moment bezwładności pierścienia o promieniu  $R$  i masie  $m$

Zgodnie z 193 moment bezwładności dowolnej bryły sztywnej można zapisać w postaci



Rysunek 17: Rysunek przedstawiający pierścień wycięty z kuli

$$I_p = \int_M r^2 dm.$$

Dla pierścienia odległość poszczególnych punktów o masie  $dm$  od osi obrotu jest stała ( $r = R$ ), więc powyższe wyrażenie zgodnie z rachunkiem całkowym możemy przedstawić następująco

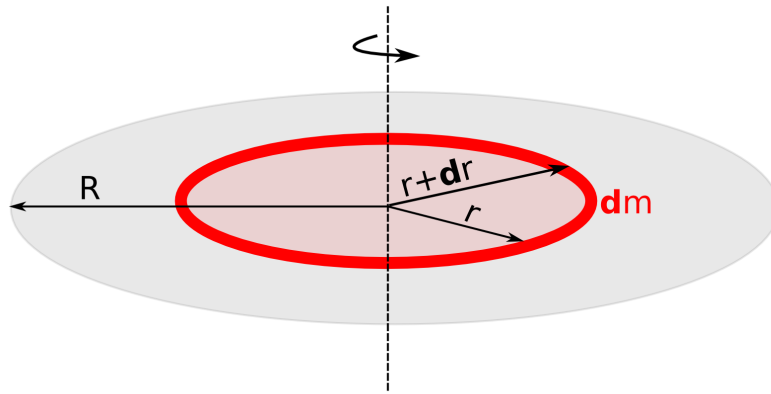
$$I_p = R^2 \int_M dm.$$

Masa całego pierścienia wynosi  $m$ , więc tyle także wynosi całka z  $dm$ , co prowadzi do ostatecznego wyniku na moment bezwładności pierścienia

$$I_p = mR^2. \tag{227}$$

b) moment bezwładności koła o promieniu  $R$  i masie  $m$  W przypadku koła należy zsumować wszystkie przyczynki pochodzące od pierścieni tworzących koło (rys. 18), czyli

$$I_k = \int dI_p = \int_M r^2 dm.$$



Rysunek 18: Rysunek przedstawiający koło wycięte z kuli

W takim przypadku, rozkład masy zależy już od odległości od osi obrotu, więc należy obydwie zmienne uzależnić od siebie.

Zakładając jednorodność rozkładu masy możemy zapisać, że masa koła o promieniu  $r$  wynosi

$$m = \rho \pi r^2,$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału koła. Na podstawie powyższej zależności, przyrost masy w funkcji odległości od osi obrotu będzie zmieniał się zgodnie z zależnością

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr.$$

Podstawiając powyższe zależności do definicji momentu bezwładności w granicach od 0 do  $R$ , otrzymamy

$$I_k = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} \Big|_0^R,$$

co ostatecznie prowadzi do momentu bezwładności koła (krążka) o wartości

$$I_k = \frac{1}{2}mR^2. \quad (228)$$

Można wykazać, że moment bezwładności powyższego obiektu nie zależy od grubości koła (walca), co pozostawia się czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania po analizie rozwiązania podpunktu c) zadania.

c) moment bezwładności kuli o promieniu  $R$  i masie  $m$

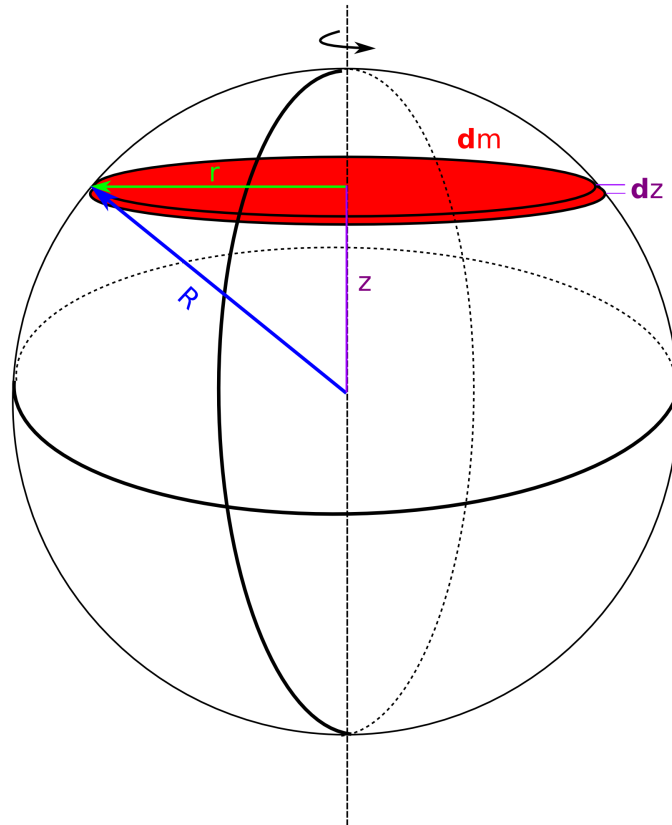
Moment bezwładności w takiej sytuacji jest sumą przyczynków pochodzących od cienkich krążków o grubości  $dz$  liczonych od  $-R$  do  $R$ . Ogólnie można zapisać to równaniem

$$I = \int I_k = \int \frac{1}{2}r^2 dm.$$

Poszczególne krążki przy założeniu jednorodności kuli w całej objętości posiadają masę

$$dm = \rho \pi r^2 dz.$$





Rysunek 19: Rysunek przedstawiający kulę w której wyodrębniono krążek o grubości  $dz$ .

Jak widać z rysunku 19 promień krążka  $r$  jest zależny od odległości  $z$ . Wykorzystając twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy, że

$$r^2 = R^2 - z^2.$$

Łącząc powyższe zależności otrzymuje do rozwiązania następujące wyrażenie całkowe

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz,$$

co po rozwiązaniu prowadzi do

$$I = \frac{1}{2}\pi\rho \left( R^4 z + \frac{z^5}{5} - 2R \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Wyrażając moment bezwładności kuli poprzez masę a nie gęstość, otrzymamy ostateczny wynik

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

Zadania dodatkowe

2.1.1. Podczas zawodów w rzucie młotem zawodnik wykonując cztery pełne obroty rozpędza

młot o masie 7,3 kg do prędkości  $v = 28 \frac{m}{s}$ . Zakładając, że ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem kątowym, a koniec młota zatacza w przestrzeni okrąg o promieniu  $r = 1,2m$  obliczyć: a) przyspieszenie kątowe, jakie uzyska młot, b) składowe styczną i dośrodkową przyspieszenia liniowego oraz c) siłę wywieraną przez zawodnika na młot w chwili wyrzutu.

Odpowiedź: a)  $\epsilon = 10,9s^{-2}$ , b)  $a_t = 13,1 \frac{m}{s^2}$ ,  $a_n = 653,3 \frac{m}{s^2}$ , c)  $F = 95,5N$

2.1.2. Spadkownica Atwooda (zwana także maszyną Atwooda) skonstruowana w 1784 przez George'a Atwooda w celu wykonania eksperymentu mającego zweryfikować prawa rządzące ruchem jednostajnie przyspieszonym, zbudowana jest z bloczka przez który przerzucona jest nić z dwoma ciężarkami o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Jeżeli bloczek ma promień  $R$  i moment bezwładności  $I$ , obliczyć przyspieszenia liniowe ciężarków  $m_1$  i  $m_2$ . Porównać otrzymane wartości przyspieszenia z tymi, które otrzymamy zaniedbując masę bloczka.

Odpowiedź:  $a = \frac{g(m_2 - m_1)}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}$

2.1.3. Podczas gry w baseball, miotacz wyrzucając piłkę o masie 200 g, nadaje jej przyspieszenie o wartości  $7m/s^2$ . Przyjmując długość przedramienia gracza za równą 31 cm obliczyć moment siły wyrzutu piłki oraz wartość siły wywieranej przez mięśnie gracza na piłkę.

Odpowiedź:  $M = 0,4Nm$ ,  $F = 1,4N$

2.1.4. Cząsteczka tlenu składa się z dwóch atomów tlenu, których masa wypadkowa jest równa  $5,3 \times 10^{-26}kg$ , natomiast moment bezwładności cząsteczki względem osi przechodzącej przez środek wiązania łączącego atomy jest równy  $1,9 \times 10^{-46}kgm^2$ . Obliczyć długość wiązania cząsteczki tlenu.

Odpowiedź:  $d = 1,2 \times 10^{-10}m$

2.1.5. Cylinder o masie 4,8 kg i promieniu 0,071 m, obracający się względem osi przechodzącej przez jego środek z prędkością 3000 obr/min jest hamowany siłą o momencie 1,2 Nm. Ile obrotów wykona cylinder do momentu zatrzymania i kiedy to nastąpi?

Odpowiedź:  $N = 78,5$ ,  $t = 3,1s$

## 4 Zasady zachowania w mechanice.

### 4.1 Wstęp teoretyczny

#### 4.1.1 Pęd. Zasada zachowania pędu

W poprzednich rozdziałach punkt materialny scharakteryzowany był przez swoją masę  $m$ , a stan ruchu określała jego prędkość  $\vec{v}$ . Aktualnie wygodniej będzie posługiwać się złożeniem tych wielkości tj. pędem punktu materialnego - wielkość wektorowa, która jest zdefiniowana następująco

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]. \quad (229)$$

Wówczas II zasadę dynamiki dla punktu materialnego 145 możemy przekształcić do postaci

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (230)$$

W ogólności, zmianie ulegać także masa w czasie, więc równanie 145 można przedstawić w postaci

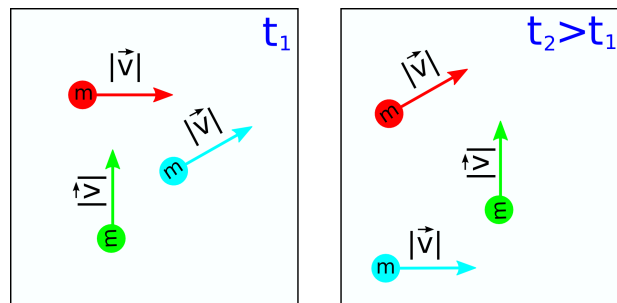
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (231)$$

Powyższą zależność nazywa się uogólnioną postacią II zasady dynamiki punktu materialnego i na jej podstawie można sformułować *zasadę zachowania pędu*.

Jeżeli na punkt materialny lub układ punktów materialnych nie działa żadna siła zewnętrzna lub działające siły zewnętrzne równoważą się to całkowity pęd układu pozostaje stały w czasie w inercyjnym układzie odniesienia.

W skrócie można to ująć w postaci

$$\text{Jeżeli } \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{to} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{czyli} \quad \vec{p} = \text{const.}$$



Rysunek 20: Zasada zachowania pędu dla układu punktów materialnych rozróżnianych poprzez ich barwę. Punkty te mają tą samą masę  $m$  i szybkość  $v$  w dwóch chwilach czasu  $t_1$  i  $t_2$ . Układ jest inercyjny odizolowany od sił zewnętrznych. Pęd całkowity układu jest stały w czasie.

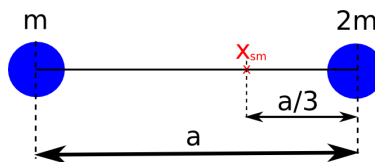
Należy jednak pamiętać, że jeżeli mamy układ punktów materialnych odizolowany od sił zewnętrznych to poszczególne pędy ciał mogą ulegać zmianie jednak całkowity pęd układu musi pozostać stały w czasie (rys.20). W takim układzie powinna więc zachodzić równość

$$\sum_i \vec{p}_i(t_1) = \sum_j \vec{p}_j(t_2) \quad (232)$$

Okazuje się, iż zamiast śledzić zachowanie się wszystkich punktów materialnych wygodniej jest śledzić zachowanie środka masy układu (rys.21). Położenie środka masy dyskretnego układu punktów materialnych rozmieszczonych na prostej możemy wyznaczyć z zależności

$$x_{sm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad (233)$$

przy czym wybór punktu odniesienia, względem którego liczyć będziemy położenie środka masy jest całkowicie dowolne.



Rysunek 21: Układ dwóch mas  $m$  i  $2m$  odległych od siebie o  $a$ . Środek masy tego układu jest na odcinku łączącym obydwie masy w odległości  $2a/3$  od masy  $m$ .

W przypadku ciągłego rozkładu masy, środek masy możemy określić za pomocą formuły całkowej

$$x_{sm} = \frac{1}{M} \int_M x_i(m) dm. \quad (234)$$

Pęd środka masy w układzie inercjalnym w którym nie działają żadne siły zewnętrzne pozostaje stały w czasie. Zasadę zachowania pędu stosuje się do ciał łączących się lub rozdzielających pod wpływem sił wewnętrznych, do opisu ruchu rakiety oraz w przypadku zderzeń sprężystych i niesprężystych punktów materialnych.

#### 4.1.2 Zasada zachowania momentu pędu

Jeżeli w rozpatrywanym układzie ciał, będzie znajdować się bryła sztywna i rozpatrywać będziemy jej ruch, wówczas zasada zachowania pędu nie pozwala dokładnie wyjaśnić problem zmian ruchu tego ciała. W przypadku bryły sztywnej musimy stosować *zasadę zachowania momentu pędu*, której treść wyraża się następująco

Jeżeli na bryłę sztywną nie działa zewnętrzny moment siły lub suma wypadkowa zewnętrznych momentów sił jest równa zeru wówczas całkowity moment pędu takiego układu jest stały w czasie. Za pomocą symboli można to zapisać w postaci

$$\text{Jeżeli } \sum_i \vec{M}_i = 0 \quad \text{to} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{wówczas} \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Ponownie należy pamiętać, że poszczególne momenty pędu ciał w układzie mogą ulegać zmianie lecz ich suma wektorowa musi być stała w każdej chwili czasu, gdy nie działa zewnętrzny wypadkowy moment siły na układ.

$$\sum_i \vec{L}_i(t_1) = \sum_j \vec{L}_j(t_2). \quad (235)$$

Zasada zachowania momentu pędu jest wykorzystywana przez łyżwiarzy figurowych (zmiana prędkości kątowej jest spowodowana zmianą momentu bezwładności przez różne ułożenie rąk łyżwiarza) - łyżwiarz obraca się szybciej lub wolniej. Zasada zachowania momentu pędu pozwala wyjaśnić orbitalny ruch planet (prawa Keplera) jak i jest podstawą wyjaśnienia struktury atomu (model atomu wg. Bohra).

### 4.1.3 Praca

Wykonana praca w fizyce jest zdefiniowana poprzez iloczyn skalarny przyłożonej siły do ciała  $\vec{F}$  oraz jego infinytezymalnego przesunięcia  $\Delta\vec{r}$

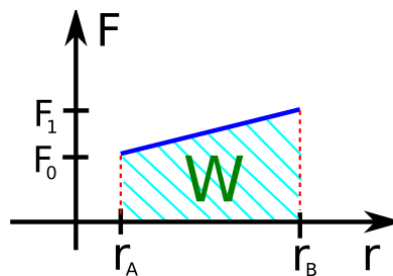
$$\Delta W = \vec{F} \circ \Delta\vec{r}, \quad (236)$$

tj. takie przesunięcie, na którym można uważać, że siła nie zmienia swojej wartości. Całkowita wykonana praca to suma poszczególnych prac na poszczególnych odcinkach przemieszczenia

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \vec{F}_i \circ \Delta\vec{r}_i \quad [\text{J}], \quad (237)$$

lub w przypadku siły działającej w sposób ciągły, definicję pracy możemy przedstawić w postaci całkowej

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_i(\vec{r}) \circ d\vec{r}. \quad (238)$$



Rysunek 22: Graficzna interpretacja pracy.

Jednostką pracy w układzie SI jest džul. W przypadku nieznanowości rachunku całkowego, pracę możemy obliczyć korzystając z wykresu zależności  $F(r)$  - (rys.22). Obliczone pole pod wykresem funkcji  $F(r)$  na rysunku 22, możemy interpretować jako wykonaną pracę. Metoda ta ma jednak poważną wadę, iż za jej pomocą można wyznaczyć pracę tylko dla sił nie zmieniających się w trakcie przemieszczania ciała lub sił zależących liniowo od przemieszczenia.

#### 4.1.4 Moc

Pod pojęciem mocy średniej kryje się ilość wykonanej pracy w jednostce czasu

$$P_{sr} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [\text{W}]. \quad (239)$$

Jednostką mocy jest wat. Jest to jednak moc, kiedy praca w każdej jednostce czasu ma stałą wartość. Dla pracy, która zmienia się w poszczególnych jednostkach czasu lepiej stosować pojęcie mocy chwilowej

$$P_{chw} = \frac{dW}{dt}, \quad (240)$$

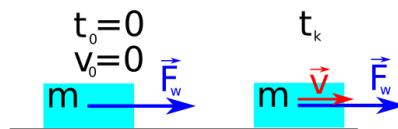
czyli pochodną pracy po czasie. Graficzną interpretacją mocy chwilowej jest wykres zależności  $F(v)$  - pole pod wykresem będzie odpowiadało wartości mocy chwilowej.

#### 4.1.5 Energia kinetyczna

Energia kinetyczna punktu materialnego o masie  $m$  opisuje nam stan ruchu tego punktu. Energia ta jest zawsze dodatnia i wyraża się wzorem

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (241)$$

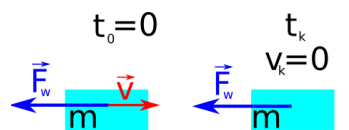
Na rysunku (rys.23) przedstawione zostało ciało, które w chwili czasu  $t_0$  spoczywało, po czym pod wpływem wypadkowej siły  $F_w$  zaczęło się poruszać ruchem przyspieszonym po linii prostej.



Rysunek 23: Punkt materialny poruszający się ruchem jednostajnie przyspieszonym, prostoliniowym pod wpływem wypadkowej siły  $F_w$ .

W tej sytuacji siła  $F_w$  w wyniku przemieszczenia wykonuje następującą pracę

$$W = \vec{F}_w \circ \vec{r} = F_w \cdot s \cdot \cos(0) = ma \cdot \frac{a(\Delta t)^2}{2} = m \frac{a^2(\Delta t)^2}{2} = m \frac{v^2 - 0^2}{2} = E_{k_k} - E_{k_p} = \Delta E_k.$$



Rysunek 24: Punkt materialny poruszający się ruchem jednostajnie opóźnionym, prostoliniowym pod wpływem wypadkowej siły  $F_w$ .

W przypadku kiedy siła  $F_w$  będzie przyczyną ruchu jednostajnie opóźnionego tak jak przedstawiono to na rysunku 24, wówczas siła  $F_w$  wykona następującą pracę

$$W = \vec{F}_w \circ \vec{r} = F_w \cdot s \cdot \cos(0) = ma \cdot (v\Delta t - \frac{a(\Delta t)^2}{2}) = m \cdot \frac{v}{\Delta t} \cdot \frac{v - v_k}{2\Delta t} = E_{k_p} - E_{k_k} = -\Delta E_k$$

W obydwu przypadkach wykonana praca  $W$  jest miarą zmiany energii kinetycznej  $\Delta E_k$  układu. Dodatnia zmiana energii kinetycznej oznacza, że praca została wykonana nad ciałem, zaś ujemny przyrost energii kinetycznej oznacza pracę wykonaną przez ciało.

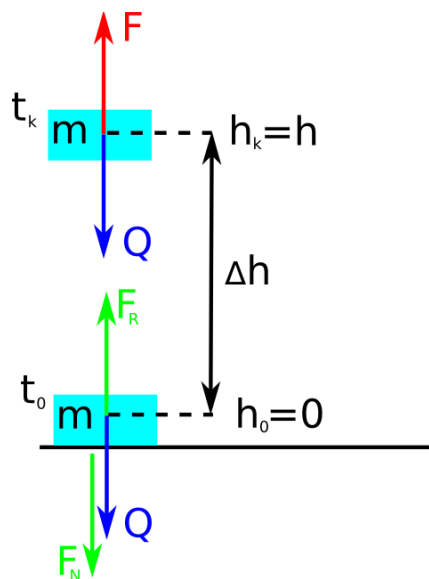
Często, równanie 241 opisujące energię kinetyczną ciała możemy przedstawić za pomocą pędu i masy tego ciała w postaci

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (242)$$

#### 4.1.6 Energia potencjalna grawitacji

Energia potencjalna grawitacji informuje nas o położeniu ciała lub układu ciał w przestrzeni oraz jego zdolności do wykonania pracy.

Rozważmy punkt materialny o masie  $m$ , który początkowo spoczywa w ziemskim polu grawitacyjnym Ziemi (rys. 25). W chwili  $t_0$  na ciało działa siła ciężkości  $Q$  jak oraz równoważąca



Rysunek 25: Ciało o masie  $m$  znajdujące się w polu grawitacyjnym.

ją siła reakcji  $F_R$ . Aby ciało o masie  $m$  straciło kontakt z podłożem - tj. siła nacisku  $F_N$  ma wartość równą zero, musimy zadziałać zewnętrzną siłą  $F$  co do wartości równą ciężarowi tego ciała  $Q$ . Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki punktu materialnego, ciało będzie poruszało się ruchem jednostajnym. Wobec tego, siła  $F$  wykonuje następującą pracę

$$W = \vec{F} \circ \vec{\Delta r} = F \cdot \Delta r = mg \cdot (h_k - h_0) = E_p(t_k) - E_p(t_0) = \Delta E_p.$$

Powyższa zależność jest wyprowadzeniem znanego wzoru na energię potencjalną w pobliżu powierzchni Ziemi

$$E_p = mgh. \quad (243)$$

Należy jednak pamiętać, iż wzór 243 daje poprawne wyniki ruchu ciał tylko w pobliżu powierzchni Ziemi. Ważną rzeczą w trakcie obliczeń jest także wybór poziomu w przestrzeni, od którego będziemy liczyć energię potencjalną ciała na danej wysokości. Pomimo dowolności wyboru poziomu energii potencjalnej równej zero dla danego ciała, zaleca się wybór najniższego poziomu jakie może osiągnąć to ciało. Jest to spowodowane tym, że energia potencjalna grawitacji opisana wzorem 243 musi być zawsze dodatnia.

Jeżeli jednak będziemy rozważać energię potencjalną ciała, które znajdują się w dużo większej odległości od powierzchni Ziemi należy skorzystać z zależności

$$E_p = -G \frac{M_z m}{r}, \quad (244)$$

w której  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  jest stałą grawitacji,  $M_z$  masą Ziemi,  $m$  masą ciała, a  $r$  jest odległością pomiędzy środkiem Ziemi, a obiektem o masie  $m$ . Należy pamiętać, że w tym układzie, energia potencjalna jest zawsze ujemna oraz przyjmuje wartość równą zero w nieskończoności. Jeżeli wykonamy pracę równą co do wartości bezwzględnej wartości energii potencjalnej opisanej wzorem 244, wówczas ciało to nie będzie oddziaływać ze źródłem pola - układ ciał przestaje być związanym.

Zależność 244 wynika z faktu, iż pole grawitacyjne jest polem centralnym, gdzie spełniona jest zależność

$$\vec{F}_g = -\text{grad}E_p. \quad (245)$$

Funkcja grad opisana jest w dodatku B.3. Znak minus w zależności 245 informuje nas, że wektor siły grawitacji  $F_g$  będzie zwrócony w stronę malejących wartości energii potencjalnej względem źródła pola grawitacyjnego.

#### 4.1.7 Zasada zachowania energii mechanicznej

Jeżeli będziemy rozpatrywać ciało o masie  $m$  poruszające się blisko powierzchni Ziemi ale na różnych wysokościach, wówczas możemy ciało przyporządkować energię kinetyczną opisana wzorem 241 oraz energię potencjalną opisana wzorem 243. Wówczas energia całkowita  $E_c$  tego ciała wynosi

$$E_c = E_k + E_p. \quad (246)$$

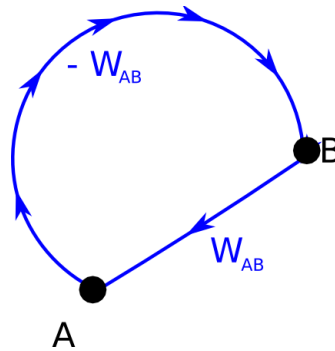
Należy pamiętać, że przy tych założeniach energia całkowita jest zawsze energią dodatnią. Jeżeli bilans energii opisany zależności 246 jest stały w czasie, wówczas spełniona jest *zasada zachowania energii mechanicznej*, której treść jest następująca



Jeżeli ruch ciała lub układu ciał odbywa się w polu sił zachowawczych, to energia całkowita tego ciała lub układu ciał pozostaje stała w czasie. Energia potencjalna może zamieniać się na energię kinetyczną i na odwrót, jednak ich całkowita suma w układzie musi pozostać stała w czasie.

$$E_c(t) = E_k(t) + E_p(t) = \text{const} \quad (247)$$

Aby można było stosować zasadę zachowania energii należy w pierwszej kolejności stwierdzić, czy ruch układu ciał odbywa się w polu sił zachowawczych. Matematycznie polega to na sprawdzeniu czy rotacja linii sił pola (patrz B.3), tzw. wirowość pola jest równa zero. Aktualnie jednak ograniczymy się wyłącznie do ostatecznych wniosków matematycznych przekształceń, aby scharakteryzować siłę zachowawczą. Otóż siłę nazywamy zachowawczą, jeżeli praca tej siły na drodze zamkniętej jest równa zero. Co więcej, praca tej siły nie zależy od toru ruchu pomiędzy dwoma dowolnymi punktami w tym polu, lecz od położenia początkowego i końcowego punktu (rys.26). Wspomniane było wcześniej, że pole grawitacyjne



Rysunek 26: Praca  $W$  wykonywana w polu sił zachowawczych na drodze zamkniętej zawsze wynosi zero.

jest polem centralnym, więc liniami sił pola grawitacyjnego są półproste wychodzące ze źródła pola i nie przecinające się ze sobą. Pole te nie zawiera żadnych wirów linii pola, więc siła grawitacji jest siłą zachowawczą. Łatwo to także wykazać, rozważając rzut pionowy w pobliżu Ziemi. Jeżeli ciało wznosi, to siła grawitacji  $F_g$  jest przeciwnie skierowana do przemieszczenia ciała - praca ciała na tym odcinku przemieszczenia jest ujemna i wynosi  $-W$ . Jednak w momencie, kiedy ciało zaczyna opadać, zwrot wektora przemieszczenia i działającej siły grawitacji  $F_g$  jest taki sam, poprzez co praca ciała jest dodatnia (pole grawitacyjne oddało energię ciała) i wynosi  $+W$ . Praca siły grawitacji na całej drodze wynosi więc zero. Na tej samej zasadzie możemy stwierdzić, że wszelkie siły oporu ruchu wykonują zawsze pracę ujemną nad ciałem lub układem ciał (siła oporu jest zawsze przeciwnie zwrócona do przemieszczenia) tj. na każdym odcinku przemieszczenia praca jest zawsze ujemna, dlatego siły oporu są siłami niezachowawczymi. W obecności sił niezachowawczych nie można stosować zasady zachowania energii. Pewnym rozwiązaniem tego problemu jest skorzystanie z

twierdzenia o pracy i energii, tzn. z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$W = \Delta E. \quad (248)$$

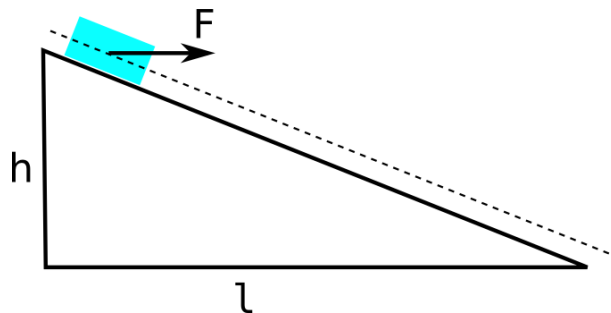
W takiej sytuacji po ułożeniu odpowiedniego bilansu energii i uwzględnieniu prac sił niezachowawczych, jesteśmy w stanie ustalić energię kinetyczną i potencjalną w danej chwili czasu ruchu tego ciała lub układu ciał.

## 4.2 Zadania

**4.1** W samolocie odrzutowym prędkość wlatującego powietrza wynosi  $v_1$ , a prędkość wylatujących spalin  $v_2 > v_1$ . Oblicz siłę ciągu samolotu, jeżeli w czasie  $\Delta t$  przez samolot przelatuje masa  $m_1$  powietrza i następuje spalanie  $m_2$  masy paliwa.

**4.2** Człowiek o masie  $m_1$  znajdujący się w łódce o masie  $m_2$  ciągnie linę działając stałą siłą  $F$ . Drugi koniec liny przywiązany jest do: a) drzewa stojącego na brzegu; b) łódki  $B$  o masie  $m_3$ , która może pływać swobodnie. Oblicz pracę wykonaną przez człowieka w czasie  $\Delta t$  w obu przypadkach. Opory ruchu w obydwu przypadkach mogą być pominięte.

**4.3** Ciało o masie  $m$  zsuwane jest z równi pochyłej o wysokości  $h$  i podstawie  $l$  siłą  $F$  przyłożoną poziomo - rysunek 27. Współczynnik tarcia ciała o równię wynosi  $f$ . Oblicz pracę wykonaną przez siłę  $F$  przy zsuwaniu ciała ruchem jednostajnym wzdłuż całej równi.



Rysunek 27: Rysunek do zadania 4.3 .

**4.4** Samochód ciężarowy może wjeżdżać pod górę po drodze, której nachylenie wynosi  $a$  na każdy odcinek  $s$  drogi, z prędkością  $v_0$ . Siła oporu równa jest  $1/25$  ciężaru samochodu. Z jaką prędkością będzie zjeżdżał ten samochód z tej samej góry, przy tej samej mocy silnika.

**4.5** Obliczyć średnią moc rozwijaną przez gazy w trakcie wybuchu w lufie karabinowej, jeżeli masa kuli wynosi  $m$ , jej prędkość przy wylocie z lufy  $v_k$ , a długość lufy wynosi  $l$ .

**4.6** Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby ustawić jednorodny ołówek o długości  $l$  i masie  $m$  w pozycji pionowej na stole. Ołówek początkowo leży na stole w pozycji poziomej.

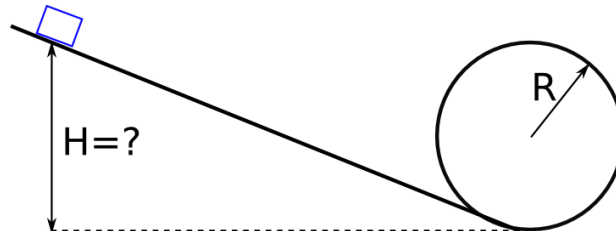
**4.7** Przenosząc ciało o masie  $m$  z punktu  $A$  o energii potencjalnej  $-E_{pA}$  do punktu  $B$  wykonano pracę  $W$ . Oblicz energię potencjalną tego ciała w punkcie  $B$ .

**4.8** Oblicz pracę, jaką należy wykonać, aby ciało o masie  $m$  przenieść z powierzchni ziemi ruchem jednostajnym na wysokość równą promieniowi ziemskiemu.

**4.9** Student wyrzucił pionowo do góry monetę o masie  $m$  z prędkością początkową  $v_0$  z wysokości  $h$  względem chodnika. Wyznacz maksymalną wysokość względem ziemi, na jaką wzniesie się moneta oraz prędkość końcową z jaką upadnie moneta na chodnik. Wykreśl zależność energii całkowitej, kinetycznej i potencjalnej w funkcji czasu dla czasu lotu monety w polu grawitacyjnym. Opory ruchu można zaniedbać.

**4.10** Z wieży o wysokości  $H$  wypchnięto poziomo piłkę tenisową o masie  $m$  z prędkością  $v_0$ . Na jakiej wysokości względem ziemi a) energia kinetyczna wzrosła trzykrotnie? b) pęd piłki zwiększył się dwukrotnie?

**4.11** Ciało zsuwa się z równi pochyłej bez oporów ruchu i wpada do pierścienia o promieniu  $R$ . Z jakiej najmniejszej wysokości powinno zsuwać się ciało, aby mogło zatoczyć pełen okrąg bez oderwania się w najwyższym punkcie pętli.



Rysunek 28: Rysunek do zadania 4.11 .

**4.12** Wyprowadź zależność na drugą prędkość kosmiczną. (II prędkość kosmiczna jest to prędkość potrzebna ciału, aby opuściło pole grawitacyjne Ziemi. Średni promień Ziemi  $R_z = 6400 \text{ km}$ ).

**4.13** Wyznacz prędkość i stratę energii kinetycznej w wyniku zderzenia idealnie, centralnie niesprężystego dwóch ciał o masach  $m_1$  i  $m_2$  poruszających się naprzeciw siebie z szybkościami  $v_1$  i  $v_2$ .

**4.14** Naprzeciw siebie poruszają się ciała o masie  $m_1$  z szybkością  $v_1$  oraz ciało o masie  $m_2$  z szybkością  $v_2$ , po czym zderzają się idealnie, centralnie sprężysto. Z jakimi szybkościami będą poruszać się ciała po tym zderzeniu.

**4.15** Dwie piłeczki o masie  $m$  i  $4m$  zawieszono w jednym punkcie na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości  $L$ . Na jaką wysokość należy odchylić cięższą kulkę (nić jest nadal napięta), aby lżejsza kulka mogła utworzyć kąt prosty z pionem po zderzeniu idealnie, centralnie sprężystym tych piłeczek.

**4.16** Walec o wysokości  $h$ , promieniu podstawy  $r$  i gęstości  $\rho_1$  pływa w naczyniu wypełnionym cieczą o gęstości  $\rho_2 > \rho_1$ . Oś walca jest prostopadła do podstawy naczynia. Obliczyć minimalną pracę, jaką należy wykonać aby całkowicie zanurzyć walec w cieczy?

**4.17** Z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  i wysokości  $H$  stacza się bez poślizgu jednorodna a) kula kauczukowa; b) moneta; c) pierścień. Wiedząc, że wszystkie obiekty mają ten sam promień  $r$  oraz taką samą masę  $m$ , wyznacz prędkości liniowe środków mas tych ciał u podstawy równi.

**4.18** Na osi obrotu obracającej się tarczy o masie  $m$  i promieniu  $R$  stoi człowiek o masie  $m_c$ . Wiedząc, że w takim przypadku punkty znajdujące się w odległości  $R/3$  od osi obrotu poruszają się z prędkością liniową  $v$ , wyznacz prędkość liniową człowieka, w momencie kiedy przejdzie on na skraj tarczy wzdłuż promienia.

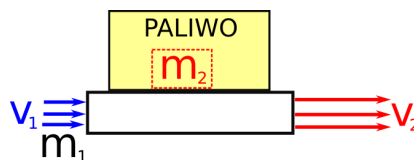
**4.19** Jednorodny drąg drewniany, którego wysokość nad ziemią wynosi  $L$  został podgryziony w najniższym punkcie przez bobra w taki sposób, że może on się obracać wokół najniższego punktu podgryzienia. W pewnej chwili drąg zaczyna przewracać się swobodnie. Jaka będzie prędkość liniowa końca drąga w momencie uderzenia drąga o ziemię? Na jakiej wysokości względem Ziemi energia potencjalna jest równa energii kinetycznej poruszającego się drąga? Ubytek drąga, związany z podgryzieniem można zaniedbać.

**4.20** Jednorodny ołówek o masie  $m$  i długości  $L$  jest zamocowany jednym z końców do sufitu tak że może się obracać swobodnie. W pewnej chwili prostopadle do ołówka, w odległości  $L$  od osi obrotu leci pszczoła gigant o masie  $m$  z szybkością  $v$ , po czym zderza się z listwą jednocześnie przyklejając się do niej. O jaki kąt od pionu odchyli się listwa z przyklejona pszczołą gigant?

**4.21** Jednorodny krążek o masie  $m$  i promieniu  $R$  może obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek masy. W odległości  $R/3$  od osi obrotu stoi człowiek o masie  $m_c$ . W pewnej chwili człowiek rozpoczyna spacer z szybkością  $v$  po obwodzie koła o promieniu  $R/3$ . Jaka będzie prędkość liniowa punktów na obwodzie krążka? Jaką pracę wykonał człowiek?

### 4.3 Rozwiązania

**4.1** Wyobraźmy sobie model silnika odrzutowego jak na rysunku 29. W tym przypadku do wyliczenia siły ciągu silnika skorzystamy z uogólnionej II zasady dynamiki dla punktu materialnego 231



Rysunek 29: Rysunek pomocniczy do zadania 4.1 .

Na siłę ciągu silnika w tej sytuacji będzie się składała zmiana pędu przelatującego przez

silnik powietrza jak i zmiana pędu związana ze spalaniem paliwa w silniku. Rozpatrując uogólnioną II zasadę dynamik 231 na przyrostach możemy zapisać, że

$$F = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \vec{v} \frac{\Delta m}{\Delta t} + m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

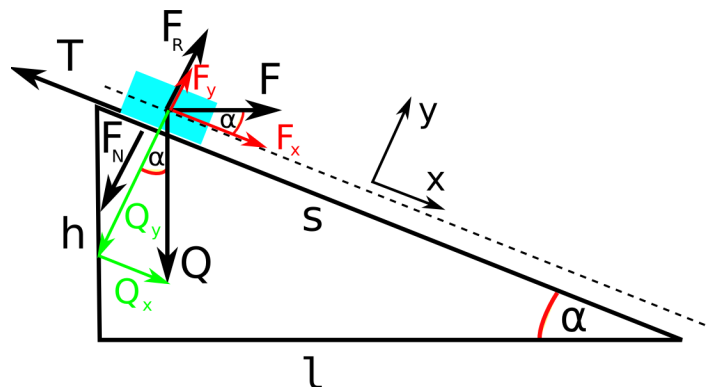
co ostatecznie prowadzi do rozwiązania problemu siły ciągu silnika w postaci

$$F = \frac{m_1}{\Delta t}(v_2 - v_1) + \frac{m_2}{\Delta t}v_2.$$

#### 4.2

$$\text{a) } W = \frac{F^2(\Delta t)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad \text{b) } W = \frac{F^2(\Delta t)^2(m_1 + m_2 + m_3)}{2(m_1 + m_2)m_3}.$$

4.3 Na wstępie należy ustalić wszystkie siły działające na ciało o masie  $m$ . Oprócz przyłożonej zewnętrznej siły  $F$ , ciało posiada swój ciężar  $Q$ , w wyniku kontaktu z równią na klocek działa siła reakcji  $F_R$  równi na klocek (zgodnie z 146, poprzez którą klocek działa siłą nacisku  $F_N$  na równię) oraz wynikająca z oporów ruchu siła tarcia ślizgowego  $T$  (rys. 30). Dla wygody rozważań można wprowadzić kąt nachylenia równi  $\alpha$ , który można wyznaczyć



Rysunek 30: Rysunek pomocniczy do zadania 4.3 .

z zależności trygonometrycznej postaci

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{l}. \quad (249)$$

Kolejnym krokiem jest rozłożenie sił na składowe równoległe do przemieszczenia oraz składowe prostopadłe do przemieszczenia. Po tym zabiegu możemy zapisać II zasadę dynamiki dla poszczególnych składowych tego układu w postaci

$$ma_x = F \cos \alpha + mg \sin \alpha - T \quad (250)$$

$$ma_y = F \sin \alpha + F_R - mg \cos \alpha. \quad (251)$$

Z treści zadania wynika, że wzdłuż równi ciało porusza się ruchem jednostajnym więc  $a_x = 0$ . W kierunku prostopadłym do ruchu nie obserwujemy ruchu więc możemy przyjąć, że  $a_y = 0$ .

W tej sytuacji równanie 250 i 251 możemy przedstawić w postaci

$$0 = F \cos \alpha + mg \sin \alpha - T \quad (252)$$

$$F_R = mg \cos \alpha - F \sin \alpha. \quad (253)$$

Z dynamiki punktu materialnego wiemy, że tarcie ślizgowe  $T$  co do wartości jest  $T = f \cdot F_N$ . Wiemy również, że  $F_N$  co do wartości jest równe  $F_R$ , więc z po złożeniu równania 252 z 253 otrzymamy

$$F \cos \alpha + mg \sin \alpha - f(mg \cos \alpha - F \sin \alpha) = 0, \quad (254)$$

co po przekształceniach prowadzi do wyznaczenia wartości przyłożonej siły  $F$  w postaci

$$F = \frac{f \cos \alpha - \sin \alpha}{f \sin \alpha + \cos \alpha} mg = \frac{f - \operatorname{tg} \alpha}{f \operatorname{tg} \alpha + 1} mg. \quad (255)$$

Siła  $F$  jest stała na całym odcinku przemieszczenia, więc możemy skorzystać z definicji pracy stałej siły. Zgodnie z 237 otrzymujemy

$$W = \vec{F} \circ \vec{r} = F s \cos \alpha = F \frac{l}{\cos \alpha} \cos \alpha = Fl. \quad (256)$$

Podstawiając 249 i 255 do 256 otrzymamy pracę siły  $F$  w wyniku przemieszczenia ciała wzdłuż całej długości równi w postaci

$$W = \frac{fl - h}{fh + l} mgl.$$

4.4

$$v_2 = \frac{s + 25a}{s - 25a} v_0.$$

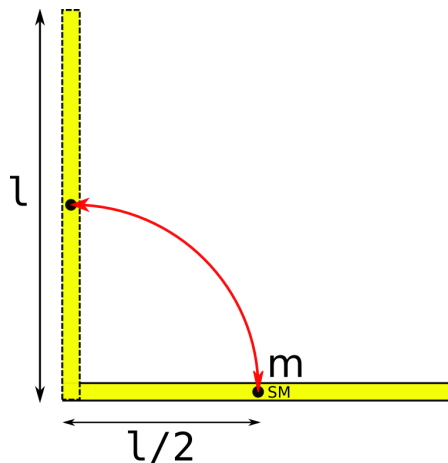
4.5

$$P = \frac{mv_k^3}{4l}.$$

4.6 a) Ołówek w tym przypadku możemy rozpatrywać jako punkt materialny, którego cała masa jest skupiona w połowie długości ołówka zgodnie z definicją położenia środka masy 233 lub 234. Wiedząc, że ruch odbywa się wyłącznie w polu grawitacyjnym oraz interesuje nas tylko położenia ołówka w momencie kiedy leży i w momencie kiedy już stoi, to najprościej wykonaną pracę jest wyznaczyć ze zmiany energii potencjalnej środka masy. Przyjmując, że energia potencjalnej ołówka w sytuacji gdy leżał była równa zero, otrzymujemy wartość wykonanej pracy w postaci

$$W = \Delta E_{psm} = \frac{mgl}{2}.$$

b) Innym sposobem jest wykorzystanie definicji pracy w postaci 238. Wykonana praca powinna być równa sumie prac na podniesienie poszczególnych małych składowych mas  $m'$  ( $m'$  powinno być tak małe, aby można było rozpatrywać tę część ołówka jak masę punktową),

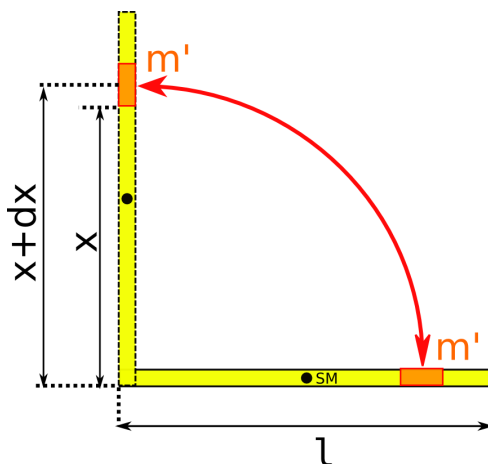


Rysunek 31: Rysunek pomocniczy nr 1 do zadania 4.6 .

na wysokość  $x + dx$  - rysunek 32. W tym celu dzielimy ołówek na odcinki, których masa wynosi

$$m' = \frac{x}{l}m. \quad (257)$$

Wówczas, aby podnieść masę  $m'$  musimy zadziałać siłą co najmniej równą  $m'g$  - siła ta



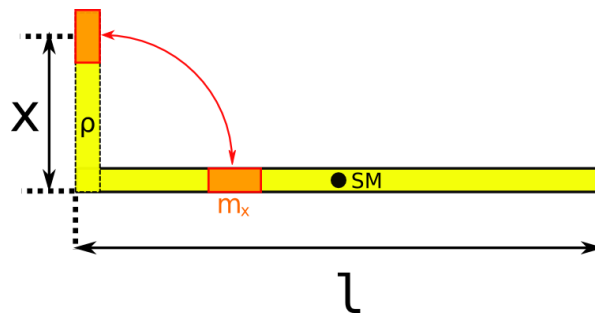
Rysunek 32: Rysunek pomocniczy nr 2 do zadania 4.6 .

zwiększa swą wartość wraz z wysokością. Zgodnie z definicją pracy 238 możemy zapisać, że wykonana praca wynosi

$$W = \int_0^l m'g dx = \int_0^l \frac{x}{l} mg dx = \frac{mg}{l} \int_0^l x dx = \frac{mg}{l} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^l = \frac{1}{2} mgl. \quad (258)$$

c) Jeżeli do tej pory nie przerabialiśmy rachunku całkowego, to do tego przykładu wystarczy nam zrozumienie interpretacja geometryczna całkowej definicji pracy. W tym celu możemy ołówek rozłożyć na masy składowe  $m_x$  (rys. 33), których wartość wynosi

$$m_x = \rho x, \quad (259)$$



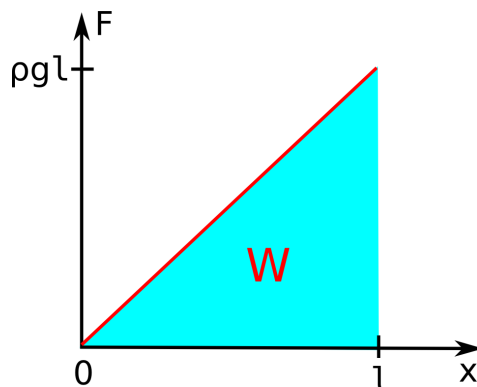
Rysunek 33: Rysunek pomocniczy nr 3 do zadania 4.6 .

gdzie  $\rho$  jest gęstością ołówka. Skoro ołówek jest jednorodny, gęstość  $\rho$  można wyznaczyć na podstawie zależności

$$\rho = \frac{m}{l}. \quad (260)$$

Aby podnieść fragment masy  $m_x$  na wysokość  $x$ , gdzie  $x \in \langle 0; l \rangle$  należy użyć siły  $F = \rho g x$ . Po Wykreśleniu zależności siły  $F$  od wysokość  $x$  w polu grawitacyjnym możemy obliczyć pole pod wykresem tej siły (rys. 34). Pole te zinterpretujemy jako wartość wykonanej pracy na podniesienie ołówka, poprzez co, nie musimy się wgłębiać w zasady rachunku całkowego.

$$W = \frac{1}{2} \rho g l^2 = \frac{1}{2} m g l.$$



Rysunek 34: Rysunek pomocniczy nr 4 do zadania 4.6 .

4.7

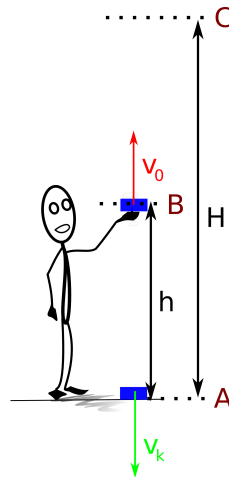
$$E_{pB} = E_{pA} + W$$

4.8

$$W = \frac{g m R_z}{2}.$$

4.9 Student wyrzucający monetę został przedstawiony na rysunku 35. Z treści zadania wynika, iż moneta porusza się tylko w polu grawitacyjnym, bez żadnych oporów więc do wyznaczenia maksymalnej wysokości  $H$  i prędkość końcowej  $v_k$ , z jaką upadnie moneta na chodnik,





Rysunek 35: Rysunek pomocniczy do zadania 4.9 .

skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej 247. Przyjmując na poziomie  $A$  energię potencjalną monety równą zero, możemy zapisać zasadę zachowania energii pomiędzy punktami  $B$  i  $C$  w postaci

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgH + 0, \quad (261)$$

oraz zasadę zachowania energii pomiędzy punktami  $A$  i  $C$  postaci

$$0 + \frac{1}{2}mv_k^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (262)$$

Rozwiązując równanie 261 względem  $H$  otrzymamy

$$H = h + \sqrt{\frac{v_0^2}{2g}}, \quad (263)$$

natomiast z równania 262 wyznaczmy szybkość  $v_k$  upadku monety o chodnik

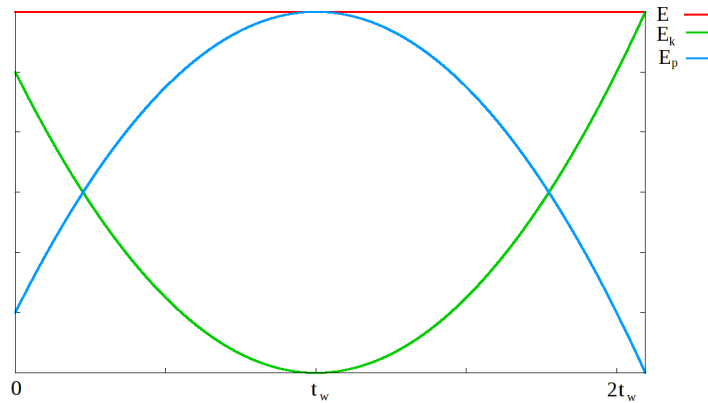
$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (264)$$

Wybór poziomu energii potencjalnej równej zero monety został nie przypadkowo wybrany w najniższym punkcie, w jakim mogła się znaleźć w czasie trwania ruchu. Pozwala to bez problemu śledzić zmianę energii kinetycznej  $E_k$  i potencjalnej  $E_p$  w czasie trwania ruchu - rysunek 36, zabezpieczając nam zawsze dodatnią wartość energii kinetycznej ciała w czasie ruchu.

#### 4.10

$$\text{a) } h_1 = H - \frac{v_0^2}{g}, \quad \text{b) } h = H - \frac{3v_0^2}{2g}.$$

4.11 Zadanie to porusza problem ruchu w "diabelskiej pętli". Aby ciało mogło bezpiecznie poruszać się po okręgu, nie odrywając się w najwyższym punkcie pętli ciężar ciała  $Q$  musi być zrównoważony przez siłę bezwładności  $F_b$ . - rysunek 37. Siła ta jest skutkiem przyspieszenia

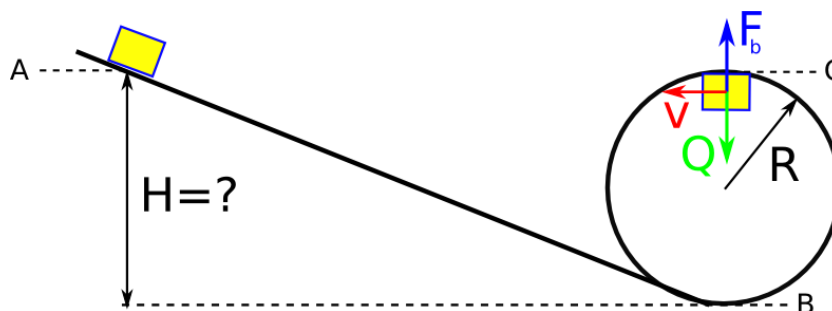


Rysunek 36: Rysunek pomocniczy do zadania 4.9 .

dośrodkowego ruchu ciała po okręgu w pętli i jest to tzw. siła odśrodkowa. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki punktu materialnego, aby ciało mogło zatoczyć pełen okrąg, w punkcie  $C$  siła wypadkowa powinna być równa zero, czyli

$$m \frac{v^2}{R} = mg. \quad (265)$$

Ponadto ruch ciała odbywa się w polu grawitacyjnym bez oporów ruchu, więc dla punktów



Rysunek 37: Rysunek pomocniczy do zadania 4.11 .

$A$  i  $C$  powinna być spełniona zasada zachowania energii. Przyjmując na poziomie punktu  $B$  energię potencjalną ciała równą zero możemy zapisać

$$0 + mgH = \frac{mv^2}{2} + mg2R. \quad (266)$$

Z równania 265 wynika, że szybkość  $v$  w najwyższym punkcie pętli powinna być co najmniej równa

$$v = \sqrt{Rg}. \quad (267)$$

Podstawiając 267 do 266 i rozwiązując 266 względem  $H$  otrzymamy

$$H = \frac{5}{2}R.$$

Jest to minimalna wysokość z jakiej należy puścić swobodnie ciało aby pokonało "diabelską pętlę".

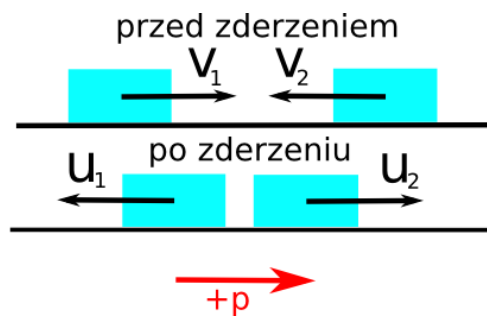
4.12

$$v_{II} = \sqrt{2gR_z}.$$

4.13

$$v_3 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad \Delta E_k = -2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 v_2.$$

4.14 Sytuację z treści zadania przedstawiono na rysunku 38. Niech przed zderzeniem ciało o masie  $m_1$  porusza się w prawo z szybkością  $v_1$ , a ciało o masie  $m_2$  z szybkością  $v_2$  w lewo. Po zderzeniu zwroty prędkości i wartości prędkości tych ciał ulegają zmianie. Przyjmując



Rysunek 38: Rysunek pomocniczy do zadania 4.13 .

konwencji znaków, że wszystkie pędy ciał w prawą stronę będą interpretowane jako dodatnie ( pędy zwrócone w lewą stronę będą miały wartości ujemne), możemy zapisać skalarną postać zasady zachowania pędu oraz zasadę zachowania energii układu ciał w postaci

$$\begin{cases} ZZP : & m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ ZZE : & \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \end{cases} \quad (268)$$

Układ równań 268 możemy w prosty sposób przekształcić do postaci

$$\begin{cases} ZZP : & \frac{m_1}{m_2} (v_1 + u_1) - v_2 = u_2 \\ ZZE : & \frac{m_1}{m_2} (v_1^2 - u_1^2) + v_2^2 = u_2^2. \end{cases} \quad (269)$$

Podnosząc równanie zasady zachowania pędu z 269 do potęgi drugiej, otrzymamy

$$\left[ \frac{m_1}{m_2} (v_1 + u_1) - v_2 \right]^2 = u_2^2. \quad (270)$$

Z zasady zachowania energii we wzorze 269 wiemy, że

$$\frac{m_1}{m_2} (v_1^2 - u_1^2) + v_2^2 = u_2^2, \quad (271)$$

więc lewa strona równania 270 powinna się równać lewej stronie równania 271. Poprzez to eliminujemy niewiadomą  $u_2$  i pozostaje nam równanie z jedną niewiadomą postaci

$$\frac{m_1}{m_2}(v_1^2 - u_1^2) + v_2^2 = \left[ \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1) - v_2 \right]^2. \quad (272)$$

Po wymnożeniu równania 272 mamy

$$\frac{m_1}{m_2}(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) + v_2^2 = \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 (v_1 + u_1)^2 - 2 \frac{m_1}{m_2} (v_1 + u_1) v_2 + v_2^2. \quad (273)$$

Redukując równanie 273 do prostszej postaci, dzieląc przez  $m_1/m_2$ , otrzymujemy

$$(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = \frac{m_1}{m_2} (v_1 + u_1)^2 - 2(v_1 + u_1)v_2. \quad (274)$$

Równanie 274 możemy podzielić przez  $(v_1 + u_1)$ . Taka operacja ciągnie jednak za sobą zgubienie jednego rozwiązania matematycznego równania 274, dlatego od razu sprawdzimy czy nie tracimy tym sposobem rozwiązania fizycznego. Dzielnik powinien spełniać relację

$$v_1 + u_1 = 0, \quad (275)$$

a więc

$$v_1 = -u_1. \quad (276)$$

Rozwiązanie 276 nie spełnia początkowych warunków zadania, gdyż po zderzeniu tych ciał, prędkość ciała o masie  $m_1$  zmienia swój zwrot co jest sprzeczne z rozwiązaniem równania 275. Dzielimy więc bez żadnych konsekwencji równanie 274 przez  $(v_1 + u_1)$  i otrzymujemy prostszą postać równania 274

$$v_1 - u_1 = \frac{m_1}{m_2} (v_1 + u_1) - 2v_2. \quad (277)$$

Po dalszych przekształceniach otrzymujemy zależność na szybkość  $u_1$  ciała o masie  $m_1$  po zderzeniu idealnie, centralnie sprężystym postaci

$$u_1 = \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)v_1 + 2v_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

Należy pamiętać, że jeżeli po podstawieniu wartości liczbowych  $u_1$  będzie miało wartość dodatnią, to ciało o masie  $m_1$  po zderzeniu będzie poruszało się w lewo. W przeciwnym wypadku, zwrot wektora prędkości nie zmieni się i ciało  $m_1$  będzie nadal po zderzeniu poruszać się w prawo.

Korzystając z faktu, iż przekształceniu układu równań 268 można zauważyć symetrię przekształceń, od razu wystawimy zależność na szybkość ciała o masie  $m_2$  po zderzeniu z ciałem  $m_1$  w postaci

$$u_2 = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2 + 2v_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Poprawność powyższego wzoru pozostawiam czytelnikowi do samodzielnego sprawdzenia.

4.15

$$H = \frac{25}{64}L.$$

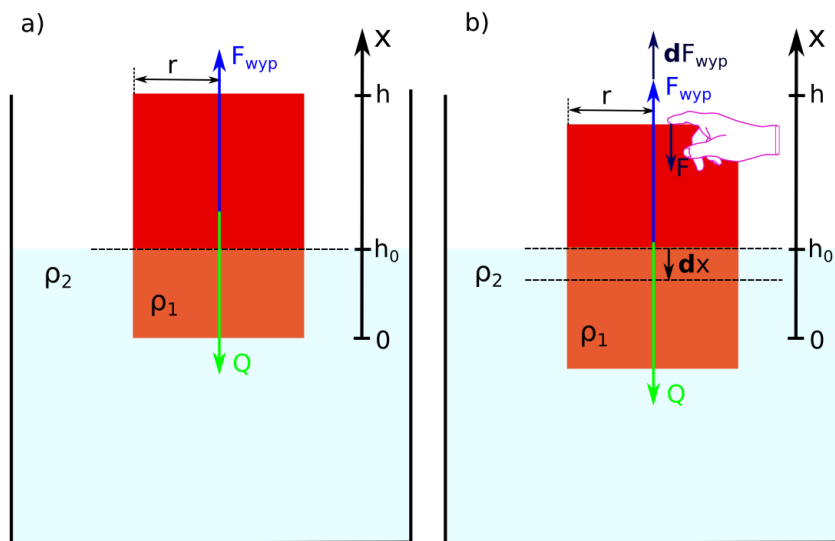
4.16 Układ przedstawiający treść zadania został przedstawiony na rysunku 39. Wykonaną pracę wyliczymy z definicji 238. W chwili początkowej (a), występuje równowaga siły ciężkości  $Q$  walca i siły wyporu cieczy  $F_{wyp}$ . Poprzez to można wyznaczyć początkowe zanurzenie walca z równości

$$\rho_1 \pi r^2 h g = \rho_2 g \pi r^2 h_0,$$

gdzie  $g$  jest wartością przyspieszenia grawitacyjnego. Z powyższego równania otrzymujemy, że początkowo walec był zanurzony o

$$h_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2} h.$$

Siła  $F$  będzie się zmieniała liniowo w trakcie zanurzania i będzie co do wartości odpowiadała powstającej wskutek tego dodatkowej siły wyporu  $dF_{wyp}$ . Pracę wykonaną na zanurzenie



Rysunek 39: Rysunek obrazujący treść zadania a) w stanie równowagi, b) po wychyleniu ze stanu równowagi.

klocka od  $h_0$  do  $h$  zgodnie z kierunkiem osi  $x$ , wyliczymy z zależności

$$W = \int_{h_0}^h (-F) \cdot (-dx) = \int_{h_0}^h F \cdot dx.$$

Aby praca była minimalna, siła  $F$  musi przyjmować wartości przyrostu siły wyporu podczas zanurzania ciała o  $x$  względem położenia początkowego, czyli

$$F = \rho_2 g \pi r^2 x.$$

Ostatecznie otrzymujemy do rozwiązania wyrażenie całkowe

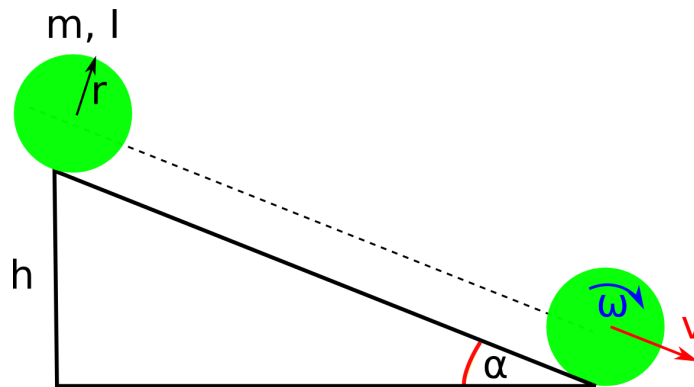
$$W = \int_{h_0}^h \rho_2 g \pi r^2 x dx = \rho_2 g \pi r^2 \int_{h_0}^h x dx = \rho_2 g \pi r^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{h_0}^h = \frac{1}{2} \rho_2 g \pi r^2 (h^2 - h_0^2)$$

Po podstawieniu do powyższego równania wartości  $h_0$  otrzymamy ostateczny wynik

$$W = \frac{1}{2} g \pi r^2 h^2 \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2}.$$

Rozwiązanie całki można także dla powyższej sytuacji zrealizować metodą graficzną, wykreślając wykres zależności  $F(x)$ . Wówczas wyliczenie pracy sprowadza się do wyliczenia pola trapezu, co pozostawia się czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania.

**4.17** Rozważmy ogólny przypadek, kiedy na równi o wysokości  $H$  i kącie nachylenia  $\alpha$  położymy ciało symetrii obrotowej o masie  $m$  i momencie bezwładności  $I$ , które może staczać się bez poślizgu - rysunek 40. Ruch obrotowy bryły wokół środka masy jest możliwy dzięki sile



Rysunek 40: Rysunek pomocniczy do zadania 4.16 .

tarcia tocznego. W przeciwieństwie do siły tarcia ślizgowego, siła tarcia tocznego powodująca ruch obrotowy jest siłą zachowawczą - praca siły tarcia tocznego jest zamieniana na energię kinetyczną ruchu obrotowego. W tej sytuacji możemy stosować zasadę zachowania energii postaci 247. Przyjmijmy, że u podstawy równi energia potencjalna staczającego się ciała jest równa zero. Dzięki temu wiemy, że na szczycie równi ciało posiada tylko energię potencjalną, a u podstawy równi energię kinetyczną ruchu postępowego środka masy oraz energię kinetyczną ruchu obrotowego punktów bryły sztywnej wokół osi obrotu, która w tym przypadku przechodzi przez środek masy. Zasadę zachowania energii możemy zapisać w postaci

$$mgH + 0 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (278)$$

Wiemy, że ruch bryły odbywa się bez poślizgu, więc pomiędzy prędkością środka masy a prędkością kątową staczającej się bryły istnieje zależność

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (279)$$

którą dla ruchu po okręgu możemy zapisać w postaci

$$v = \omega r. \quad (280)$$

Podstawiając 280 do 278 otrzymamy

$$mgH = \frac{1}{2}mv_2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{2}(m + I). \quad (281)$$

Rozwiązując równanie 281 względem  $v$  mamy

$$v = \sqrt{\frac{gH}{1 + \frac{I}{mr^2}}}. \quad (282)$$

Podstawiając do równania 282 odpowiednie momenty bezwładności jednorodnych brył uzyskamy

a) kula kauczukowa

$$I = \frac{2}{5}mr^2, \quad v_k = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

b) moneta

$$I = \frac{1}{2}mr^2, \quad v_m = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

c) pierścień

$$I = mr^2, \quad v_p = \sqrt{gH}$$

**4.18**

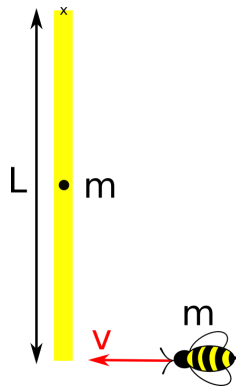
$$v' = \frac{3m}{2m_c + m}v.$$

**4.19**

$$v = \sqrt{3gL}, \quad H = \frac{L}{4}.$$

**4.20** Warunki początkowe zadania są przedstawione na rysunku 41. Pszczoła, która leci z prędkością  $v$  może być traktowana jako punkt materialny o masie  $m$ . Listwę, jako ciągły rozkład masy musimy rozpatrywać jako bryłę sztywną, która może wykonywać ruch obrotowy wokół jednego z końców. Jest to jednorodna listwa więc środek masy listwy znajduje się w połowie jej długości. Zderzenie tych obiektów nie jest zderzeniem dwóch punktów materialnych, więc nie możemy zastosować tu zasady zachowania pędu. Możemy jednak stwierdzić, że w układzie pszczoła-listwa nie działają żadne zewnętrzne momenty sił, więc w układzie musi być spełniona zasada zachowania momentu pędu 235. Poprzez to spełniona musi być zależność

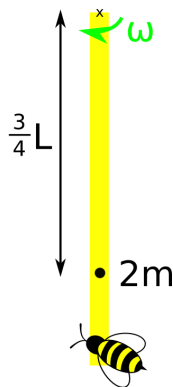
$$mvL = (I_l + I_p)\omega, \quad (283)$$



Rysunek 41: Rysunek pomocniczy nr 1 do zadania 4.19 .

w której  $I_l$  jest momentem bezwładności listwy dla osi obrotu przechodzącej przez koniec listwy i wynosi  $I_l = \frac{1}{3}mL^2$ , odpowiednio  $I_p$  jest momentem bezwładności pszczoły, który dla danej osi obrotu wynosi  $I_p = mr^2$ , a  $\omega$  jest prędkością obrotową układu pszczoła-listwa tuż po zderzeniu.

Porządkując równanie 283 otrzymamy, że prędkość obrotowa układu wynosi



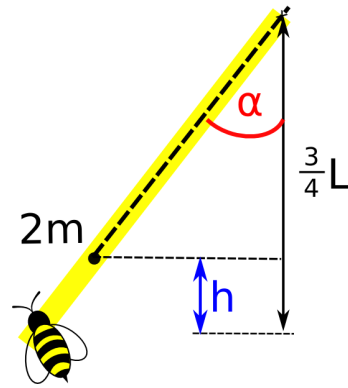
Rysunek 42: Rysunek pomocniczy nr 2 do zadania 4.19 .

$$\omega = \frac{3v}{4L}. \quad (284)$$

Na rysunku 42 zauważyć można, że po zderzeniu pszczoła i listwa tworzą jeden obiekt, którego środek masy  $2m$  znajduje się w odległości  $3L/4$  od osi obrotu oraz ruch tego układu odbywa się wyłącznie w polu grawitacyjnym. Wobec tego energia kinetyczna całego układu po zderzeniu zamieniać się będzie na energię potencjalną grawitacji środka masy - (rys.43). Przy największym wychyleniu listwy z pszczołą, energia całkowita układu będzie tylko w postaci energii potencjalnej środka masy układu. Przyjmując zerowy poziom energii potencjalnej układu, na poziomie środka masy układu tuż po zderzeniu, możemy zapisać zasadę zachowania energii w postaci

$$\frac{1}{2}(I_l + I_p)\omega^2 + 0 = 0 + mgh. \quad (285)$$





Rysunek 43: Rysunek pomocniczy nr 3 do zadania 4.19 .

Podstawiając do równania 284 wyznaczone wcześniej wartości  $\omega$ ,  $I_l$  i  $I_p$  oraz rozwiązując równanie 285 względem  $h$  otrzymamy

$$h = \frac{3}{16} \frac{v^2}{g}, \quad (286)$$

gdzie  $h$  jest wysokością na jaką podniesie się środek układu. Rzutując środek masy w największym wychyleniu na początkowe położenie listwy z pszczoły tuż po zderzeniu (rys. 43) jesteśmy w stanie wyprowadzić następującą zależność trygonometryczną

$$\cos \alpha = \frac{\frac{3}{4}L - h}{\frac{3}{4}L}. \quad (287)$$

Łącząc równanie 287 z 286 otrzymamy szukaną zależność na maksymalny kat wychylenia listwy z pszczołą w postaci

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{v^2}{4gL}\right).$$

#### 4.21

$$v' = \frac{2m_c}{3m}v.$$

## 5 Termodynamika. Kinetyczna teoria gazów.

### 5.1 Wstęp teoretyczny

*Układem* nazywamy wyodrębnioną część otaczającego nas świata, którą poddajemy badaniom. Układ oddzielony jest osłoną od reszty ciał, zwanych *otoczeniem*. Osłona może przewodzić ciepło i przepuszczać materię. Poprzez osłonę badany układ może oddziaływać z otoczeniem.

Układ może wymieniać z otoczeniem materię i energię (układ otwarty), tylko energię (układ zamknięty) lub nie wymienia z otoczeniem ani energii, ani materii (układ izolowany). W układzie izolowanym energia, objętość i liczba cząstek pozostaje stała.

Parametr termodynamiczny układu to parametr fizyczny, którego zmiana jest istotna z punktu widzenia badanego zjawiska termodynamicznego. Jeżeli wartość parametru nie zależy od ilości substancji, to taki parametr nazywamy *intensywnym* np. temperatura  $T$  lub ciśnienie  $p$ . W przeciwnym razie parametr nazywamy *ekstensywnym* np. energia lub objętość układu.

Stan termodynamiczny układu określamy jednoznacznie poprzez podanie jego składu oraz dwóch dowolnych parametrów, będących funkcjami stanu.

*Funkcją stanu* nazywamy wielkość, która ma określoną wartość dla każdego stanu układu, niezależnie od tego na drodze jakiego procesu ten stan został osiągnięty tzn. przyrosty funkcji stanu zależą wyłącznie od stanu początkowego i końcowego danego układu. Do najważniejszych funkcji stanu należą: objętość  $V$ , ciśnienie  $p$  i temperatura  $T$ .

Ciepło i praca nie są funkcjami stanu. Ciepło i pracę należy traktować jako dwa różne sposoby wymiany energii między układem i otoczeniem.

Układ jest w stanie równowagi termodynamicznej, jeśli opisujące go parametry nie zależą od czasu i nie występują makroskopowe przepływy.

**Każdy układ izolowany osiąga stan równowagi termodynamicznej, niezależnie od jego stanu początkowego.**

*Procesem termodynamicznym* (przemianą termodynamiczną) nazywamy przejście pomiędzy dwoma stanami równowagi. Procesy termodynamiczne mogą zachodzić przy zachowaniu stałości jednego z parametrów, stąd możemy wyróżnić przemiany:

- Izobaryczne tzn. przebiegające pod stałym ciśnieniem ( $p = const.$ )
- Izochoryczne tzn. przebiegające w stałej objętości ( $V = const.$ )
- Izotermiczne tzn. zachodzące w stałej temperaturze ( $T = const.$ )

Przemiany termodynamiczne zachodzące bez wymiany ciepła z otoczeniem nazywamy *adiabatacznymi*.

W termodynamice rozważa się przemiany odwracalne i nieodwracalne. Przemiana odwracalna to taka przemiana, której przebieg można odwrócić wskutek nieskończenie małej zmiany bodźca termodynamicznego powodującego ten proces (np.  $dT$  przy przekazywaniu ciepła). Proces zachodzący w odwrotnym kierunku przebiega po tej samej drodze powodując przywrócenie wyjściowego stanu układu i otoczenia. Procesy nieodwracalne przebiegają samorzutnie w jednym kierunku, prowadząc do nieodwracalnych zmian układu i otoczenia.

**Gaz doskonały** Gaz doskonały jest to wyidealizowany, uproszczony model gazu rzeczywistego. Gaz doskonały posiada stałe ciepło właściwe (niezależne od temperatury i ciśnienia), nie zmienia stanu skupienia (nie ulega skropleniu) i można go traktować jako zbiór cząstek stanowiących punkty materialne. Ścisłe podporządkowuje się prawom gazowym. Jako gazy doskonałe możemy traktować:

- a) gazy szlachetne jednoatomowe takie jak: hel, argon, neon, krypton,
- b) gazy dwuatomowe np. tlen, wodór, azot, tlenek węgla i ich mieszaniny, dla ciśnień i temperatur nieznacznie odbiegających od otoczenia.

Pozostałe gazy należy traktować jako gazy rzeczywiste.

### Równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona)

Iloczyn ciśnienia bezwzględnego i objętości jednego mola gazu podzielonego przez temperaturę bezwzględną jest równy stałej gazowej  $R$ .

$$\frac{pV}{T} = R = const, \quad (288)$$

$R$  to uniwersalna stała gazowa równa  $8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ .

Jeden mol to liczba atomów w próbce węgla  $^{12}\text{C}$  o masie 12 g. O tym ile cząstek (atomów lub cząsteczek) znajduje się w jednym molu substancji mówi liczba Avogadra

$$N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (289)$$

Liczbę cząstek  $N$  w dowolnej próbce możemy policzyć jako iloczyn liczby moli  $n$  i liczby Avogadra  $N_A$

$$N = n N_A \quad (290)$$

Z kolei liczbę moli  $n$  można wyznaczyć znając masę próbki  $m$  oraz jej masę molową  $M$  [ $\text{g}/\text{mol}$ ]

$$n = \frac{m}{M} \quad (291)$$

Równanie stanu gazu doskonałego dla próbki gazu o  $n$  liczbie moli przyjmie postać

$$pV = nRT \quad (292)$$

Pomiędzy stałą gazową  $R$  oraz liczbą Avogadra  $N_A$  istnieje zależność:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}, \quad (293)$$

gdzie  $k$  to stała Boltzmanna.

Na mocy równań 290 oraz 293, równanie stanu gazu doskonałego można zapisać w postaci

$$pV = NkT \quad (294)$$

**Zerowa zasada termodynamiki** Jeśli układ 1 jest w równowadze cieplnej z układem 2, oraz układ 2 jest w równowadze cieplnej z układem 3, to układ 1 jest również w stanie równowagi cieplnej z układem 3.

**Pierwsza zasada termodynamiki** Dla dowolnego procesu termodynamicznego, w którym jest jednocześnie przekazywane ciepło i wykonywana praca, zmianę energii wewnętrznej układu można określić zależnością

$$dU = dQ + dW \quad (295)$$

gdzie  $dU$  oznacza przyrost energii wewnętrznej układu i jest różniczką zupełną natomiast  $dQ$  oraz  $dW$  oznaczają odpowiednio przyrost ciepła i przyrost pracy, które nie są różniczkami zupełnymi (zależą od rodzaju procesu).

*Energia wewnętrzna* jest to całkowita energia układu i wiąże się z energią ruchu termicznego cząstek oraz z energią potencjalną oddziaływań międzycząsteczkowych.

Energia wewnętrzna jest funkcją stanu, zatem przyrosty energii wewnętrznej  $\Delta U$  w procesach rzeczywistych zależą tylko od stanu początkowego ( $U_1$ ) i końcowego ( $U_2$ ), stąd

$$\Delta U = U_2 - U_1. \quad (296)$$

### Praca

W procesach termodynamicznych praca wiąże się ze zmianą objętości

$$dW = -p(V)dV, \quad (297)$$

stąd

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \quad (298)$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie, a  $dV$  zmianę objętości.

Umowa: gdy praca jest wykonana nad układem  $W > 0$ , a gdy układ wykonuje pracę  $W < 0$ .

### Ciepło

Przyrost ciepła przy ustalonym parametrze  $x$  (przy stałej objętości  $V$  lub przy stałym ciśnieniu) i przy zmianie temperatury o  $dT$  można wyrazić wzorem

$$dQ_x = c_x m dT \quad (299)$$

gdzie  $c_x$  oznacza ciepło właściwe przy określonym parametrze, a  $m$  - masę ciała.

*Ciepło właściwe* (pojemność cieplna) substancji jest równe ilości ciepła, jaką należy dostarczyć do jednostki masy substancji, aby zwiększyć jej temperaturę o jeden stopień, co można zapisać równaniem

$$c(T, p) = \frac{1}{m} \left( \frac{dQ}{dT} \right) \quad (300)$$

W przemianie izochorycznej

$$c_V(T, p) = \frac{1}{m} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V \quad (301)$$

W przemianie izobarycznej

$$c_p(T, p) = \frac{1}{m} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p \quad (302)$$

Jednostką ciepła właściwego jest  $J/(kg \cdot K)$ .

Różnica między wartością ciepła właściwego przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu występuje głównie dla gazów. Dla ciał stałych i z gorszym przybliżeniem dla cieczy, różnica ta nie ma dużego znaczenia i można wówczas posługiwać się jednym ciepłem właściwym  $c$ .

Wartość ciepła właściwego zależy od temperatury tzn.  $c = c(T)$ . Jeśli ciepło właściwe jest praktycznie stałe w pewnym zakresie temperatur wówczas wzór 299 ma postać

$$Q = m c_x (T_2 - T_1) \quad (303)$$

W wielu przypadkach zamiast ciepła właściwego  $c$  w odniesieniu do jednostki masy ciała, posługujemy się tzw. molowym ciepłem właściwym  $C$ , odniesionym do jednego mola substancji.

Ciepło molowe przy stałym parametrze  $x$  ( $V$  lub  $p$ ) wynosi

$$C_x = M c_x, \quad (304)$$

gdzie  $M$  - masa molowa [g/mol]. Jednostką molowego ciepła właściwego jest  $J/(mol \cdot K)$

### Molowe ciepło właściwe przy stałej objętości

Na podstawie 301 i 304 molowe ciepło właściwe przy stałej objętości (dla jednego mola) można wyrazić

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V. \quad (305)$$

W przemianie izochorycznej  $dV=0$ , czyli  $W=0$ , zatem zgodnie z I zasadą termodynamiki  $dU = dQ$ , a stąd

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT}. \quad (306)$$

Po przekształceniu otrzymujemy zależność (dla jednego mola)

$$dU = C_V dT. \quad (307)$$

### Molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu

Na podstawie 302 i 304 molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu (dla jednego mola) można wyrazić równaniem

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p. \quad (308)$$

Zgodnie z I zasadą termodynamiki 295 oraz na podstawie równania 297 i 307

$$dQ = C_V dT + p dV. \quad (309)$$

Z równania stanu gazu doskonałego wynika, że dla jednego mola gazu przy stałym ciśnieniu spełniona jest zależność:

$$p dV = R dT,$$

zatem po podstawieniu jej do równania 309 otrzymujemy

$$dQ = C_V dT + R dT \quad (310)$$

Dzieląc równanie 310 stronami przez  $dT$ , otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dT} = C_V + R$$

a po uwzględnieniu równania 308 otrzymujemy, że

$$C_p - C_V = R. \quad (311)$$

Dla gazów doskonałych ciepła molowe nie zależą od temperatury i wynoszą

$$C_V = \frac{3}{2}R \text{ oraz } C_p = \frac{5}{2}R$$

. Dla gazów rzeczywistych jednoatomowych

$$C_V = \frac{3}{2}R \text{ oraz } C_p = \frac{5}{2}R$$

. Dla gazów rzeczywistych dwuatomowych

$$C_V = \frac{5}{2}R \text{ oraz } C_p = \frac{7}{2}R$$

### Równanie Poissona (równanie adiabaty)

$$p V^\kappa = \text{const.} \quad (312)$$

Współczynnikiem Poissona nazywamy stosunek

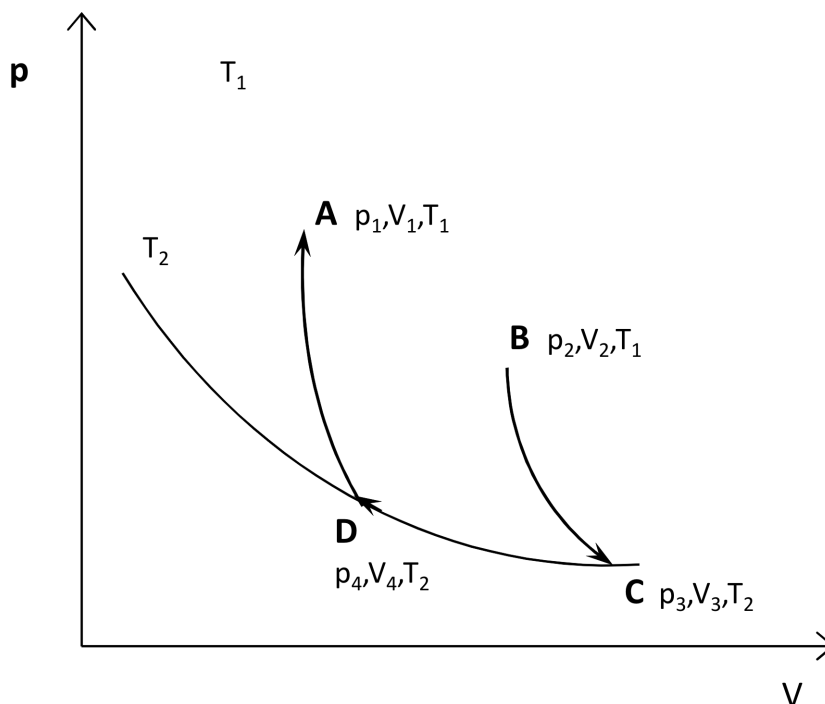
$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}. \quad (313)$$

Dla gazu doskonałego  $\kappa = 1,67$ .

Z powyższego równania i równania stanu gazu doskonałego 292 wynika, że w przemianie adiabatycznej zmieniają się wszystkie parametry stanu gazu:  $p$ ,  $V$  i  $T$ .

### Cykl Carnota

Cyklem nazywamy przemiany termodynamiczne przebiegające w układzie zamkniętym, w wyniku których stan początkowy i końcowy układu jest identyczny. N. Carnot zaproponował cykl składający się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch adiabatycznych, który od jego nazwiska określamy cyklem Carnota. Cykl Carnota pokazano na rysunku ??



- Na odcinku izotermi  $AB$  do rozprężającego się czynnika roboczego dostarczamy energię w postaci ciepła  $Q_1$ , a otrzymujemy pracę  $W_1$ .
- Na odcinku adiabaty  $BC$ , nie ma wymiany ciepła z otoczeniem, a energia wewnętrzna jest równa pracy wykonanej przy rozprężaniu gazu. Temperatura układu spada od  $T_1$  do  $T_2$ .

- Na odcinku izotermny  $CD$  sprężamy czynnik roboczy (gaz), czyli pracę wykonuje siła zewnętrzna zmniejszając objętość gazu, a gaz oddaje ciepło  $Q_2$ .
- Na odcinku  $DA$  siły zewnętrzne wykonują pracę sprężając gaz, a temperatura rośnie do  $T_1$ .

Wypadkowa ilość ciepła pobrana przez układ podczas jednego cyklu wynosi  $Q_1 - Q_2$ . Natomiast wypadkowa zmiana energii wewnętrznej wynosi zero bo stan końcowy pokrywa się ze początkowym, więc na podstawie pierwszej zasady termodynamiki otrzymujemy

$$W = Q_1 - Q_2 \quad (314)$$

Wynika stąd, że pewną ilość ciepła można zamienić na pracę. Cykl ten można powtarzać uzyskując potrzebną ilość pracy.

Urządzenie zamieniające ciepło na pracę nazywamy *silnikiem cieplnym*. Sprawnością termodynamiczną silnika nazywamy stosunek pracy wykonanej przez silnik do ciepła pobranego ze źródła

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (315)$$

Z równania 315 wynika, że nie możliwa jest zamiana całego pobranego ciepła na pracę, tzn. sprawność silnika cieplnego jest zawsze mniejsza niż 1.

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego i z pierwszej zasady termodynamiki można pokazać, że sprawność silnika Carnota (dla gazu doskonałego) wynosi

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (316)$$

## II zasada termodynamiki

Druga zasada termodynamiki mówi, że w układzie zamkniętym entropia  $S$  nie może maleć to znaczy  $dS \geq 0$ . Entropia  $S$  jest termodynamiczną funkcją stanu, zależy tylko od początkowego i końcowego stanu układu, a nie od drogi przejścia pomiędzy tymi stanami. Entropia jest funkcją określoną dla stanu równowagi, taką że dla procesu odwracalnego:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (317)$$

gdzie  $dQ$  jest ciepłem dostarczanym do układu.

Zmiana entropii substancji na skutek zmiany jej stanu skupienia (entropia przemiany fazowej) zachodzącej w warunkach ściśle izotermicznych wyraża się wzorem

$$\Delta S = \frac{m L}{T}, \quad (318)$$

gdzie  $L$  to ciepło przemiany fazowej (np.  $L_t$  - ciepło topnienia,  $L_p$  - ciepło parowania) wyrażone w  $J/kg$ .



## 5.2 Zadania z rozwiązaniami

**Zadanie 1** Wyprowadź wzory na ciepło, pracę oraz przyrost energii wewnętrznej gazu doskonałego dla przemiany:

- a) izobarycznej
- b) izotermicznej
- c) izochorycznej
- d) adiabatycznej.

a) przemiana izobaryczna,  $p = const.$

Dla stałego ciśnienia ciepło wyrażamy

$$dQ = c_p m dT,$$

co po scałkowaniu daje

$$Q = c_p m (T_2 - T_1).$$

Z równania Clapeyrona

$$p(V_2 - V_1) = n R(T_2 - T_1), \text{ stąd } (T_2 - T_1) = \frac{p}{nR}(V_2 - V_1).$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$Q = \frac{c_p m p}{n R}(V_2 - V_1).$$

Pracę w procesie izobarycznym liczymy następująco

$$\Delta W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = -p(V_2 - V_1).$$

Przyrost energii wewnętrznej zgodnie z I zasadą termodynamiki możemy zapisać:

$$\Delta U = Q + W,$$

$$\Delta U = \frac{c_p m p}{n R}(V_2 - V_1) - p(V_2 - V_1),$$

$$\Delta U = p(V_2 - V_1) \frac{m c_p - n R}{n R} = p(V_2 - V_1) \frac{m c_p}{n R - 1},$$

$$\Delta U = \frac{m c_v p}{R}(V_2 - V_1).$$

b) przemiana izotermiczna  $T = const.$

Ponieważ  $dT = 0 \Rightarrow dU = c_v m dT = 0$ , energia wewnętrzna nie ulega zmianie  $\Delta U = 0$ .  
Z I zasady termodynamiki

$$dQ + dW = 0, \text{ czyli } Q = -W.$$

Po podstawieniu za  $p = \frac{nRT}{V}$  i scałkowaniu, otrzymujemy:

$$Q = -W = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

c) przemiana izochoryczna  $V = const$ .

Ciepło w przemianie izochorycznej liczymy ze wzoru:

$$Q = c_v m (T_2 - T_1)$$

Ponieważ  $dV = 0 \Rightarrow dW = -pdV = 0$ , zatem wykonana praca  $W = 0$ . Z I zasady termodynamiki otrzymujemy, że  $\Delta U = Q$

d) przemiana adiabatyczna W przemianie adiabatycznej nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem ( $dQ = 0$ ), czyli

$$dW = -pdV$$

Po skorzystaniu z prawa Poissona

$$p V^\kappa = p_1 V_1^\kappa,$$

otrzymujemy:

$$dW = -p_1 V_1^\kappa V^{-\kappa} dV.$$

Po scałkowaniu:

$$W = -p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^{V_2} V^{-\kappa} dV = -p_1 V_1^\kappa \frac{V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}}{1-\kappa},$$

$$W = \frac{p_1 V_1^\kappa}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right] V_1^{1-\kappa},$$

$$W = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right].$$

Z równania Clapeyrona  $p_1 V_1 = n R T_1$ , zatem

$$W = \frac{n R T_1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right].$$

**Zadanie 2** Jednoatomowy gaz doskonały znajduje się w stałej temperaturze  $273\text{ K}$ , w zamkniętej rurze z ruchomym tłokiem. Początkowo tłok dzieli układ na dwa podukłady o równych objętościach. W każdym podukładzie jest  $1\text{ mol}$  gazu. Tłok przesuwa się w sposób odwracalny, tak że końcowe objętości wynoszą  $4$  i  $6$  litrów. Jaka praca została wykonana?

- W podukładzie A
- objętość początkowa:  $V_{1A} = 5\text{ dm}^3$
- objętość końcowa:  $V_{2A} = 4\text{ dm}^3$
- Praca wykonana:

$$W_A = -\Delta Q = -nRT \int_{V_{1A}}^{V_{2A}} \frac{dV}{V} = -n R T \ln \frac{V_{2A}}{V_{1A}}.$$

- W podukładzie B
- objętość początkowa:  $V_{1B} = 5\text{ dm}^3$
- objętość końcowa:  $V_{2B} = 6\text{ dm}^3$
- Praca wykonana:

$$W_B = -\Delta Q = -nRT \int_{V_{1B}}^{V_{2B}} \frac{dV}{V} = -n R T \ln \frac{V_{2B}}{V_{1B}}.$$

Praca wykonana w całym układzie:

$$W = W_A + W_B = -n R T \ln \frac{V_{2A}}{V_{1A}} - n R T \ln \frac{V_{2B}}{V_{1B}},$$

$$W = -n R T \left( \ln \frac{V_{2A}}{V_{1A}} + \ln \frac{V_{2B}}{V_{1B}} \right),$$

$$W = -n R T \ln \frac{V_{2A}V_{2B}}{V_{1A}V_{1B}} = 92,65\text{ J}.$$

**Zadanie 3** Do żelaznego kociołka o masie  $1,5\text{ kg}$  nalano  $5\text{ kg}$  wody o temperaturze  $15^\circ\text{C}$ . Ile ciepła należy doprowadzić do kociołka, żeby podgrzać w nim wodę do temperatury  $100^\circ\text{C}$ . Ciepło właściwe żelaza  $c_1 = 500\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , ciepło właściwe wody  $c_2 = 4190\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

Bilans cieplny: energia dostarczona do układu (w postaci ciepła  $Q$ ) jest zużytkowana na podgrzanie kociołka  $Q_1$  oraz na podgrzanie wody  $Q_2$ .

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_2 - T_1),$$

$$Q_2 = c_2 m_2 (T_2 - T_1), \text{ stąd}$$

$$Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2)(T_2 - T_1) = 1,84\text{ MJ}.$$

**Zadanie 4** Blok metalu o masie  $1\text{ kg}$  ogrzano do temperatury  $400\text{ K}$  i następnie wrzucono do  $0,3\text{ kg}$  wody. Temperatura wody wzrosła z  $294\text{ K}$  do  $300\text{ K}$ . Obliczyć stosunek ciepła właściwego wody i metalu zakładając, że nie zależy ono od temperatury.

- Temperatura początkowa metalu  $T_1 = 400\text{ K}$
- Temperatura początkowa wody  $T_2 = 294\text{ K}$
- Temperatura końcowa wody i metalu  $T_3 = 300\text{ K}$
- masa metalu  $m_m = 1\text{ kg}$
- masa wody  $m_w = 0,3\text{ kg}$

$$\frac{c_w}{c_m} = ?$$

$$Q_w = m_w c_w (T_3 - T_2),$$

$$Q_m = m_m c_m (T_3 - T_1).$$

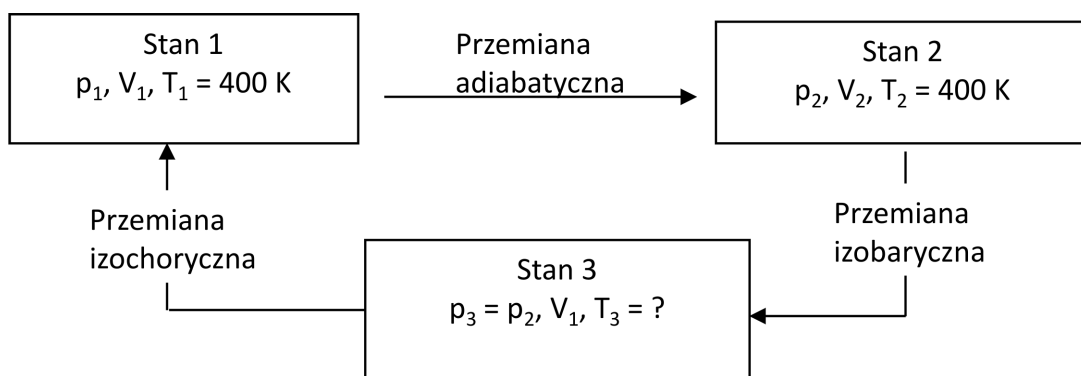
Zakładając, że nie następuje wymiana ciepła z otoczeniem ciepło oddane jest równe ciepłu pobranemu, stąd

$$|m_w c_w (T_3 - T_2)| = |m_m c_m (T_3 - T_1)|,$$

$$\frac{c_w}{c_m} = \left| \frac{m_m (T_3 - T_1)}{m_w (T_3 - T_2)} \right|,$$

$$\frac{c_w}{c_m} = 55,6.$$

**Zadanie 5** Pewna ilość argonu rozpręża się w przemianie adiabatycznej od temperatury  $T_1 = 400\text{ K}$  do temperatury  $T_2 = 300\text{ K}$ . Następnie ulega izobarycznej zmianie objętości, osiągając objętość początkową  $V_1$  i na koniec zostaje ogrzana w przemianie izochorycznej do temperatury początkowej  $T_1$ . Oblicz temperaturę końcową procesu izobarycznego, zakładając, że wszystkie przemiany były odwracalne.



Szukamy temperatury  $T_3$ . Dla przejścia ze stanu 1 do stanu 2 możemy napisać równanie adiabaty

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \text{ stąd } \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa.$$

Podstawiając za

$$V = \frac{n R T}{p}$$

, otrzymujemy

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\kappa \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\kappa,$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\kappa} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\kappa,$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}.$$

Korzystając z  $\frac{C_p}{C_V} = \kappa$  oraz  $C_p - C_V = R$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{-\frac{C_p}{R}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_p}{R}}.$$

Dla przejścia izochorycznego ze stanu 3 do stanu 4

$$V = \frac{n R T}{p} = \text{const},$$

$$\frac{n R T_3}{p_2} = \frac{n R T_1}{p_1}, \text{ stąd } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T_1}.$$

Porównując stronami

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_p}{R}}.$$

Wyznaczamy  $T_3$

$$T_3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_p}{R}} T_1.$$

$C_p$  dla gazu doskonałego jednoatomowego wynosi  $\frac{5}{2}R$ . Podstawiając pozostałe dane liczbowe:

$$T_3 = 400 \left(\frac{300}{400}\right)^{\frac{5}{2}} = 194,86 \text{ K}.$$

**Zadanie 6** Wyprowadź wzór na przyrost entropii gazu doskonałego podczas przemiany:

a) izotermicznej

b) izobarycznej

c) izochorycznej

a) Przemiana izotermiczna

Na podstawie równania 317 oraz wyrażeń z przykładu 1 b) możemy zapisać, że różniczka entropii jest równa

$$dS = \frac{dQ}{T} = nR \frac{dV}{V}.$$

Całkując otrzymujemy przyrost entropii

$$\Delta S = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

b) Przemiana izobaryczna

Korzystając ze wzorów wyprowadzonych w przykładzie 1 a) oraz z równania 317 możemy zapisać różniczkę entropii

$$dS = c_p m \frac{dT}{T}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\Delta S = c_p m \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

c) Przemiana izochoryczna

Korzystając ze wzorów wyprowadzonych w przykładzie 1 c) oraz z równania 317 możemy zapisać różniczkę entropii

$$dS = c_V m \frac{dT}{T},$$

co po scałkowaniu daje

$$\Delta S = c_V m \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

**Zadanie 7** Wodę o masie  $m_1 = 4 \text{ kg}$  i temperaturze  $T_1 = 353 \text{ K}$  zmieszano z wodą o masie  $m_2 = 6 \text{ kg}$  i temperaturze  $T_2 = 293 \text{ K}$ . Oblicz przyrost entropii w tym procesie. Ciepło właściwe wody  $c = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

Przyrost entropii

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_k} \frac{c m_1 dT}{T} + \int_{T_2}^{T_k} \frac{c m_2 dT}{T},$$

gdzie  $T_k$  to temperatura końcowa wody.

Z bilansu ciepłego otrzymujemy

$$c m_1 (T_1 - T_k) = c m_2 (T_k - T_2),$$

stąd

$$T_k = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}.$$

Zatem

$$\Delta S = c m_1 \ln \frac{T_k}{T_1} + c m_2 \ln \frac{T_k}{T_2},$$

$$\Delta S = c m_1 \ln \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{(m_1 + m_2) T_1} + c m_2 \ln \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{T_2},$$

$$\Delta S = 176,4 \text{ J/K}.$$

**Zadanie 8** Oblicz przyrost entropii lodu o masie  $m = 30 \text{ g}$ , który przechodzi w parę wodną, jeżeli temperatura początkowa lodu  $t_1 = -40^\circ\text{C}$ , a temperatura pary  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ . Przyjąć ciepło właściwe lodu  $c_l = 2100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , ciepło topnienia lodu  $L = 3,35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , ciepło właściwe wody  $c_w = 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  oraz ciepło parowania wody  $q_p = 2,25 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ . Przemiany zachodzą pod ciśnieniem atmosferycznym.

Przyrost entropii lodu podczas jej ogrzewania od temperatury początkowej do temperatury topnienia wynosi:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{c_l m dT}{T} = c_l m \ln \frac{T_0}{T_1},$$

gdzie  $T_1 = 233 \text{ K}$  oraz  $T_0 = 273 \text{ K}$ .

Przyrost entropii lodu podczas topnienia obliczymy ze wzoru:

$$\Delta S_2 = \frac{L m}{T_0}.$$

Przyrost entropii wody (powstałej z lodu) podczas jej ogrzewania wynosi:

$$\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_2} \frac{c_w m dT}{T} = c_w m \ln \frac{T_2}{T_0},$$

gdzie  $T_2 = 373 \text{ K}$ . Przyrost entropii wody podczas jej zamiany w parę wodną

$$\Delta S_4 = \frac{q_p m}{T_2}.$$

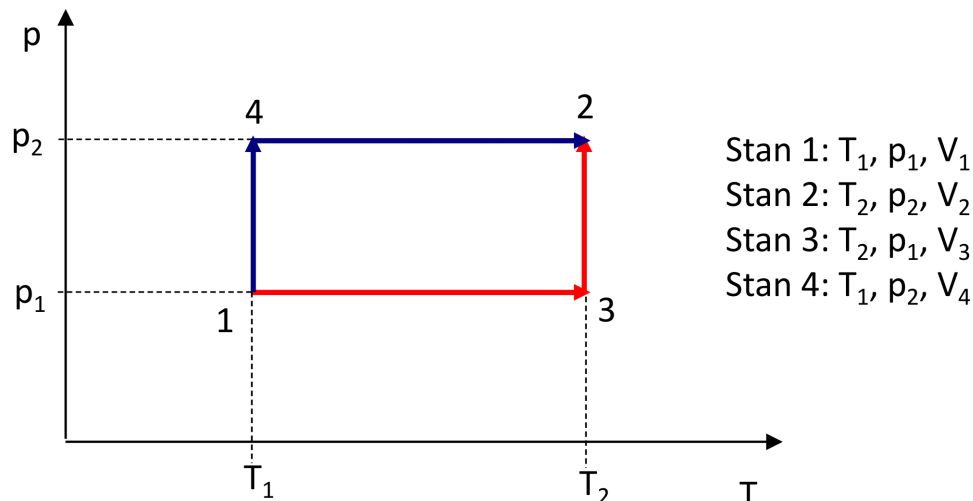
Przyrost entropii dla całego procesu:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 267 \text{ J/K}.$$

**Zadanie 9** Oblicz przyrost entropii dwutlenku węgla o masie  $m = 1 \text{ kg}$  podczas przemiany prowadzącej od ciśnienia  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  i temperatury  $t_1 = 40^\circ\text{C}$  do ciśnienia  $p_2 = 45 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  i temperatury  $t_2 = 256^\circ\text{C}$ . Dla dwutlenku węgla  $c_V = 654 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ .

Entropia jest funkcją stanu, więc przyrost między stanem początkowym a końcowym można policzyć po dowolnej drodze. Na rysunku pokazano dwie możliwe drogi przejścia.

**A** to stan początkowy, **C** to stan końcowy.



I. Przemianie izobarycznej ( $1 \rightarrow 3$ ), a następnie izotermicznej ( $3 \rightarrow 2$ ) odpowiada czerwona linia. Przyrost entropii w przemianie izobarycznej:

$$\Delta S = c_p m \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Z równania 313 i 304 otrzymujemy, że

$$M(c_p - c_v) = R,$$

stąd

$$\Delta S_{13} = m \left( c_v + \frac{R}{M} \right) \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Przyrost entropii w przemianie izotermicznej

$$\Delta S_{32} = n R \ln \frac{V_2}{V_3}$$

Z równania Clapeyrona dla rozważanej przemiany

$$p_1 V_3 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Zatem

$$\Delta S_{32} = n R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Ostatecznie

$$\Delta S = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = m \left( c_v + \frac{R}{M} \right) \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{p_1}{p_2} = -150 \text{ J/K}.$$

II. Stan końcowy osiągamy na drodze przemiany izotermicznej ( $1 \rightarrow 4$ ), a następnie izobarycznej ( $4 \rightarrow 2$ ). Odpowiada temu granatowa linia na rysunku.

Przemiana izotermiczna

$$\Delta S_{14} = n R \ln \frac{V_4}{V_1}.$$



Z równania Clapeyrona

$$p_1 V_1 = p_2 V_4.$$

Stąd:

$$\Delta S_{14} = n R \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

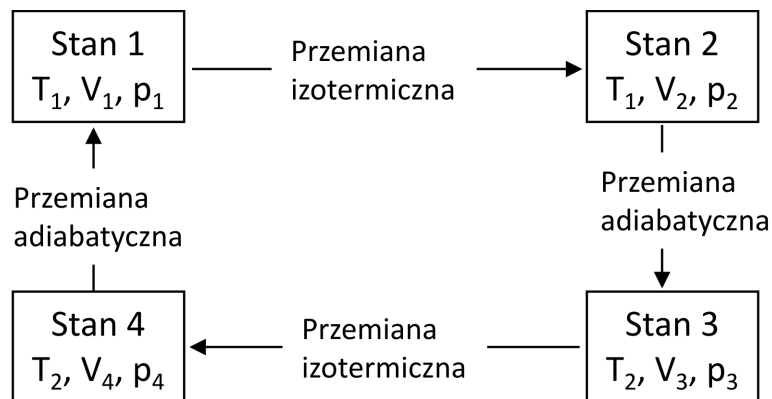
Przyrost entropii w przemianie izobarycznej

$$\Delta S_{42} = c_p m \ln \frac{T_2}{T_1} = m \left( c_V + \frac{R}{M} \right) \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Całowity przyrost entropii

$$\Delta S = \Delta S_{14} + \Delta S_{42} = \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = -150 \text{ J/K}.$$

**Zadanie 10** Wykonując cykl Carnota gaz wykonuje pracę równą  $200 \text{ kJ}$ . W etapie izotermicznego sprężania w niższej temperaturze ( $T_2$ ) entropia gazu maleje o  $500 \text{ J/K}$ . Jaka jest różnica temperatur między dwoma procesami izotermicznymi?



Przyrost entropii w przemianach izotermicznych  $1 \rightarrow 2$  oraz  $3 \rightarrow 4$  wynosi odpowiednio

$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1},$$

$$\Delta S_{34} = \frac{Q_{34}}{T_2}.$$

Przyrost entropii w przemianach adiabatycznych  $2 \rightarrow 3$  oraz  $4 \rightarrow 1$  jest równy

$$\Delta S_{23} = \Delta S_{41} = 0.$$

Uwzględniając, że  $\Delta S_{12} = \Delta S_{34}$  i odejmując stronami otrzymujemy

$$Q_{12} - Q_{34} = \Delta S (T_1 - T_2).$$

Z równania 314 wynika, że

$$Q_{12} - Q_{34} = W$$

, stąd

$$T_1 - T_2 = \frac{W}{\Delta S} = \frac{200 \cdot 10^3}{500} = 400 \text{ K}.$$

### 5.3 Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. W zamkniętej butelce o pojemności 500 ml znajduje się powietrze o temperaturze  $t_1 = 25^\circ C$  i ciśnieniu  $p_1 = 1 \text{ atm}$ . Po pewnym czasie słońce ogrzało butelkę do temperatury  $t_2 = 57^\circ C$ . Oblicz liczbę cząstek znajdujących się w butelce oraz ciśnienie końcowe gazu w butelce.

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 101325 \ln \frac{330}{298} = 1,11 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

$$\text{Liczba cząstek } N = n \cdot N_A = 0,02 \cdot 6,62 \cdot 10^{23} = 0,12.$$

2. Argon zamknięty w cylindrze z tłokiem zwiększył trzykrotnie swoją objętość, rozprężając się w sposób izotermiczny odwracalny do objętości  $6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ , wykonując przy tym pracę  $-1,1 \text{ kJ}$ . Obliczyć początkowe i końcowe ciśnienie gazu.

$$p_2 = \frac{-W}{V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$\text{natomiast } p_1 = 3 p_2.$$

3. Obliczyć pracę maksymalną, jaką można uzyskać przy adiabatycznym rozprężaniu 2 moli argonu ( $C_V = 12,6 \text{ J/mol} \cdot K$ ) od  $V_1 = 4 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = 500 \text{ K}$  do  $V_2 = 10 \text{ m}^3$ .

$$W = n T_1 C_V \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{R}{C_V}} - 1 \right] = -5716,7 \text{ J}.$$

4. Trzy mole jednoatomowego gazu doskonałego o  $C_p = 20,78 \text{ J/(mol} \cdot K)$  rozprężają się w przemianie adiabatycznej przeciwko stałemu ciśnieniu zewnętrznemu  $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , zwiększając swoją objętość o  $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Obliczyć  $W$ ,  $\Delta U$  oraz  $\Delta T$  procesu.

$$W = -p\Delta V = -600 \text{ J}; \Delta U = W = -600 \text{ J}; \Delta T = \frac{\Delta U}{n \cdot C_V} = -16,04 \text{ K}.$$

5. Cztery mole jednoatomowego gazu doskonałego znajdują się w stałej temperaturze  $293 \text{ K}$ , w zamkniętej rurze przedzielonej ruchomym tłokiem. Początkowo tłok dzieli rurę na dwa równomolowe podukłady o objętościach  $V_1 = 3 \text{ m}^3$  i  $V_2 = 7 \text{ m}^3$ . Tłok przesuwa się odwracalnie, tak że objętość  $V_1$  zmniejsza się trzykrotnie. Oblicz wykonaną pracę.

$$W = -n R T \ln \frac{30 - V_1}{9V_2} = 4128 \text{ J}.$$

6. Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego jest utrzymywany pod stałym ciśnieniem  $1 \text{ atm}$ . Ile ciepła trzeba dostarczyć do układu, aby zwiększyć jego objętość z 20 do 50 litrów?

$$Q = \frac{C_p p}{R} (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p (V_2 - V_1) = 7,6 \text{ kJ}.$$

7. Pewna ilość azotu ( $C_p = 29,1 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ) zajmująca początkowo  $10^{-3} \text{ m}^3$  zwiększa swoją objętość czterokrotnie, wykonując przeciwko stałemu ciśnieniu zewnętrznemu pracę równą  $-600 \text{ J}$ . Jakie było ciśnienie początkowe gazu, jeśli jego ciśnienie końcowe jest równe ciśnieniu zewnętrznemu, a ciepło pobrane przez gaz w tym procesie jest równe  $1350 \text{ J}$ ?

$$p_2 = p_{zew} = \frac{-W}{V_2 - V_1} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$p_1 = \frac{p_2 V_2 C_V - R(Q + W)}{V_1 C_V} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

8. Dwa mole wodoru o temperaturze początkowej  $298 \text{ K}$  poddano odwracalnemu rozprężeniu adiabatycznemu do temperatury  $198 \text{ K}$ . Oblicz  $W$  i  $\Delta U$ .

$$\Delta U = W = n C_V (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} n R (T_2 - T_1) = -4155 \text{ J}.$$

9. Oblicz przyrost entropii wodoru o masie  $m = 2 \text{ g}$  podczas jego rozprężania od objętości  $V_1 = 1,5 \text{ m}^3$  do objętości  $3 \cdot V_1$ , jeśli przemiana jest
- a) izobaryczna
  - b) izotermiczna.

$$\text{a) } \Delta S_p = \frac{7}{2} R \frac{m}{M} \ln 3 = 32,0 \text{ J/K},$$

$$\text{b) } \Delta S_T = \frac{m}{M} R \ln 3 = 9,13 \text{ J/K}.$$

10. Obliczyć przyrost entropii rtęci podczas krzepnięcia rtęci o masie  $m = 1 \text{ kg}$  w temperaturze  $t = -38^\circ \text{C}$ . Ciepło topnienia rtęci  $L_t = 1,17 \cdot 10^4 \text{ J/kg}$ .

Przyrost entropii rtęci podczas jej krzepnięcia wynosi

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{m L_t}{T} = -50 \text{ J/K}.$$

11. Oblicz zmianę entropii  $1 \text{ g}$  lodu o temperaturze  $0^\circ \text{C}$ , który topi się w sposób odwracalny przechodząc w wodę o tej samej temperaturze. Ciepło topnienia wynosi  $3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .

$$\Delta S = \frac{m L_t}{T} = 1,2 \text{ J/K}.$$

12. Dwa zbiorniki, każdy zawierający  $10 \text{ moli}$  tej samej substancji o  $C = 60 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ , lecz różniące się temperaturą (odpowiednio  $200 \text{ K}$  i  $400 \text{ K}$ ), doprowadzono do kontaktu termicznego, co spowodowało swobodny przepływ ciepła między zbiornikami. Oblicz temperaturę końcową i przyrost entropii w tym procesie. Patrz zadanie 7.

$$T_k = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \Delta S = n C \ln \frac{T_k^2}{T_1 T_2} = 70,67 \text{ J/K}.$$

13. Dwa mole argonu znajdujące się początkowo w stanie  $V = 2 \cdot 10^{-3} m^3$ ,  $T = 200 K$  rozprężano izotermicznie do objętości  $V = 4 \cdot 10^{-3} m^3$ , w takich warunkach, że praca wykonana przez gaz wynosiła  $-1600 J$ . Obliczyć  $\Delta S$  procesu.

$$\Delta S = 11,53 J/K.$$

14. Wartość bezwzględna zmiany entropii w procesie izotermicznym w cyklu Carnota jest równa  $2 kJ/K$ . Różnica temperatur między dwoma izotermami wynosi  $200 K$ . Ile ciepła zamienia się na pracę w tym cyklu.

Patrz zadanie 10.

$$W = \Delta T \cdot \Delta S = 400 kJ.$$

15. W silniku Carnota gaz roboczy o temperaturze  $373 K$  jest chłodzony wodą o temperaturze  $273 K$ . Oblicz sprawność tego silnika. Jaka powinna być maksymalna temperatura czynnika chłodzącego, żeby sprawność silnika była większa niż  $95\%$ ?

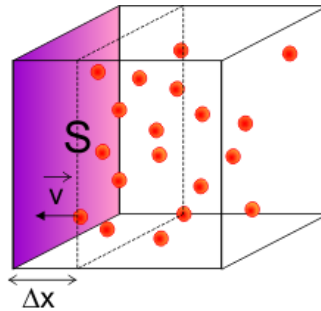
$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) 100\% = 26,8\%.$$

$$T_2 \leq T_1(1 - \eta), \text{ stąd } T_2 \leq 18,6 K.$$

## 5.4 Założenia teorii kinetyczno-molekularnej gazów: model gazu doskonałego

W tym rozdziale spojrzymy na parametry opisujące stan gazu doskonałego z mikroskopowego punktu widzenia. Przedstawmy najpierw założenia teorii kinetyczno-molekularnej gazów, które pozwolą nam na zdefiniowanie gazu doskonałego:

1. cząsteczki rozpatrywanego gazu są identyczne
2. rozmiary cząsteczek rozpatrywanego gazu są tak małe, że możemy traktować te cząsteczki jak punkty materialne
3. będziemy rozpatrywać gaz złożony z bardzo dużej ilości cząsteczek będących w bezwładnym ruchu
4. zachowane są wszystkie prawa ruchu
5. cząsteczki oddziałują na siebie jedynie podczas zderzeń i nie doświadczają żadnych innych oddziaływań



Rysunek 44: Sześcienne naczynie wypełnione gazem doskonałym

6. zderzenia cząsteczek ze ściankami naczynia, w którym znajduje się gaz są doskonale sprężyste

Zwróćmy uwagę na fakt, że z założenia czwartego i piątego wynika, iż pomiędzy zderzeniami cząsteczki gazu poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Rozpatrzmy teraz zachowanie się gazu spełniającego powyższe założenia (gazu doskonałego) zamkniętego w sześciennym naczyniu (rys.44). Załóżmy, że wybrana przez nas cząsteczka porusza się w kierunku prostopadłym jednej ze ścianek naczynia. W czasie  $dt$  zderzenia cząsteczki, ze ścianką następuje zmiana zwrotu prędkości cząsteczki gazu na przeciwny (zderzenie jest doskonale sprężyste, więc wartość prędkości nie ulega zmianie), a zatem zmiana pędu tej cząsteczki  $\Delta\vec{p}$  wynosząca

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_k - \vec{p}_0 = -m\vec{v} - (m\vec{v}) = -2m\vec{v} , \quad (319)$$

$\vec{p}_k$ - pęd końcowy cząsteczki,  $\vec{p}_0$ - pęd początkowy cząsteczki,  $m$ -masa cząsteczki. Przyczyną zmiany prędkości ciała jest siła. W tym przypadku jest to siła  $\vec{F}_1$  z jaką ścianka naczynia oddziałuje na cząsteczkę. Z praw fizyki wiemy, że siła działająca na ciało jest równa pierwszej pochodnej pędu tego ciała po czasie, zatem

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} . \quad (320)$$

Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że skoro ścianka naczynia działa na cząsteczkę gazu z siłą  $\vec{F}_1$ , to cząsteczka ta działa na ściankę naczynia z siłą  $-\vec{F}_1$ . Obliczmy teraz całkowitą liczbę cząsteczek gazu  $N$  zderzających się z wybraną przez nas ścianką w czasie  $\Delta t$ . Będą to cząsteczki, które w czasie  $\Delta t$  zdążyły pokonać ze stałą prędkością  $\vec{v}$  odcinek  $\Delta x$  oddzielający je od ścianki naczynia, a więc cząsteczki znajdujące się w objętości  $\Delta V$  naczynia

$$N = n'\Delta V = nS\Delta x = nSv\Delta t , \quad (321)$$

gdzie  $n'$  oznacza koncentrację cząsteczek gazu (liczbę cząsteczek przypadającą na jednostkę objętości naczynia) poruszających się w kierunku wybranej ścianki, a  $S$  pole powierzchni

ścianki. Całkowita siła  $\vec{F}$  wywierana na ściankę naczynia przez cząsteczki gazu w czasie  $dt$  będzie zatem wynosiła

$$\vec{F} = N \cdot (-\vec{F}_1) = -n' S v \Delta \vec{p} = 2n' S m v \vec{v}. \quad (322)$$

Z powyższego wzoru wynika, że kierunek oddziaływania cząsteczki gazu na ściankę naczynia jest zgodny z kierunkiem prędkości cząsteczki. Wartość tej siły to

$$F = 2n' S m v^2. \quad (323)$$

Cząsteczki gazu poruszają się z różnymi prędkościami, dlatego zamiast kwadratu prędkości jednej cząsteczki powinniśmy się posługiwać wartością średnią kwadratu prędkości cząsteczek, którą oznaczymy symbolem  $\overline{v^2}$ , zatem siła wywierana przez cząsteczki na ściankę naczynia to

$$F = 2n' S m \overline{v^2}. \quad (324)$$

Jeżeli powyższe równanie podzielimy obustronnie przez powierzchnię ścianki  $S$  i uwzględnimy fakt, że taka sama liczba cząsteczek porusza się w kierunku każdej z sześciu ścianek, zatem

$$n' = \frac{n}{6}, \quad (325)$$

gdzie  $n$ -koncentracja wszystkich cząsteczek gazu, otrzymamy równanie określające ciśnienie  $P$  gazu znajdującego się wewnątrz naczynia

$$P = \frac{2nm\overline{v^2}}{6} = \frac{2}{3}n \cdot \frac{m\overline{v^2}}{2}. \quad (326)$$

Zauważmy, że człon  $\frac{m\overline{v^2}}{2}$  występujący w powyższym równaniu określa średnią energię kinetyczną ruchu translacyjnego cząsteczki gazu  $\overline{E_k}$ . W ten sposób otrzymujemy zależność pomiędzy średnią energią kinetyczną translacji cząsteczek i ciśnieniem gazu

$$P = \frac{2}{3}n \cdot \overline{E_k}. \quad (327)$$

Korzystając z równania 326 możemy obliczyć prędkość średnią kwadratową  $\overline{v_k}$  cząsteczek gazu znajdujących się w naczyniu

$$\overline{v_k} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{nm}}. \quad (328)$$

Jeżeli całkowitą liczbę cząsteczek oznaczymy przez  $Z$ , a całkowitą objętość naczynia przez  $V$  koncentracja cząsteczek gazu  $n$  będzie wynosiła

$$n = \frac{Z}{V}, \quad (329)$$

zatem

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3pV}{Zm}}. \quad (330)$$

Przypomnijmy sobie teraz równanie Clapeyrona

$$pV = nRT \quad (331)$$

i zwróćmy uwagę na fakt, że  $n$  w tym równaniu określa liczbę moli gazu doskonałego, a nie koncentrację cząsteczek gazu, natomiast  $p$  jest ciśnieniem gazu a nie pędem cząsteczki. Aby uniknąć pomyłek od tej pory ciśnienie gazu będziemy oznaczać symbolem  $p$ . Liczbę moli gazu możemy wyrazić jako stosunek liczby wszystkich cząsteczek gazu  $Z$  i liczby Avogadro  $N_A$ , zatem równanie Clapeyrona możemy przekształcić do następującej postaci

$$\frac{pV}{Z} = \frac{RT}{N_A}. \quad (332)$$

Wyrażenie znajdujące się po lewej stronie tego równania możemy wstawić do wzoru 330

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3pV}{Zm}} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A m}}. \quad (333)$$

Iloczyn liczby Avogadro (czyli liczby cząsteczek w jednym molu gazu) i masy pojedynczej cząsteczki jest masą molową gazu, którą oznaczymy symbolem  $M$ . Końcowy wzór określający wartość prędkości średniej kwadratowej przyjmuje następującą postać

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (334)$$

## 5.5 Zadania

**Zad.1** Dwa identyczne cylindry o pojemności 100 l są wypełnione gazem. Pierwszy zbiornik zawiera wodór, drugi hel, a prędkości średnie kwadratowe molekuł obu gazów są jednakowe i wynoszą  $600 \frac{m}{s}$ . Zakładając, że obydwa gazy można potraktować jak gazy doskonałe znajdź ciśnienie panujące w zbiornikach jeśli wiadomo, że w pierwszym zbiorniku znajduje się 10 moli gazu a w drugim 5 moli gazu.

**Zad.2** W jakiej temperaturze prędkość średnia kwadratowa cząsteczek wodoru będzie taka sama jak prędkość średnia kwadratowa cząsteczek tlenu o temperaturze 272K?

## 5.6 Rozwiązania

**Zad.1** Skorzystamy z równania 326 określającego ciśnienie gazu doskonałego

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2} , \quad (335)$$

w którym  $n$  oznacza koncentrację cząsteczek gazu,  $m$  masę cząsteczki a  $\overline{v^2}$  jest kwadratem prędkości średniej kwadratowej. Koncentrację  $n$  cząsteczek poszczególnych gazów obliczymy dzieląc liczbę wszystkich cząsteczek  $Z$  (równą iloczynowi liczby moli  $x$  i liczby Avogadro) przez objętość cylindra  $V$

$$n = \frac{Z}{V} = \frac{xN_A}{V} .$$

Powyzszy wynik wstawiamy do równania 335 otrzymując

$$p = \frac{xmN_A\overline{v^2}}{3V} .$$

Jak już wspomnieliśmy w części teoretycznej, iloczyn masy cząsteczki i liczby Avogadro daje nam masę molową gazu  $M$ , a zatem

$$p = \frac{xM\overline{v^2}}{3V} . \quad (336)$$

Sprawdźmy jednostkę otrzymanego ciśnienia

$$p = \frac{\text{mol} \cdot \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{dm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{10^{-3} \text{ m}^3} = \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} .$$

Zatem jeśli masę molową wyrazimy w  $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$  a objętość gazu w  $\text{dm}^3$ , czyli litrach otrzymana wartość ciśnienia będzie wyrażana w  $\text{Pa}$ . Masa molowa gazowego wodoru wynosi  $2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  (wodór jest gazem dwuatomowym), natomiast masa molowa helu to  $4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ . Objętość zbiorników wynosi  $100 \text{ l}$  czyli Podstawiając te wartości do wzoru 336 otrzymujemy poszukiwane wartości ciśnienia

$$p_H = 24 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 24 \text{ kPa} ,$$

$$p_{He} = 24 \text{ kPa} ,$$

a zatem ciśnienie w obydwu zbiornikach jest identyczne.

**Zad.2** W tym zadaniu najwygodniej jest skorzystać ze wzoru 334 na prędkość średnią kwadratową cząsteczek gazu doskonałego. Niech  $T_1$  oznacza poszukiwaną przez nas temperaturę gazowego wodoru, natomiast  $T_2$  znaną temperaturę gazowego tlenu. Skoro prędkości średnie kwadratowe cząsteczek tych gazów mają być identyczne prawdziwa jest następująca równość



$$\sqrt{\frac{3RT_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M_2}}, \quad (337)$$

gdzie  $M_1$  oznacza masę molową gazowego wodoru równą  $2 \frac{g}{mol}$  a  $M_2$  jest masą molową gazowego tlenu wynoszącą  $32 \frac{g}{mol}$ . Przekształcając równanie 337 otrzymujemy

$$T_1 = \frac{M_1}{M_2} T_2 = 34 K .$$

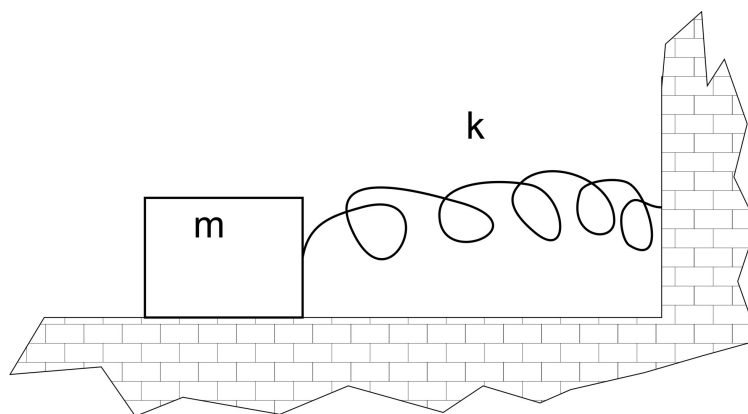
## 6 Drgania mechaniczne. Ruch falowy.

### 6.1 Wstęp

#### 6.1.1 Oscylator harmoniczny prosty

Oscylator harmoniczny prosty jest to każdy układ, którego ruch opisuje funkcja będąca rozwiązaniem równania różniczkowego postaci:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2x(t) = 0 \quad (338)$$



Rysunek 45: Przykład oscylatora harmonicznego prostego.

Rozważmy ruch ciała zaczepionego na sprężynie, jak na rysunku 56. Jeżeli możemy pominąć tarcie, jedyną siłą działającą na to ciało jest siła sprężystości, która zgodnie z prawem Hooke'a wynosi  $F(t) = -kx(t)$ , gdzie  $x(t)$  jest chwilowym wychyleniem ciała z położenia równowagi, a  $k$  jest stałą sprężystości sprężyny. Minus przed współczynnikiem  $k$  wynika z faktu, iż siła w każdej chwili jest skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona:

$$ma(t) = -kx(t), \quad (339)$$

gdzie  $a(t)$  jest chwilowym przyspieszeniem ciała, czyli drugą pochodną  $x(t)$  po czasie. Jeśli oznaczymy czynnik  $\frac{k}{m}$  jako  $\omega_0^2$ , otrzymamy równanie 338, zatem taki układ możemy nazwać oscylatorem harmonicznym prostym.

Równanie 338 jest jednorodnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Sposób rozwiązania takiego równania zostanie szczegółowo omówiony na przykładzie zadania nr 3 (patrz rozdz. Rozwiązania zadań). W ogólności rozwiązanie ma następującą postać:

$$x(t) = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t \quad (340)$$

lub:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (341)$$

gdzie:

$$A^2 = B_1^2 + B_2^2 \quad (342)$$

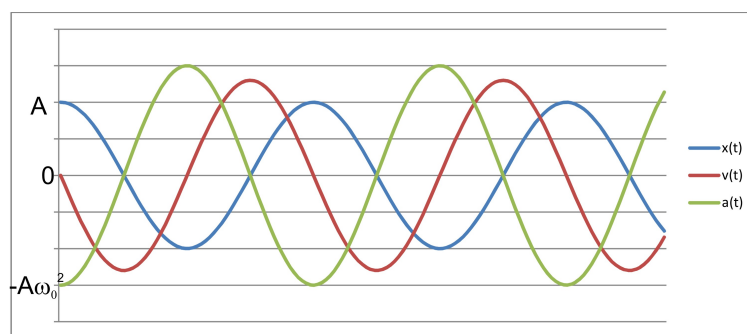
W powyższym równaniu  $A$  oznacza amplitudę drgań czyli maksymalne wychylenie,  $\varphi$  fazę początkową, a  $\omega_0$  częstość kołową drgań własnych, równą

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (343)$$

gdzie  $T$  jest okresem oscylacji czyli czasem jednego drgania. Amplituda oraz prędkość maksymalna oscylatora zależą od warunków początkowych, natomiast częstość kołowa drgań własnych zależy tylko od parametrów układu (w tym przypadku rodzaju sprężyny i masy ciała). Zależność prędkości od czasu  $v(t)$  obliczamy jako pierwszą pochodną po czasie funkcji opisującej wychylenie  $x(t)$ , a zależność przyspieszenia od czasu  $a(t)$  jako drugą pochodną funkcji  $x(t)$  po czasie:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (344)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (345)$$



Rysunek 46: Zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia oscylatora prostego od czasu dla  $\varphi = 0$ .

Na wykresie widać, że ruch rozpatrywanego układu polega na drganiach wokół pewnego punktu równowagi ze stałą amplitudą. Jest to ruch harmoniczny prosty. Przykładem oscylatora harmonicznego mogą być: masa zaczepiona na sprężynie, wahadło matematyczne,

wahadło fizyczne czy układ elektryczny złożony z pojemności elektrycznej  $C$  i indukcyjności  $L$ .

Energia kinetyczna oscylatora harmonicznego wyraża się wzorem :

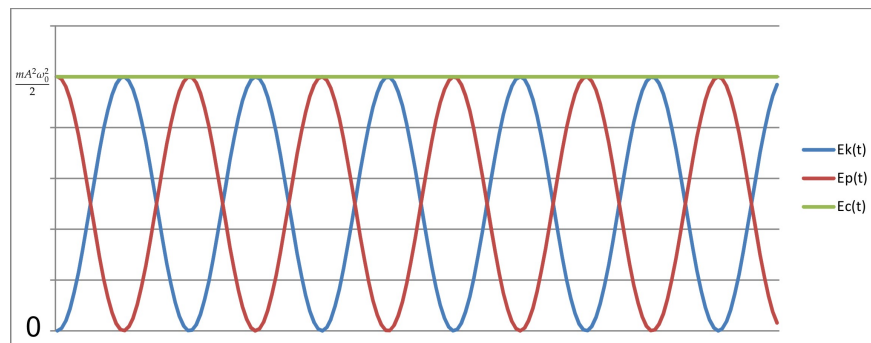
$$E_k(t) = \frac{mv(t)^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (346)$$

natomiast energia potencjalna wzorem:

$$E_p(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \quad (347)$$

Całkowita energia mechaniczna jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej czyli:

$$E_c(t) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \quad (348)$$



Rysunek 47: Zależność energii kinetycznej, potencjalnej i całkowitej od czasu oscylatora prostego dla  $\varphi = 0$ .

### 6.1.2 Składanie drgań, dudnienia

Jeżeli rozpatrywany układ uczestniczy w kilku niezależnych ruchach harmonicznym, to jego drgania są superpozycją ruchów składowych.

Oznacza to, że jeżeli ruch jest wynikiem złożenia dwóch drgań, to wypadkowe wychylenie oscylatora jest sumą wychyleń związanych z drganiami składowymi. Jeżeli drgania składowe  $x_1$  i  $x_2$  mają zbliżone (lecz inne) częstotliwości kołowe, ale równe amplitudy:

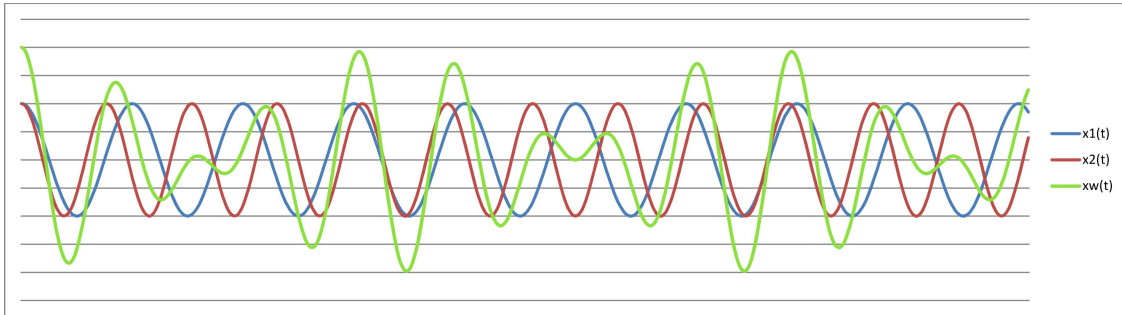
$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \quad (349)$$

$$x_2(t) = A \cos(\omega_2 t), \quad (350)$$

to wypadkowe drgania będą opisane funkcją:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (351)$$

Drgania o takiej postaci nazywamy dudnieniami.  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  jest częstotliwością drgań wypadkowych, a czynnik  $2A \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)$  jest funkcją określającą zmiany amplitudy, a więc  $\omega_1 - \omega_2$  jest częstotliwością z jaką zmienia się wartość amplitudy czyli częstotliwością dudnień.



Rysunek 48: Zielona linia przedstawia superpozycję drgań składowych (linia niebieska i czerwona) w postaci dudnień.

### 6.1.3 Oscylator harmoniczny tłumiony

**Równanie oscylatora tłumionego** Załóżmy, że układ opisany w 6.1.1 znajduje się w ośrodku o współczynniku oporu  $b$ . Wówczas na ciało działa siła oporu, której wartość jest wprost proporcjonalna do jego prędkości. Oznacza to, że wypadkowa siła działająca na ciało jest sumą siły sprężystości i siły oporu ośrodka. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona:

$$ma(t) = -kx(t) - bv(t) \quad (352)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \Gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (353)$$

gdzie  $\Gamma = \frac{b}{m}$  nazywamy współczynnikiem tłumienia. Częstotliwość drgań oscylatora tłumionego wynosi  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$ . W zależności od relacji między częstotliwością kołową drgań własnych  $\omega_0$  a  $\Gamma$  otrzymamy różne rozwiązania takiego równania:

- Oscylator słabo tłumiony ( $4\omega_0^2 \gg \Gamma^2$ ):

$$x(t) \approx Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (354)$$

- Oscylator silnie tłumiony ( $4\omega_0^2 < \Gamma^2$ ):

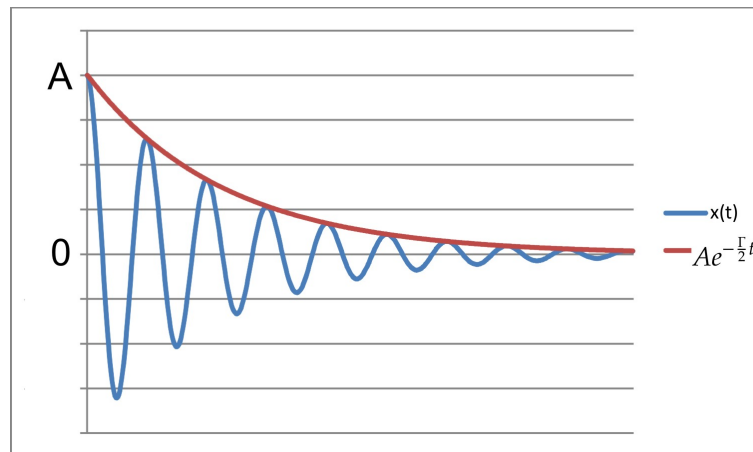
$$x(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2}t + \varphi\right) \quad (355)$$

- Oscylator tłumiony krytycznie ( $4\omega_0^2 \approx \Gamma^2$ ):

$$x(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \quad (356)$$

- Oscylator przetłumiony ( $4\omega_0^2 < \Gamma^2$ ).

Oscylator tłumiony krytycznie oraz przetłumiony nie poruszają się ruchem periodycznym. Drgania obserwujemy jedynie w przypadku gdy ( $4\omega_0^2 > \Gamma^2$ ). Zależność wychylenia od czasu w takim przypadku przedstawia wykres:



Rysunek 49: Zależność wychylenia od czasu oscylatora tłumionego dla  $\varphi = 0$ .

**Logarytmiczny dekrement tłumienia** Logarytmiczny dekrement tłumienia definiujemy jako logarytm naturalny stosunku kolejnych (następujących po sobie po czasie jednego okresu) amplitud:

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (357)$$

Ponieważ

$$A_{n+1} = A_n e^{-\frac{\Gamma}{2}T}, \quad (358)$$

logarytmiczny dekrement tłumienia możemy wyrazić wzorem:

$$\Lambda = \frac{\Gamma}{2}T \quad (359)$$

#### 6.1.4 Oscylator wymuszony. Rezonans

Jeżeli do układu masy na sprężynie przyłożymy zewnętrzną siłę zmienną, opisaną funkcją periodyczną, np.:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (360)$$

to siła wypadkowa będzie sumą siły sprężystości, siły oporu ośrodka i siły zewnętrznej:

$$ma(t) = -kx(t) - bv(t) + F_0 \cos(\omega t), \quad (361)$$

a równanie 353 przyjmie postać:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \Gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (362)$$

Rozwiązanie ogólne równania 362 jest dość złożone:

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)] + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t), \quad (363)$$

gdzie  $B_1$  i  $B_2$  wynoszą odpowiednio:

$$B_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2 \omega^2} \quad (364)$$

$$B_2 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2 \omega^2} \quad (365)$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  możemy wyznaczyć na podstawie zadanych warunków początkowych. Funkcja 363 opisuje ruch złożony z dwóch ruchów drgających. Jeden z nich ma częstość drgań taką jak w przypadku oscylatora tłumionego, natomiast drugi ma częstość kołową równą częstości zmian siły zewnętrznej. Zauważmy, że pierwszy składnik równania 363 :  $e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)]$  jest identyczny z funkcją opisującą drgania tłumione. Oznacza to, że po pewnym czasie te drgania wygasają, a wówczas oscylator wymuszony porusza się zgodnie z funkcją

$$x(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) \quad (366)$$

Taki rodzaj drgań wymuszonych nazywamy drganiami stacjonarnymi. Zauważmy, że ich postać nie zależy od warunków początkowych i niezależnie od wartości częstości drgań własnych, układ porusza się z częstością siły wymuszającej. Korzystając z zależności trygonometrycznych, funkcję 366 możemy zapisać następująco:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (367)$$

gdzie:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \Gamma^2\omega^2}}, \quad (368)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (369)$$

Łatwo udowodnić, że amplituda drgań  $A$  przyjmuje największą wartość dla częstości kołowej  $\omega$  o wartości:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (370)$$

Jest to tak zwana częstość rezonansowa. Rezonans jest to zjawisko zachodzące tylko dla drgań wymuszonych i polegające na tym, że dla wartości częstości siły wymuszającej równej  $\omega_r$ , amplituda drgań osiąga wartość maksymalną. Zwróćmy uwagę, że jeżeli opór ośrodka jest bardzo mały ( $\Gamma \approx 0$ ), to  $\omega_r \approx \omega_0$ , a wartość amplitudy zmierza do nieskończoności.

### 6.1.5 Ruch falowy

Fala jest to zaburzenie ośrodka rozchodzące się w przestrzeni ze stałą prędkością. W przypadku fal mechanicznych tym zaburzeniem mogą być drgania cząsteczek ośrodka (musi to być zatem ośrodek materialny), natomiast w przypadku fal elektro - magnetycznych tym zaburzeniem są drgania pola elektrycznego i pola magnetycznego (może to być ośrodek materialny lub próżnia). Należy pamiętać, że fala nie przenosi materii, natomiast transportuje energię.

### 6.1.6 Funkcja falowa

Stwierdziliśmy, że fala jest przemieszczającym się zaburzeniem, np. w postaci drgań cząsteczek ośrodka. Oznacza to, że jeżeli w chwili  $t = 0$  cząsteczka w punkcie  $z'$  ma wychylenie  $\psi(z', 0) = g(z')$ , to po upływie czasu  $t$ , cząsteczka w punkcie  $z = z' + vt$ , gdzie  $v$  to prędkość fali, ma takie samo wychylenie:  $\psi(z, t) = \psi(z - vt, 0) = g(z - vt)$ . Funkcja  $g$  może być zatem dowolną funkcją o argumentie  $(z - vt)$ , a jej postać decyduje o kształcie zaburzeń ośrodka. W naturze najczęściej spotykane są fale sinusoidalne, czyli np.:

$$\psi(z, t) = A \cos[\alpha(z - vt + \phi)], \quad (371)$$



gdzie  $A$  jest amplitudą, a  $\alpha$  jest pewną stałą. Prędkość fali jest stosunkiem długości fali do jej okresu:  $v = \frac{\lambda}{T}$ . Ponieważ  $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ , gdzie  $k$  jest liczbą falową, a  $\frac{2\pi}{T} = \omega$ , prędkość fali wyraża wzór:

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (372)$$

a funkcja falowa ma postać:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (373)$$

gdzie  $\varphi$  jest przesunięciem fazowym fali. Prędkość 372 jest prędkością, z jaką przemieszczają się punkty będące w tej samej fazie drgań i nazywamy je prędkością fazową. Zależy ona od rodzaju fali i od właściwości ośrodka, w którym się rozchodzi. Poniżej przedstawione są przykładowe wyrażenia na prędkość fazową w wybranych ośrodkach dla fal mechanicznych:

- fala poprzeczna w strunie o gęstości liniowej  $\mu$  i naprężonej siłą  $T_0$ :

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (374)$$

- fala podłużna w pręcie o gęstości  $\rho$  i module Younga  $E$ :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (375)$$

- fala podłużna w gazie o ciśnieniu  $p$ , gęstości  $\rho$  i wykładniku adiabaty  $\kappa$ :

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad (376)$$

i dla fal elektromagnetycznych:

- w próżni:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (377)$$

- w ośrodku materialnym:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} \quad (378)$$

### 6.1.7 Fale stojące

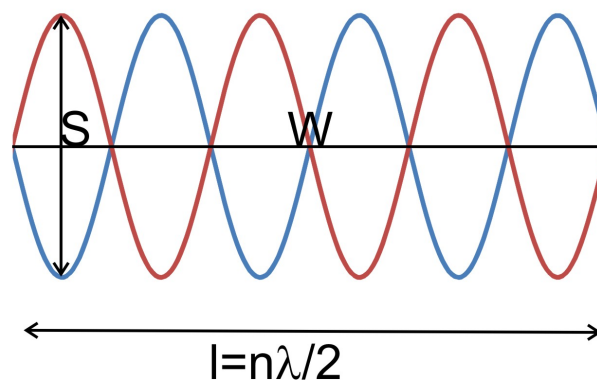
Rozważmy falę poprzeczną  $\psi_i(x, t) = \sin(\omega t - kx)$ , rozchodzącą się w strunie zamocowanej na obu końcach. Fala poruszająca się w prawo odbija się od prawego końca. Fala odbita od ośrodka gęstszego jest przesunięta w fazie o  $\pi$  i porusza się w lewo, więc opisuje ją funkcja  $\psi_r(x, t) = \sin(\omega t + kx + \pi)$ . Fala wypadkowa jest zatem wynikiem nałożenia się dwóch fal: padającej  $\psi_i(x, t)$  i odbitej  $\psi_r(x, t)$ :

$$\psi(x, t) = \psi_i(x, t) + \psi_r(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}) \quad (379)$$

Amplituda drgań cząsteczek struny zależy zatem od położenia, ale nie zależy od czasu :

$$\psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (380)$$

Falę stojącą przedstawia rysunek 50.



Rysunek 50: Fala stojąca na strunie o długości  $l$ . Linia czerwona i niebieska przedstawiają położenie cząsteczek w chwilach oddległych w czasie o  $\frac{T}{2}$ . Cząsteczki w punktach S (strzałki) drgają z maksymalną amplitudą, a cząsteczki w punktach W (węzły) mają amplitudę równą zero, czyli pozostają w spoczynku.  $\lambda$  oznacza długość fali biegnącej.

### 6.1.8 Efekt Dopplera

Częstotliwość fali wysyłanej przez źródło  $\nu_0$  jest równa częstotliwości obserwowanej tylko wtedy, gdy źródło nie porusza się względem odbiornika. W przeciwnym wypadku częstotliwość fali obserwowanej  $\nu$  wyraża się wzorem:

$$\nu = \nu_0 \frac{v \pm v_o}{v \mp v_z}, \quad (381)$$

gdzie  $v_o$  jest prędkością odbiornika ('+' gdy odbiornik się zbliża do źródła, '-' gdy się oddala),  $v_z$  jest prędkością źródła ('-' gdy źródło się zbliża do odbiornika, '+' gdy się oddala).

### 6.1.9 Natężenie fali

Natężenie fali jest to średnia wartość energii przenoszanej przez falę w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni. W przypadku fali płaskiej natężenie fali nie zależy od odległości od źródła, natomiast dla fal wytworzonych przez punktowe źródło (fale kuliste), zależność natężenia od odległości  $r$  źródła wyraża wzór:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (382)$$

gdzie  $P$  jest mocą źródła.

Zauważmy, że dla źródła punktowego zgodnie z 382, ilość energii przechodzącej przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu maleje wraz z odległością od źródła ( $I \propto \frac{1}{r^2}$ ). Energia jest wprost proporcjonalna do kwadratu amplitudy, więc  $A \propto \frac{1}{r}$ . Wówczas funkcja falowa dla fal kulistych różni się od [36] i ma postać:

$$\psi(z, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (383)$$

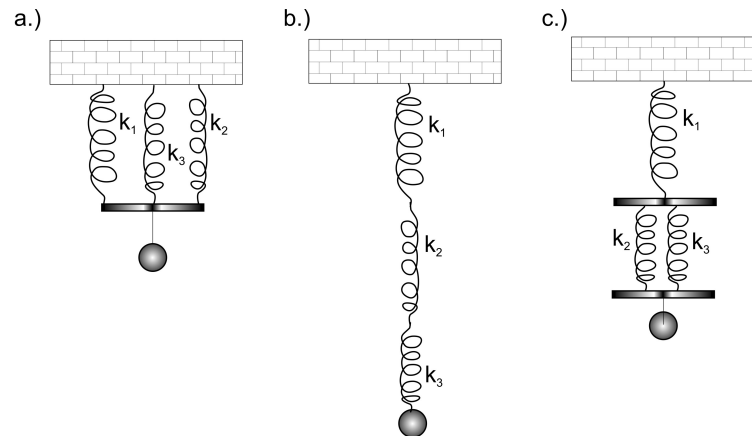
Natężenie dźwięku możemy ocenić za pomocą narządów słuchu. Ucho ludzkie działa jednak w taki sposób, że dźwięk, który słyszymy dwa razy głośniejszy, wcale nie ma dwa razy większego natężenia. Dlatego wprowadzono wielkość charakteryzującą dźwięk, której zmiany są proporcjonalne do tego, jak ten dźwięk jest odbierany przez ludzki organizm. Tę wielkość nazywamy poziomem natężenia dźwięku i wyraża się wzorem :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (384)$$

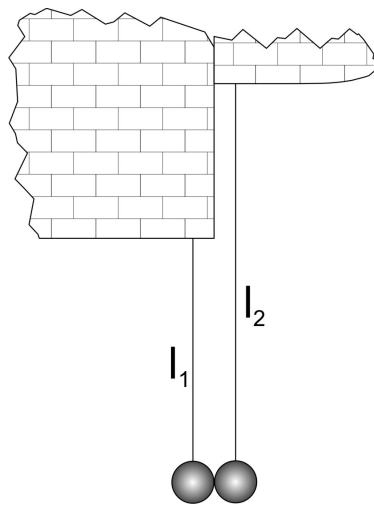
Gdzie  $I_0$  jest natężeniem dźwięku, zwanym progiem słyszalności i wynosi  $10^{12} \frac{W}{m^2}$ .

## 6.2 Zadania

1. Obliczyć częstość drgań ciężarka o masie  $m$ , zawieszony na nieważkich sprężynach w sposób pokazany na rysunkach (51). Masy elementów łączących sprężyny pomijamy. Współczynniki sprężystości sprężyn wynoszą odpowiednio  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ .
2. Dwie kulki o jednakowych masach  $m$  zawieszono na dwóch niciach o długościach  $l_1$  i  $l_2$ . Nici umocowano w taki sposób, że kulki wisząc na tym samym poziomie stykają się ze sobą (52). Kulkę wiszącą na nici o długości  $l_1$  odchyłono o mały kąt ( $< 5^\circ$ ) i puszczono swobodnie tak, że zderzyła się ona doskonale sprężysto z drugą kulką. Po jakim czasie nastąpi  $n$ -te zderzenie?



Rysunek 51: Rysunek do zadania nr 1



Rysunek 52: Rysunek do zadania nr 2

3. Masie  $m$ , zawieszanej na wahadle matematycznym o długości  $l$ , nadano prędkość kątową  $\Theta$ , taką, że amplituda nie przekroczyła  $5^\circ$ . Znaleźć zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia masy  $m$  od czasu. Narysuj wykres zależności wychylenia i kinetycznej energii od czasu. Założyć brak oporu ośrodka.
4. Cząstka wykonuje drgania harmoniczne. W odległościach  $x_1$  i  $x_2$  od położenia równowagi jej prędkości wynoszą  $v_1$  i  $v_2$ . Znaleźć amplitudę i częstość drgań cząstki.
5. Pewien obiekt wykonuje drgania harmoniczne proste w linii prostej. Przy jakim wychyleniu z położenia równowagi: a)  $E_k = E_p$ , b)  $E_k = 3E_p$ , gdzie  $E_k$  oznacza energię kinetyczną obiektu a  $E_p$  energię potencjalną sprężystości.
6. Na dwóch sprężynach o stałej sprężystości  $k$  połączonych szeregowo zaczepiono masę  $M$ . Masa i sprężyna znajdują się w ośrodku o współczynniku oporu  $b$  ( $b^2 < 4Mk$ ). W chwili  $t=0$  odchyłono masę od położenia równowagi o odległość  $A$  i puszczono

- swobodnie. Znaleźć i wykreślić zależność wychylenia masy  $M$  od czasu.
7. Wahadło matematyczne na Ziemi wykonuje drgania z dekrementem logarytmicznym  $\Lambda$ . Na planecie  $X$  logarytmiczny dekrement tłumienia drgań tego wahadła wynosi  $\Lambda_x$ . Znaleźć przyspieszenie grawitacyjne planety  $X$  wiedząc, że współczynnik tłumienia jest taki sam jak na Ziemi.
  8. Wahadło matematyczne na planecie  $X$  wykonuje drgania z dekrementem logarytmicznym  $\Lambda$ . Jaki będzie logarytmiczny dekrement tłumienia drgań tego wahadła na Ziemi, jeżeli wiemy, że opór atmosfery ziemskiej jest  $n$  razy większy niż na planecie  $X$ , a przyspieszenie grawitacyjne planety  $X$  jest  $m$  razy większe.
  9. Ile razy zmniejszy się energia całkowita drgań wahadła sekundowego po upływie  $t=5$  min, jeżeli logarytmiczny dekrement tłumienia  $\Lambda = 0,031$ ? Wahadło sekundowe ma okres drgań  $T=2$ s).
  10. Ruch wahadła sferycznego jest wynikiem superpozycji dwóch ruchów harmoniczných zachodzących wzdłuż prostych prostopadłych według równań:  $x(t) = a \sin(\omega t)$  i  $y(t) = b \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ . Znaleźć i wykreślić równanie toru ruchu wahadła (zawieszony masy)  $y(x)$  oraz prędkość w chwili  $t$ .
  11. Ruch cząstki jest superpozycją dwóch ruchów harmoniczných. Okresy drgań wynoszą  $T_1$  i  $T_2$ . Wyznaczyć okres drgań wypadkowych i okres dudnień.
  12. Ze złożenia dwóch drgań harmoniczných zachodzących wzdłuż jednego kierunku otrzymano równanie ruchu cząstki w postaci  $x(t) = a \cos(\alpha t) \cos(\beta t)$ , gdzie  $\alpha > \beta$ . Znaleźć kołowe częstości drgań składowych, okres dudnień drgania wypadkowego oraz prędkość cząstki w chwili, kiedy amplituda drgania wypadkowego wynosi zero.
  13. Nieważką sprężynę podzielono na dwie, tak, że jedna jest  $n$  razy dłuższa od drugiej. Następnie między sprężynami zamocowano ciało, a końce sprężyn zamocowano do przeciwnych ścian. Obliczyć okres drgań ciała odchylonego od położenia równowagi w kierunku poziomym, jeśli wiadomo, że ciało zamocowane do krótszej sprężyny wykonuje drgania o częstości  $f$ . Założyć brak tarcia.
  14. Pralka przemysłowa umieszczona w przyczepie kempingowej powoduje ugięcie podłogi o  $x$ . Przy jakiej częstości obrotów pralki powstanie niebezpieczeństwo rezonansu i zniszczenia przyczepy, jeżeli współczynnik tłumienia drgań w takim układzie wynosi  $\Gamma$ . Przyjąć, że masa pralki jest znacznie większa od masy podłogi.

15. Obliczyć średnią energię kinetyczną, średnią energię potencjalną oraz średnią energię całkowitą ciała o masie  $m$  wykonującego stacjonarne drgania wymuszone o równaniu  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Częstość drgań własnych wynosi  $\omega_0$ .
16. Struna o masie  $m$ , zamocowana na obu końcach, drga z częstotliwością równą drugiej harmonicznej  $\omega$ , przy której maksymalne wychylenie struny wynosi  $A$ . Znaleźć średnią energię kinetyczną struny.
17. W pręcie o długości  $L$ , złożonym ze stopu o składzie zmieniającym się wraz z długością, rozchodzi się fala podłużna. Na jednym końcu pręt ma gęstość  $\rho_1$  i moduł Younga  $E_1$ , a na drugim  $\rho_2$  i  $E_2$ . Moduł Younga zmienia się liniowo, natomiast gęstość rośnie proporcjonalnie do kwadratu długości. Oblicz prędkość fali w punkcie  $x = \frac{L}{4}$ . Oblicz czas, w którym fala przebędzie całą długość pręta, w przypadku, gdy gęstość jest stała i wynosi  $\rho$ .
18. Nietoperz przelatując z prędkością  $v_n$  z jednego drzewa na drugie, wysyła jednocześnie sygnał ultradźwiękowy do przodu i do tyłu o częstotliwości  $\nu_0$ . Obliczyć częstość sygnału odbieranego przez nietoperza i częstość dudnień.
19. Odbiornik znajduje się na prostej, wzdłuż której porusza się źródło dźwięku o częstotliwości  $\nu_0$ . Źródło porusza się ruchem harmonicznym z częstotliwością kołową  $\omega$  i amplitudą  $A$ . Jaką częstość rejestruje odbiornik w chwili, gdy źródło przechodzi przez położenie równowagi? Prędkość dźwięku wynosi  $v_d$ .
20. Punktowe źródło dźwięku znajduje się na prostej prostopadłej do powierzchni ograniczonej przez okrąg o promieniu  $R$  oraz jego średnicę i przechodzącej przez jego środek  $O$ . Odległość między środkiem okręgu, a źródłem wynosi  $l$ . Znaleźć średnią wartość strumienia energii przechodzącej przez tę powierzchnię, jeżeli w punkcie  $O$  natężenie fali wynosi  $I_0$ .

### 6.3 Rozwiązania

1. Częstość drgań w takim układzie wyraża się wzorem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (385)$$

Należy więc znaleźć zastępczy współczynnik sprężystości układu sprężyn. Zgodnie z prawem Hooke'a, wartość siły odkształcającej sprężynę (tu układ sprężyn) ma wartość

$$F = kx \quad (386)$$

, gdzie  $x$  jest odkształceniem sprężyny.

a Z I zasady dynamiki Newtona wynika, że w momencie, gdy sprężyna jest odkształcona przez siłę  $F$  (masa  $m$  się nie porusza), siła  $F$  jest równoważona przez sumę sił sprężystości poszczególnych sprężyn, zatem:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \quad (387)$$

Ponieważ każda sprężyna zostaje odkształcona o tę samą wartość  $x$ , możemy zapisać:

$$kx = k_1x + k_2x + k_3x \quad (388)$$

$$k = k_1 + k_2 + k_3 \quad (389)$$

Włączeniu równoległym sprężyn, zastępczy współczynnik sprężystości układu sprężyn jest zatem sumą wsp. spr. poszczególnych sprężyn.

Odp.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + k_3}{m}} \quad (390)$$

b Każda sprężyna jest odkształcana taką samą siłą  $F$ , zatem  $F = F_1 = F_2 = F_3$ .

$$kx = k_1x_1 = k_2x_2 = k_3x_3 \quad (391)$$

Całkowite odkształcenie  $x$  jest sumą odkształceń poszczególnych sprężyn:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad (392)$$

Z powyższych równań otrzymujemy:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad (393)$$

Częstość drgań wynosi zatem

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1k_2k_3}{(k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3)m}} \quad (394)$$

c Współczynnik sprężystości układu dwóch sprężyn połączonych równolegle wynosi:

$$k_{23} = k_2 + k_3 \quad (395)$$

Układ odpowiada więc szeregowemu połączeniu sprężyn o współczynnikach  $k_{23}$  i  $k_1$ , czyli zastępczy wsp. spr. układu obliczamy ze wzoru:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{23}} \quad (396)$$

Częstość drgań:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_{23}}{(k_1 + k_{23})m}} \quad (397)$$

2. Okresy wahadeł wynoszą  $T_1 = 2\pi\sqrt{l_1/g}$  i  $T_2 = 2\pi\sqrt{l_2/g}$ . Gdy pierwsza kulka zastała puszczone, do momentu zderzenia przebyła drogę równą  $\frac{1}{4}$  drogi odpowiadającej pełnej oscylacji. Ponieważ zderzenia kulek są doskonale sprężyste, na podstawie zasad zachowania pędu i energii można wykazać, że w momencie zderzenia kulka o niezerowej prędkości przekazuje cały swój pęd drugiej kulce, czyli sama się zatrzymuje. Następnie kulka druga wykonuje pół pełnego drgania i znów zderza się z pierwszą kulką będącą w spoczynku, przekazując jej cały swój pęd. N-te zderzenie nastąpi po czasie

$$t = \frac{n-1}{4}T_1 + \frac{n}{4}T_2 \quad (398)$$

dla parzystej liczby zderzeń i

$$t = \frac{n}{4}T_1 + \frac{n-1}{4}T_2 \quad (399)$$

dla nieparzystej liczby zderzeń.

3. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wiemy, że wypadkowa siła działająca na ciało o masie  $m$  wynosi  $F = ma$ , gdzie  $a$  to przyspieszenie tego ciała. Przyspieszenie masy  $m$  jest drugą pochodną wychylenia  $x(t)$  z położenia równowagi po czasie:

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (400)$$

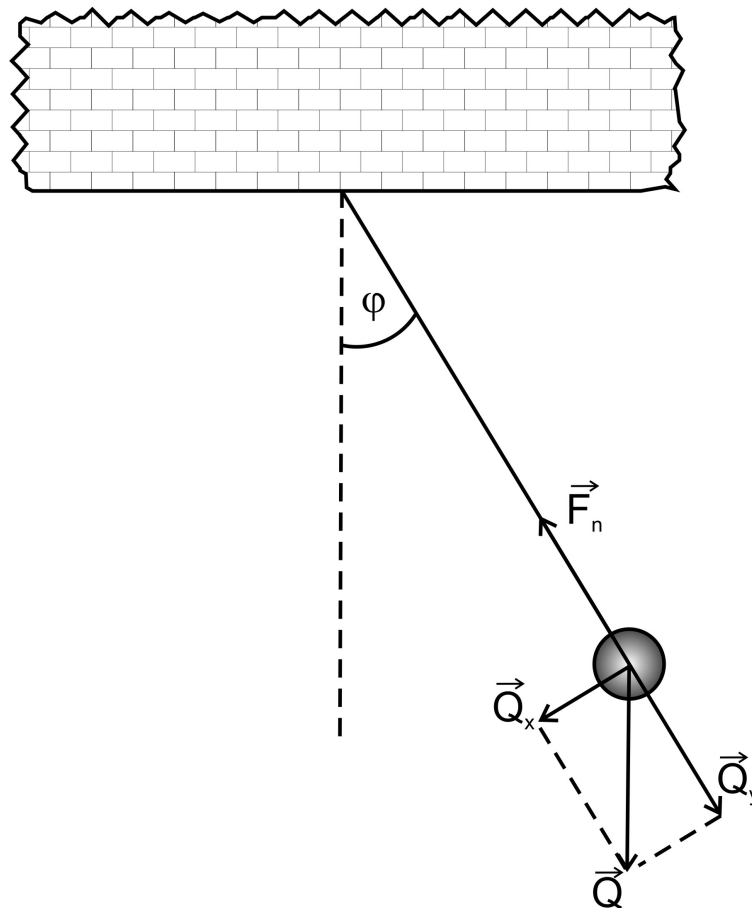
Z rysunku wynika, że wypadkowa siła, zwana siłą kierującą ma wartość  $Q_x = -mg \sin \varphi(t)$ . Ponieważ kąt  $\varphi$  jest bardzo mały, można zastosować przybliżenie:  $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$ . Podstawiając wyrażenia na siłę, przyspieszenie i  $\varphi(t) = \frac{x(t)}{l}$ , otrzymujemy równanie:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -mg \frac{x(t)}{l} \quad (401)$$

Wprowadzamy oznaczenie  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (402)$$





Rysunek 53: Siły  $Q_y$  i  $F_n$  się równoważą, więc siła wypadkowa ma wartość  $Q_x$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego prostego. Jest to jednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Rozwiązanie ogólne równania tego typu jest kombinacją liniową dwóch (ta liczba odpowiada rzędowi równania) liniowo niezależnych rozwiązań szczególnych. Rozwiązaniem szczególnym nazywamy dowolną funkcję spełniającą to równanie. Takich funkcji jest nieskończenie wiele, ale tylko jedna odpowiada zadanym warunkom początkowym.

Aby rozwiązać równanie 402, należy rozwiązać równanie charakterystyczne powyższego równania różniczkowego. Równanie charakterystyczne otrzymamy podstawiając do równania różniczkowego jedno z jego rozwiązań postaci  $x_i(t) = e^{\alpha t}$ . Łatwo się domyślić, że funkcja wykładnicza spełnia równanie różniczkowe, w którym suma wielokrotności tej funkcji oraz wielokrotności jej drugiej pochodnej musi dać zero (wynika to z faktu, iż kolejne pochodne funkcji wykładniczej są właśnie jej wielokrotnościami). Po podstawieniu otrzymamy:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0 \quad (403)$$

czyli:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (404)$$

Jest to równanie kwadratowe, dla którego  $\delta < 0$ , zatem jego pierwiastki są liczbami zespolonymi:

$$\alpha_1 = i\omega_0 \quad (405)$$

$$\alpha_2 = -i\omega_0 \quad (406)$$

Otrzymaliśmy zatem dwie wartości  $\alpha$ , co nam daje dwa liniowo niezależne rozwiązania szczególne:

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (407)$$

$$x_2(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad (408)$$

Rozwiązanie ogólne równania 402, jako kombinacja liniowa  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  ma postać:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (409)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są dowolnymi stałymi.

Korzystając ze wzorów Eulera:

$$e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t \quad (410)$$

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t \quad (411)$$

otrzymamy rozwiązanie ogólne w postaci trygonometrycznej:

$$x(t) = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t \quad (412)$$

gdzie  $B_1 = C_1 + C_2$  i  $B_2 = C_1 - iC_2$

Zależność prędkości od czasu jest pierwszą pochodną po czasie funkcji  $x(t)$ :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -B_1\omega_0 \sin \omega_0 t + B_2\omega_0 \cos \omega_0 t \quad (413)$$

Do rozwiązania ogólnego podstawiamy warunki początkowe określone w zadaniu (wychylenie i prędkość w chwili  $t = 0$ ), aby wyznaczyć stałe  $B_1$  i  $B_2$  :

$$x(0) = 0 \quad (414)$$

$$v(0) = l\theta \quad (415)$$

i otrzymujemy :

$$x(0) = B_1 \cos \omega_0 0 + B_2 \sin \omega_0 0 = B_1 = 0 \quad (416)$$

$$v(0) = -B_1\omega_0 \sin \omega_0 0 + B_2\omega_0 \cos \omega_0 0 = B_2\omega_0 = l\theta \quad (417)$$

Rozwiązanie szczególne równania 402, czyli zależność wychylenia masy  $m$  z położenia równowagi ma postać:

$$x(t) = \frac{l\theta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (418)$$

Prędkość i przyspieszenie są opisane funkcjami:

$$v(t) = l\theta \cos \omega_0 t \quad (419)$$

$$a(t) = -l\theta\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (420)$$

Zależność wartości energii kinetycznej oscylatora od czasu opisuje funkcja:

$$E_k(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\theta^2 \cos^2 \omega_0 t}{2} \quad (421)$$

4. Cząstka wykonuje drgania harmoniczne, więc jej wychylenie z położenia równowagi opisuje funkcja  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , a prędkość funkcja  $v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . Otrzymujemy więc układ czterech równań dla wychyleń i prędkości w chwilach  $t_1$  i  $t_2$ :

$$x_1 = A \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \quad (422)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) \quad (423)$$

$$v_1 = -A\omega_0 \sin \omega_0 t_1 + \varphi \quad (424)$$

$$v_2 = -A\omega_0 \sin \omega_0 t_2 + \varphi \quad (425)$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymamy:

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \quad (426)$$

$$\frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{A^2\omega_0^2} = 1 \quad (427)$$

więc:

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} \quad (428)$$

$$\omega_0 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2} \quad (429)$$

5. Korzystając z zasady zachowania energii w ruchu harmonicznym prostym 348, możemy zapisać, że

$$E_c = E_k + E_p,$$

co po podstawieniu za energię całkowitą i potencjalną daje wyrażenie

$$\frac{1}{2}kA^2 = E_k + \frac{1}{2}kx^2,$$

gdzie  $A$  jest amplitudą drgań.

Korzystając z relacji podpunktu *a* treści zadania, iż  $E_k = E_p$  sprowadzamy powyższe równanie do postaci

$$\frac{1}{2}kA^2 = 2\frac{1}{2}kx_a^2.$$

Po przekształceniach ostatecznie otrzymujemy odległość od położenia równowagi, przy której energia kinetyczna obiektu jest równa jego energii potencjalnej sprężystości, która wynosi w tym przypadku

$$x_a = \frac{\sqrt{2}}{2}A.$$

Wykonując powyższe kroki dla podpunktu  $b$  zadania powinniśmy uzyskać wyrażenie określające odległość postaci

$$x_b = \frac{A}{2}.$$

6. Sprężyny zostały połączone szeregowo, zatem (patrz zadanie 1) zastępczy współczynnik sprężystości układu wynosi:

$$K = \frac{k}{2} \quad (430)$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona  $F = Ma$ , gdzie  $F$  to siła wypadkowa działająca na ciało,  $a$  to przyspieszenie ciała. Przyspieszenie masy  $M$  jest drugą pochodną wychylenia  $x(t)$  z położenia równowagi po czasie:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (431)$$

Jak widać na rysunku siła wypadkowa jest sumą siły sprężystości i siły oporu:

$$Ma(t) = -M\frac{k}{2}x(t) - bv(t) \quad (432)$$

Oznaczamy  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2M}}$  i  $\Gamma = \frac{b}{m}$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2x(t) = 0 \quad (433)$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego tłumionego. Jest to jednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Rozwiązujemy je tą samą metodą, co w przypadku równania oscylatora harmonicznego prostego czyli tworzymy równanie charakterystyczne:

$$\alpha^2 + \Gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad (434)$$

$$\Delta = \Gamma^2 - 4\omega_0^2 \quad (435)$$

Jak widać, zależnie od wartości stałych  $\Gamma$  i  $\omega_0$  możemy otrzymać  $\Delta < 0$ ,  $\Delta = 0$  lub  $\Delta > 0$ . Wszystkie trzy przypadki należy rozważyć osobno, Jednak w treści zadania podano warunek ( $b^2 < 4Mk$ ), który jest równoważny z  $\Gamma^2 < 4\omega_0^2$ . W takim przypadku  $\Delta < 0$  i mamy dwa rozwiązania równania 435.

$$\alpha_1 = -\frac{\Gamma}{2} + i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (436)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\Gamma}{2} - i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (437)$$

Stosujemy podstawienie  $\omega = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$ , gdzie  $\omega$  jest częstością kołową drgań tłumionych.

Rozwiązanie ogólne równania 433 ma zatem postać:

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}] \quad (438)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są dowolnymi stałymi.

Korzystając ze wzorów Eulera otrzymujemy rozwiązanie ogólne w postaci trygonometrycznej:

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] \quad (439)$$

gdzie  $B_1 = C_1 + C_2$  i  $B_2 = C_1 - iC_2$ .

Zależność prędkości od czasu jest pierwszą pochodną po czasie funkcji  $x(t)$ :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[-B_1\omega \sin \omega t + B_2\omega \cos \omega t] - \frac{\Gamma}{2}te^{-\frac{\Gamma}{2}t}[B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t] \quad (440)$$

Aby wyznaczyć stałe  $B_1$  i  $B_2$ , wprowadzamy warunki początkowe:

$$x(0) = A \quad (441)$$

$$v(0) = 0 \quad (442)$$

i otrzymujemy :

$$x(0) = B_1 = A \quad (443)$$

$$v(0) = B_2\omega - \frac{\Gamma}{2}B_1 = 0 \quad (444)$$

czyli

$$B_2 = \frac{\Gamma A}{2\omega} \quad (445)$$

Rozwiązanie szczególne równania 402, czyli zależność wychylenia masy  $m$  z położenia równowagi ma postać:

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[ A \cos \omega t + \frac{\Gamma A}{2\omega} \sin \omega t \right] \quad (446)$$

7. Odp.

$$g_x = \frac{4\pi^2 + \Lambda_x^2 \Lambda^2}{4\pi^2 + \Lambda^2 \Lambda_x^2} g \quad (447)$$

8. Odp.

$$\Lambda_z = \frac{4\pi^2 m n^2 \Lambda_x^2}{4\pi^2 + (1 - m n^2) \Lambda_x^2} \quad (448)$$

9. Odp. Energia się zmniejsza  $e^{2\Lambda \frac{t}{T}}$  razy.

10. Odp.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (449)$$

Torem ruchu jest zatem elipsa.

11. Odp.

$$T_w = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (450)$$

$$T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad (451)$$

12. Odp.

$$\omega_1 = \alpha + \beta \quad (452)$$

$$\omega_2 = \alpha - \beta \quad (453)$$

$$T_d = \frac{\pi}{\beta} \quad (454)$$

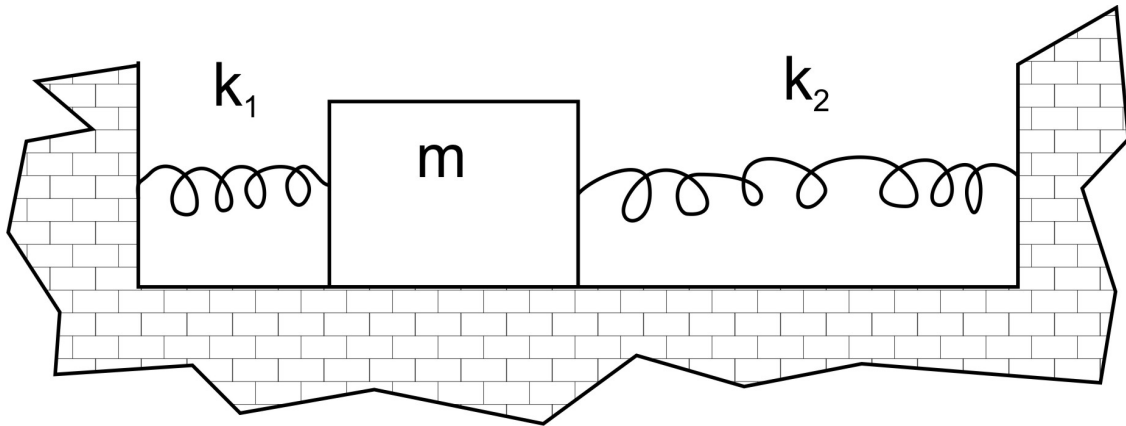
$$(455)$$

$$v(t) = \frac{\pi}{2\beta} \quad (456)$$

13. Z drugiej zasady dynamiki:

$$ma(t) = -k_1 x(t) - k_2 x(t) \quad (457)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)x(t) = 0 \quad (458)$$



Rysunek 54: Rysunek do zadania 11.

powyższe równanie jest równaniem oscylatora harmonicznego o częstotliwości kołowej drgań  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad (459)$$

Współczynnik sprężystości krótszej sprężyny wynosi  $k_1 = 4\pi^2 f^2 m$ .

Dłuższa sprężyna ma współczynnik sprężystości  $k_2 = \frac{k_1}{n}$  (patrz rozwiązanie zadania 1.).

Ponieważ  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , to okres drgań wynosi:

$$T = \frac{f}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad (460)$$

14.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g}{x} - \frac{\Gamma^2}{2}} \quad (461)$$

15. Zależność wychylenia ciała od czasu wynosi  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ .

Średnią energię potencjalną drgań wyznaczamy z definicji wartości średniej:

$$\bar{E}_p = \frac{\int_t^{t+T} \frac{1}{2} k x^2(t) dt}{\int_t^{t+T} dt} \quad (462)$$

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} \frac{\int_t^{t+T} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)(t) dt}{T} \quad (463)$$

$$\bar{E}_p = \frac{m \omega_0^2 A^2}{4} \quad (464)$$



Podobnie wyznaczamy średnią wartość energii kinetycznej:

$$\bar{E}_k = \frac{\int_t^{t+T} \frac{1}{2} m v^2(t) dt}{\int_t^{t+T} dt} \quad (465)$$

Prędkość  $v(t)$  obliczmy jako pochodną  $x(t)$  po czasie:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (466)$$

zatem:

$$\bar{E}_k = \frac{m\omega^2 A^2}{4} \quad (467)$$

Średnia wartość całkowitej energii jest równa sumie średniej energii kinetycznej i średniej energii potencjalnej:

$$\bar{E} = \frac{m(\omega_0^2 + \omega^2) A^2}{4} \quad (468)$$

16.

$$\bar{E}_k = \frac{m\omega^2 A^2}{8} \quad (469)$$

17.

$$v(x) = \sqrt{\frac{(E_2 - E_1)xL + E_1 L^2}{(\rho_2 - \rho_1)x^2 + \rho_1 L^2}} \quad (470)$$

Odp.

$$v\left(\frac{L}{4}\right) = 2\sqrt{\frac{E_2 + 3E_1}{\rho_2 + 15\rho_1}} \quad (471)$$

$$t = \int_0^L \frac{dx}{v} = \frac{2\sqrt{\rho}L}{E_2 - E_1} \quad (472)$$

18.

$$\omega = 2\pi\nu \frac{v^2 + v_n^2}{v^2 - v_n^2} \quad (473)$$

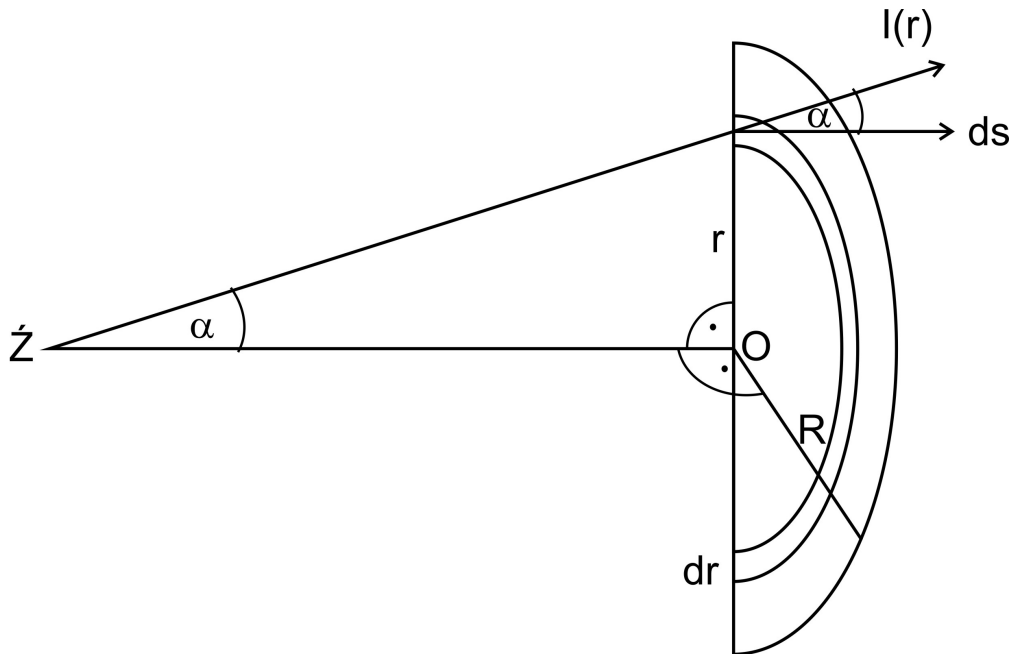
$$\omega_d = 2\pi\nu \frac{4vv_n}{v^2 - v_n^2} \quad (474)$$

19.

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{v}{v + A\omega} \quad (475)$$

lub

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{v}{v - A\omega} \quad (476)$$



Rysunek 55: Rysunek do zadania 19

20.

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S I(r) dS \cos \alpha \quad (477)$$

$$I(r) = I_0 \frac{l^2}{r^2 + l^2} \quad (478)$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \quad (479)$$

$$dS = \pi r dr \quad (480)$$

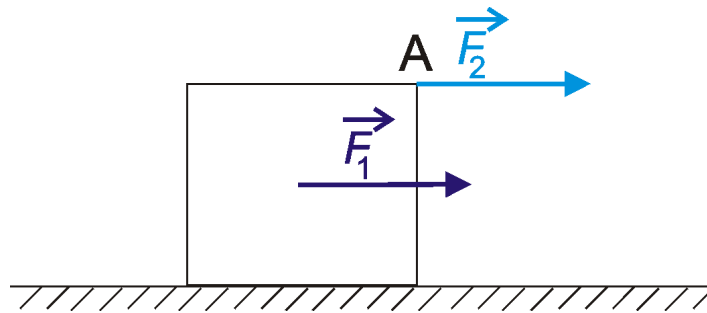
Odp.

$$\Phi = I_0 l^3 \pi \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right) \quad (481)$$

## 7 Materiały dodatkowe

### A Podział wielkości fizycznych.

Wielkości w fizyce dzielimy ze względu na ilość parametrów potrzebnych do ich pełnego opisu. Wyróżniamy przy tym trzy grupy: skalary, wektory oraz tensory. Wielkościami skalarnymi nazywamy takie, do opisu których niezbędna jest jedynie ich wartość. Do tej grupy zaliczamy między innymi masę, czas, długość, objętość i temperaturę. Dla pełnego scharakteryzowania wielkości wektorowych niezbędne jest podanie czterech parametrów: wartości (długości wektora), kierunku (linii, na której leży wektor), zwrotu oraz punktu przyłożenia. Do tej grupy należą np. siła, prędkość, przemieszczenie czy natężenie pola elektrycznego. Znaczenie każdego z tych parametrów zostanie wyjaśnione na przykładzie wektora siły. Wartość przyłożonej do pewnego ciała siły (długość wektora siły) decyduje o wartości przyspieszenia z jakim ono się porusza, natomiast zmiana kierunku tego wektora będzie powodowała zmianę kierunku ruchu ciała. Zwrot wektora siły określa, w którą stronę wzdłuż kierunku ruchu porusza się ciało. Bardzo istotny jest także punkt przyłożenia siły. Przykładowo, takie same co do wartości, kierunku i zwrotu siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  ( $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ ) przyłożone w dwóch różnych punktach ciała (Rys.56) będą powodowały zupełnie inny rodzaj ruchu. Siła  $\vec{F}_1$  przyłożona w środku ciężkości ciała spowoduje ruch postępowy w kierunku siły, natomiast siła  $\vec{F}_2$ , przyłożona w punkcie A, spowoduje obrót tego ciała.



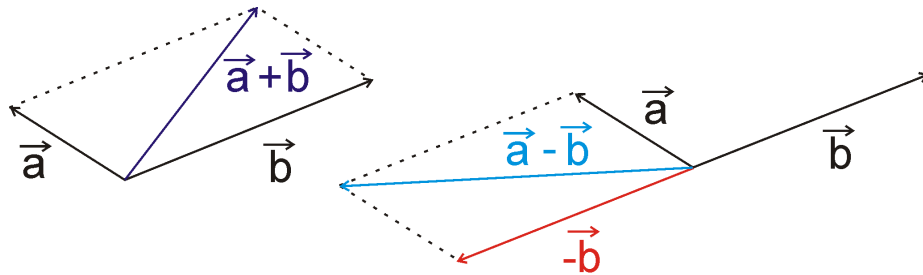
Rysunek 56: Znaczenie punktu przyłożenia wektora.

Tensorowe wielkości fizyczne to takie, których wartość zależy od kierunku bądź położenia w przestrzeni. Przykładem wielkości tensorowej jest współczynnik załamania światła w ośrodkach anizotropowych, którego wartość uzależniona jest od kierunku propagacji fali elektromagnetycznej.

## B Rachunek wektorowy.

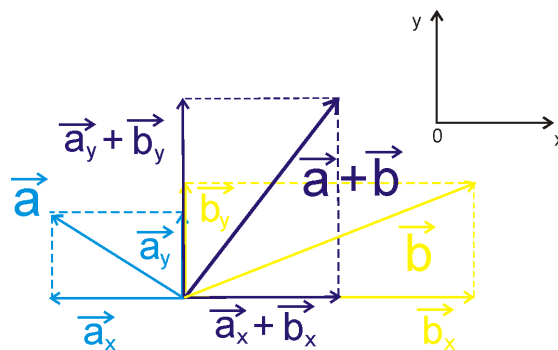
### B.1 Dodawanie wielkości wektorowych.

Dodawanie wektorów różni się od dodawania wielkości skalarnych. Dodając lub odejmując wektory (odejmowanie wektora jest dodawaniem wektora o tej samej wartości i kierunku, ale o przeciwnym zwrocie:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ), a zatem szukając wektora wypadkowego korzystamy z zasady równoległoboku zilustrowanej na rysunku (57). Bardzo często wektora



Rysunek 57: Dodawanie i odejmowanie dwóch wektorów.

wypadkowego poszukujemy rozkładając dodawane wektory na składowe. Na płaszczyźnie będą to np. składowe poziome  $\vec{a}_x$  i  $\vec{b}_x$  oraz pionowe  $\vec{a}_y$  i  $\vec{b}_y$ ). Sumy składowych poziomych i pionowych dodawanych wektorów dają odpowiednio składową poziomą i pionową wektora wypadkowego (rys.58). Jeżeli znamy współrzędne wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  w układzie kartezjańskim



Rysunek 58: Dodawanie wektorów poprzez dodawanie ich składowych.

*xyz*

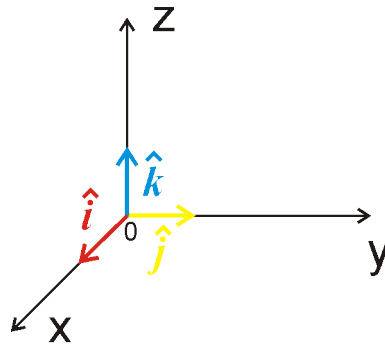
$$\vec{a} = [a_x; a_y; a_z], \vec{b} = [b_x; b_y; b_z] \quad (482)$$

to suma (różnica) tych wektorów może być obliczona jako suma (różnica) odpowiednich współrzędnych

$$\vec{a} \pm \vec{b} = [a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z]. \quad (483)$$

Wektory możemy także zapisywać używając notacji wersorowej. Wersor jest wektorem o jednostkowej długości, wskazującym żądany kierunek w przestrzeni. Wprowadźmy zatem

wersory  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  oraz  $\hat{k}$ , które pokazują odpowiednio dodatni kierunek osi OX, OY i OZ (patrz rys.59). Dowolny wektor  $\vec{a} = [a_x; a_y; a_z]$  możemy teraz zapisać za pomocą wersorów w nastę-



Rysunek 59: Wersory osi OX, OY i OZ.

pujący sposób

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}. \quad (484)$$

Oznacza to, że suma/różnica dowolnych dwóch wektorów będzie wynosiła

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \hat{i} + (a_y \pm b_y) \hat{j} + (a_z \pm b_z) \hat{k}. \quad (485)$$

Znając współrzędne wektora  $\vec{a}$  możemy obliczyć jego długość

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (486)$$

## B.2 Mnożenie wielkości wektorowych.

Rozpatrzmy na wstępie operacją mnożenia wektora  $\vec{a}$  przez dowolną liczbę  $c$ . Otrzymamy w jej wyniku wektor  $c \cdot \vec{a}$  o tym samym kierunku co wektor  $\vec{a}$ , lecz zwrocie zależnym od wartości  $c$ . Gdy  $c > 0$  zwrot otrzymanego wektora jest zgodny z  $\vec{a}$ , natomiast gdy  $c < 0$  - zwroty obu wektorów są przeciwne. Długość (moduł) wektora wynikowego jest  $|c|$  razy większa niż długość wektora  $\vec{a}$ . Wektor  $c \cdot \vec{a}$  możemy zapisać w następujących postaciach

$$c \cdot \vec{a} = [ca_x; ca_y; ca_z] \quad \text{lub} \quad (487)$$

$$c \cdot \vec{a} = ca_x \hat{i} + ca_y \hat{j} + ca_z \hat{k} \quad (488)$$

W wyniku **mnożenia skalarnego** wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  otrzymujemy wielkość skalarną (liczbową) określoną wyrażeniem

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos \alpha, \quad (489)$$

w którym  $a$  jest długością wektora  $\vec{a}$ ,  $b$  długością wektora  $\vec{b}$ , natomiast  $\angle(\vec{a}; \vec{b})$  jest kątem pomiędzy wektorem  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Jeżeli kąt ten oznaczymy przez  $\alpha$ , to kąt pomiędzy wektorem  $\vec{b}$  i  $\vec{a}$  będzie wynosił  $-\alpha$  (Rys.60). Stąd iloczyn skalarny wektora  $\vec{b}$  i wektora  $\vec{a}$  wynosi

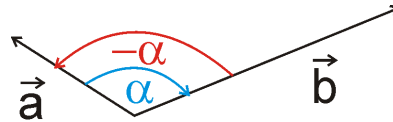
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = b \cdot a \cdot \cos \angle(\vec{b}; \vec{a}) = b \cdot a \cdot \cos(-\alpha) = a \cdot b \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (490)$$

Powyższe równanie wskazuje, że **iloczyn skalarny jest iloczynem przemiennym** (tzn, że  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ), co wynika z parzystości funkcji  $\cos x$ .

Iloczyn skalarny można także zapisać znając współrzędne mnożonych wektorów, bez znajomości kąta między tymi wektorami

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (491)$$

Jedną z wielkości fizycznych definiowanych za pomocą iloczynu skalarnego jest praca  $W$



Rysunek 60: Kąt pomiędzy dwoma wektorami.

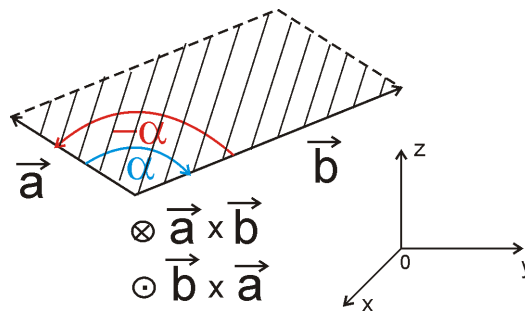
wykonana przez siłę  $\vec{F}$  przy przesunięciu ciała o wektor  $\vec{s}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (492)$$

Jeżeli dowolne wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  **pomnożymy przez siebie wektorowo** ( $\vec{a} \times \vec{b}$ ), to otrzymamy wielkość wektorową równą co do wartości polu powierzchni równoległoboku rozpiętego na tych wektorach (Rys.61)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \angle(\vec{a}; \vec{b}) = a \cdot b \cdot \sin \alpha. \quad (493)$$

Wektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny, na której leżą wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .



Rysunek 61: Graficzne przedstawienie iloczynu wektorowego.

Ponieważ funkcja  $\sin x$  jest funkcją nieparzystą, **iloczyn wektorowy nie jest przemienny**. Oznacza to, że zmiana kolejności mnożonych wektorów skutkuje zmianą zwrotu wektora wynikowego

$$|\vec{b} \times \vec{a}| = b \cdot a \cdot \sin \angle(\vec{b}; \vec{a}) = a \cdot b \cdot \sin -\alpha = -a \cdot b \cdot \sin \alpha = -|\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (494)$$

Zwrot wektora  $\vec{a} \times \vec{b}$  znajdujemy stosując regułę prawej dłoni (śruby prawoskrętnej): „nakładamy” wektor  $\vec{a}$  na  $\vec{b}$  (zaginając 4 palce prawej dłoni); wyciągnięty kciuk wskaże kierunek i

zwrot wektora wynikowego (sprawdzamy czy przy danym kierunku obrotu śruba wkręca się czy odkręca). Np. jeżeli wektory  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  leżą na płaszczyźnie XY (rys.60), to iloczyn  $\vec{a} \times \vec{b}$  ma kierunek osi OZ, ale zwrot przeciwny do niej, natomiast iloczyn  $\vec{b} \times \vec{a}$  ma kierunek i zwrot osi OZ.

Podobnie jak w przypadku iloczynu skalarowego, iloczyn wektorowy możemy znaleźć na podstawie współrzędnych wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , jako wyznacznik następującej macierzy

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

zatem

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}. \quad (495)$$

Przykładem wielkości fizycznej będącej wynikiem iloczynu wektorowego dwóch wektorów jest moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (496)$$

gdzie:  $\vec{M}$  – moment siły,  $\vec{r}$  – promień wodzący przyłożonej do ciała siły,  $\vec{F}$  – przyłożona siła. Jak już wspomniano, iloczyn wektorowy jest nieprzemienne, zatem nie wolno zmienić kolejności mnożenia wektorów  $\vec{r}$  i  $\vec{F}$ .

**Iloczyn diadyczny** dwóch wektorów (którego omawiać nie będziemy) daje wielkość tensorową.

### B.3 Gradient, dywergencja i rotacja.

Wprowadźmy następujący operator

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (497)$$

Operator ten nosi nazwę **nabla** i nabiera znaczenia dopiero gdy działa na jakąś funkcję (skalarną lub wektorową). Działając operatorem  $\nabla$  na funkcję skalarną trzech zmiennych  $f(x,y,z)$  otrzymamy

$$\nabla f = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (498)$$

Wyrażenie  $\nabla f$  nazywamy **gradientem funkcji skalarnej**  $f$  ( $\text{grad} f$ ). Z powyższego równania wynika, że gradient funkcji skalarnej jest wielkością wektorową. Kierunek i zwrot otrzymanego wektora wskazuje kierunek (linię) największego wzrostu wartości funkcji  $f$ , natomiast

długość tego wektora określa szybkość zmian wartości funkcji wzdłuż tego kierunku. Zapiszmy teraz dowolną funkcję wektorową  $\vec{g}$ :

$$\vec{g} = g_x \hat{i} + g_y \hat{j} + g_z \hat{k} \quad (499)$$

Jeżeli operator  $\nabla$  działa na funkcję wektorową  $\vec{g}$ , to w zależności od sposobu działania możemy otrzymać **dywergencję** lub **rotację funkcji wektorowej**  $\vec{g}$  ( $\text{div}\vec{g}$  i  $\text{rot}\vec{g}$ ). Dywergencja wektora „przypomina” mnożenie skalarne operatora  $\nabla$  i funkcji wektorowej  $\vec{g}$

$$\nabla \cdot \vec{g} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (g_x \hat{i} + g_y \hat{j} + g_z \hat{k}) = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \quad (500)$$

Dywergencja pola wektorowego (funkcji wektorowej)  $\vec{g}$  jest wielkością skalarną, która określa zmianę („rozbieżność”) pola wektorowego w otoczeniu danego punktu. Niesie także informacje związane ze źródłami i ujściami pola. Jeśli dywergencja pola wektorowego wynosi zero, to znaczy, że jest ono bezźródłowe.

Rotacją funkcji wektorowej  $\vec{g}$  nazywamy wektor otrzymany w wyniku następującej operacji

$$\nabla \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (501)$$

Z powyższego równania wynika, że rotację pola wektorowego  $\vec{g}$  otrzymuje się w podobny sposób jak iloczyn wektorowy dwóch wektorów. Rotacja pola wektorowego jest miarą jego wirowości. Jeśli rotacja pola wektorowego jest równa zero, to jest ono bezwirowe.

## C Operator Laplace’a

Gradient funkcji skalarnej  $f$  jest wektorem, możemy zatem obliczyć jego dywergencję

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f. \end{aligned} \quad (502)$$

Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (503)$$

nazywamy operatorem Laplace’a i oznaczamy symbolem  $\Delta$  lub  $\nabla^2$ . Z powyższych równań wynika, że dywergencja gradientu funkcji skalarnej  $f$  ( $\Delta f$ ) jest wielkością skalarną i nosi nazwę **laplasjanu funkcji**  $f$ . Wielkość ta jest niezwykle istotna i pojawia się w wielu równaniach fizycznych związanych z elektrodynamiką, mechaniką kwantową czy zagadnieniem przepływu ciepła.



## D Twierdzenia całkowe

Twierdzenie dla gradientów

$$\int_a^b (\nabla f) d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

Twierdzenie Gaussa (tw. dla dywergencji)

$$\int (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Twierdzenie Stokesa (tw. dla rotacji)

$$\oint (\nabla \times \vec{A}) d\vec{S} = \oint \vec{A} d\vec{l}$$