

SPIS TREŚCI

1. STATYKA

- 1.1 Wprowadzenie
- 1.2 Pojęcia podstawowe. Aksjomaty statyki
 - 1.2.1 Pojęcia pierwotne
 - 1.2.2 Siła jako wektor
 - 1.2.3 Dwójka zerowa
 - 1.2.4 Twierdzenie o przesuwaniu siły wzdłuż prostej działania
 - 1.2.5 Wypadkowa dwóch sił nierównoległych na płaszczyźnie
 - 1.2.6 Rozkład siły na dwie składowe o danych kierunkach działania
 - 1.2.7 Zasada akcji i reakcji
 - 1.2.8 Rodzaje więzów
 - 1.2.8.1 Więzy o jednej niewiadomej podporowej
 - 1.2.8.2 Więzy o dwóch niewiadomych podporowych
 - 1.2.8.3 Więzy o trzech niewiadomych podporowych
- 1.3 Równowaga zbieżnego układu sił.
 - 1.3.1 Układy sił
 - 1.3.2 Analityczna reprezentacja siły
 - 1.3.3 Wektor główny
 - 1.3.4 Warunki równowagi zbieżnego układu sił
 - 1.3.5 Twierdzenie o trzech siłach
- 1.4 Para sił. Moment pary sił
 - 1.4.1 Składanie dwóch sił równoległych
 - 1.4.2 Para sił. Moment pary sił
 - 1.4.3 Twierdzenia o parach sił
 - 1.4.4 Składanie par sił w jednej płaszczyźnie
- 1.5 Moment siły względem punktu i osi
 - 1.5.1 Moment siły względem punktu (bieguna)
 - 1.5.2 Moment siły względem osi
 - 1.5.3 Twierdzenie o równoległym przesuwaniu siły
- 1.6 Równowaga płaskiego dowolnego układu sił
 - 1.6.1 Redukcja płaskiego dowolnego układu sił
 - 1.6.2 Przypadki redukcji płaskiego dowolnego układu sił
 - 1.6.3 Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił
- 1.7 Równowaga przestrzennego dowolnego układu sił
 - 1.7.1 Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił
 - 1.7.2 Przypadki redukcji przestrzennego dowolnego układu sił
 - 1.7.3 Warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił
- 1.8 Środki ciężkości
 - 1.8.1 Środek sił równoległych
 - 1.8.2 Środek ciężkości brył, figur płaskich, linii
- 1.9 Tarcie
 - 1.9.1 Tarcie statyczne. Siła tarcia statycznego
 - 1.9.2 Tarcie kinetyczne
 - 1.9.3 Tarcie ciągnięcia
 - 1.9.4 Tarcie toczenia
- 1.10 Pytania do rozdziału 1

2. WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW

- 2.1 Wiadomości wstępne

- 2.1.1 Podstawowe założenia i hipotezy wytrzymałościowe
- 2.1.2 Rodzaje obciążeń
- 2.1.3 Odkształcenia
 - 2.1.3.1 Odkształcenia czysto objętościowe
 - 2.1.3.2 Odkształcenia czysto postaciowe
- 2.1.4 Naprężenia
- 2.1.5 Elementy teorii sprężystości
 - 2.1.5.1 Cechy sprężystości materiału
 - 2.1.5.2 Cechy wytrzymałości materiału
- 2.1.6 Podział obciążeń. Zasada de Saint-Venanta
- 2.2 Podstawy projektowania konstrukcji
 - 2.2.1 Uwagi ogólne o doborze materiałów konstrukcyjnych
 - 2.2.2 Zasady ogólne obliczeń konstrukcyjnych
- 2.3 Momenty bezwładności figur
- 2.4 Rozciąganie i ściskanie prętów prostych
 - 2.4.1 Założenia podstawowe
 - 2.4.2 Naprężenia dopuszczalne
- 2.5 Ścinanie technologiczne
- 2.6 Skręcanie prętów kołowych
 - 2.6.1 Wyznaczanie momentu skręcającego
 - 2.6.2 Naprężenia i odkształcenia skręcanego pręta o przekroju kołowym
- 2.7 Zginanie belek
 - 2.7.1 Naprężenia w pręcie zginanym
 - 2.7.2 Analiza pręta prostego przy czystym zginaniu
 - 2.7.3 Wyznaczanie linii ugięcia belki
- 2.8 Wytrzymałość złożona pręta
 - 2.8.1 Zarys hipotez wytrzymałościowych
 - 2.8.2 Zginanie z rozciąganiem lub ścisaniem
 - 2.8.3 Zginanie ze skręcaniem
- 2.9 Wytrzymałość zmęczeniowa
 - 2.9.1 Podstawowe pojęcia wytrzymałości zmęczeniowej
 - 2.9.2 Wytrzymałość zmęczeniowa przy cyklach symetrycznych i niesymetrycznych
 - 2.9.3 Czynniki wpływające na zmianę wytrzymałości zmęczeniowej
 - 2.9.3.1 Wpływ kształtu przedmiotu
 - 2.9.3.2 Wpływ działania karbu
 - 2.9.3.3 Wpływ wrażliwości materiału na działanie karbu
 - 2.9.3.4 Wpływ stanu powierzchni
 - 2.9.3.5 Wpływ wielkości przedmiotu
 - 2.9.4 Wyznaczanie rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa
 - 2.9.4.1 Cykl symetryczny
 - 2.9.4.2 Cykl niesymetryczny
- 2.10 Elementy mechaniki pękania
- 2.11 Pytania do rozdziału 2
- Bibliografia

OD AUTORÓW

Niniejszy skrypt obejmuje wybrane zagadnienia z zakresu mechaniki ciała stałego wykładane dla studentów I roku Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej w ramach przedmiotu Mechanika Ciała Stałego. Celem tego wykładu jest zapoznanie studentów z podstawami statyki ciała stałego, wytrzymałości materiałów oraz analizy zmęczeniowej, tak, aby student był w stanie samodzielnie rozwiązywać proste zagadnienia związane z konstruowaniem oraz analizą obciążeń, odkształceń i naprężeń elementów maszyn i urządzeń elektroenergetycznych.

Jest rzeczą naturalną, że nie można wnieść istotnych nowości naukowych do materiału obejmującego zakres wiedzy powszechnie znany wśród mechaników. Na rynku księgarskim istnieje znaczna liczba skryptów uczelnianych oraz podręczników akademickich traktujących zagadnienia omawiane w niniejszym skrypcie w bardzo szerokim zakresie. Materiał prezentowany w tych skryptach i podręcznikach jest bardzo szeroki, ponieważ są to wydawnictwa skierowane głównie do studentów wydziałów mechanicznych politechnik. Zapoznanie się z materiałem, który na wydziałach mechanicznych jest wykładany z reguły przez 3-4 semestry nastęcza studentom Wydziału Elektrotechniki i Automatyki wielu trudności. Polegają one głównie na prawidłowym wyborze właściwego materiału z natłoku informacji zawartych w wyżej omawianych opracowaniach. Stąd też podstawowym celem skryptu było wybranie i usystematyzowanie podstawowych informacji, twierdzeń oraz reguł, które są przydatne przy samodzielnej analizie zagadnień dotyczących mechaniki ciała stałego. Podane na końcu każdej części skryptu pytania teoretyczne posłużą studentowi do samodzielnego sprawdzenia przyswojenia sobie zagadnień teoretycznych. Jednocześnie w skrypcie na konkretnych przykładach przedstawiona została metodyka rozwiązywania zadań, jak również zamieszczone zostały zadania do samodzielnego rozwiązania, dzięki czemu student może na bieżąco sprawdzać swoje umiejętności praktyczne.

Elementami nowości w rozumieniu autorów skryptu jest połączenie i usystematyzowanie w jednej całości wybranych elementów wiedzy dotyczącej statyki ciała stałego, wytrzymałości i zmęczenia materiałów, w formie przystępnej i przydatnej dla studentów Wydziału Elektrotechniki i Automatyki. Materiał teoretyczny został bogato zilustrowany przykładami praktycznymi, jak również uzupełniony elementami dostępnymi jedynie w tablicach materiałowych i polskich normach. Tak, więc autorzy mają nadzieję, że w jednej całości zawarte zostały informacje, które z reguły student musiałby poszukiwać w różnych źródłach.

Autorzy

1 STATYKA

1.1 WPROWADZENIE

Mechanika jest działem fizyki zajmującym się badaniem ruchu ciał materialnych i przyczynami powstawania tych zjawisk. Ponieważ ruch jest najprostszym i najłatwiejszym do zaobserwowania zjawiskiem w przyrodzie, mechanika rozwinęła się najwcześniej ze wszystkich działów fizyki i dopiero na podstawie otrzymanych przez nią wyników nastąpił rozwój pozostałych działów tej nauki.

Mechanika ogólna, zwana również mechaniką teoretyczną lub techniczną (w ogólnym znaczeniu), to całość tych działów mechaniki, w których mają zastosowanie prawa Newtona. Mechanika ogólna jest, więc podstawową dyscypliną do badania stanu równowagi ciała doskonale sztywnego (nieodkształcalnego). Mechaniką ciał stałych odkształcalnych zajmują się takie działy mechaniki technicznej jak: wytrzymałość materiałów, teoria sprężystości, teoria plastyczności czy też reologia. Podobnie badaniom ruchów cieczy i gazów zajmuje się mechanika płynów, która w ramach hydromechaniki zajmuje się badaniem ruchu cieczy, a w ramach aeromechaniki badaniem ruchu gazów.

Mechanika techniczna, (w ściślejszym znaczeniu) to zbiór zagadnień z mechaniki ciał i punktów materialnych przystosowany dla potrzeb techniki. Mechanika techniczna składa się z trzech działów. Pierwszy obejmuje statykę, drugi kinematykę, trzeci dynamikę. Statyka zajmuje się przekształcaniem oraz równowagą układów sił, kinematyka zajmuje się ruchem ciał materialnych niezależnie od przyczyn, które go wywołują, a dynamika rozpatruje zachowanie się ciał materialnych w zależności od działających na nie sił.

Początki rozwoju mechaniki jako nauki ścisłej sięgają czasów starożytnego Babilonu, Grecji i Egiptu. Pierwsze naukowe podstawy mechaniki zawdzięczamy uczonym greckim, w szczególności *Arystotelesowi (384-322 p.n.e.)* który zajmował się zagadnieniami maszyn prostych stosowanych w technice uzbrojenia i budownictwie. Podstawy mechaniki opracował *Archimedes (287-212 p.n.e.)* określając prawa składania i rozkładania sił równoległych, teorię dźwigni oraz wyznaczając środki geometryczne różnych figur geometrycznych i brył. Po okresie gwałtownego rozwoju mechaniki nastąpił zastój aż do czasów *Leonardo da Vinci (1452-1519)* który zajmował się między innymi zagadnieniami dotyczącymi równi pochyłej, tarcia i bloków. Sformułował prawa równoległoboku i wprowadził pojęcie momentu siły. W tym samym czasie fundamentalny wkład w rozwój mechaniki włożyli: *Mikołaj Kopernik (1473-1543)* wykładając w dziele "*De Revolutionibus Orbium Coelestrium*" zasady równoważności ruchów względnych w układzie heliocentrycznym, *Galileo Galilei (Galileusz) (1564-1642)* wprowadzając pojęcie przyspieszenia, opracowując prawo bezwładności, prawa ruchu w polu ciężkości, zasady zachowania pracy w maszynach prostych, rozwiązując problem wahadła, *Johan Kepler (1571-1630)* formując trzy prawa ruchu planet, *Descarte Rene (Kartezjusz) (1596-1650)* wprowadzając prostokątny układ osi współrzędnych, zasadę prac wirtualnych i rozwiązania rachunkowe zagadnień statycznych oraz *Christian Huygenes (1629-1695)* wprowadzając określenie pojęcia reakcji, przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym oraz uderzenia sprężystego oraz opracowując teorię wahadła fizycznego i rewersyjnego. Przełom w rozwoju mechaniki klasycznej nastąpił wraz z ogłoszeniem przez *Isaaca Newtona (1642-1727)* epokowego dzieła "*Philosophiae naturalis principia mathematica*", wydanego w 1687r. w Londynie, i dającego podstawy mechaniki opartej ściśle na faktach doświadczalnych. Za najważniejsze odkrycie Newtona uważa się sformułowanie prawa powszechnego ciążenia i zasad klasycznej dynamiki. Również inni

uczni współcześni Newtonowi zapisali się w historii mechaniki: *Pierre Varigon (1654-1722)* zakończył opracowywanie zasad statyki, *Jan Bernoulli (1667-1748)* wprowadził pojęcie energii kinetycznej i metody jej zastosowania. W późniejszych latach istotny wkład w rozwój różnych dziedzin mechaniki wnieśli: *Michał Lomonosow (1711-1765)* sformułował zasady zachowania masy, *Leonard Euler (1701-1783)* wprowadził analityczne metody rozwiązania zagadnień ruchu, mechaniki ciała sztywnego, obrotu ciała sztywnego wokół punktu nieruchomego itp., *Jean D'Alambert (1717-1783)* odniósł prawa statyki do dynamiki, *Ludwig Lagrange (1737-1813)* stworzył podstawy mechaniki analitycznej, *Pierre Laplace (1743-1827)* zajmował się mechaniką ciał niebieskich, *Michał Ostrogradzki (1801-1861)* i *Wiliam Hamilton (1805-1865)* stworzyli zasady rachunku wariacyjnego szeroko stosowanego w różnych zagadnieniach mechaniki.

Na przełomie XIX i XX wieku okazało się, że mechanika newtonowska (mechanika klasyczna) jest przybliżeniem słusznym w przypadkach niezbyt wielkich prędkości. Mimo to nie utraciła ona nic ze swego znaczenia i aktualności, pozostając nadal podstawą nauk fizycznych oraz technicznych nauk stosowanych.

1.2 POJĘCIA PIERWOTNE. AKSJOMATY STATYKI

1.2.1 Pojęcia pierwotne

Mechanika ogólna operuje szeregiem pojęć, których nie można zdefiniować. Pojęcia te nazywamy pojęciami pierwotnymi. Współczesna nauka zakłada, że wielkość fizyczną można uznać za zdefiniowaną, jeżeli istnieje metoda jej pomiaru.

- **Sila.** Siły zdefiniować nie możemy, ale możemy ją zmierzyć poprzez pomiar skutków jej działania (nadanie ciału przyspieszenia, lub w przypadku ciał odkształcalnych – jego deformację). Dla celów praktycznych „definiujemy” siłę jako oddziaływanie jednego ciała na drugie. Oddziaływanie takie może być realizowane na drodze bezpośredniego kontaktu tych ciał, lub na odległość (siły grawitacji, magnetyczne, elektrostatyczne itp.).
- **Czas.** Każdy intuicyjnie „wyczuwa” pojęcie czasu, ale jego ścisłej definicji podać nie można. Oczywiście znamy doskonale przyrządy do precyzyjnego pomiaru czasu.
- **Przestrzeń.** Pojęcia przestrzeni zdefiniować nie potrafimy aczkolwiek potrafimy zmierzyć objętość pewnej zamkniętej przestrzeni.

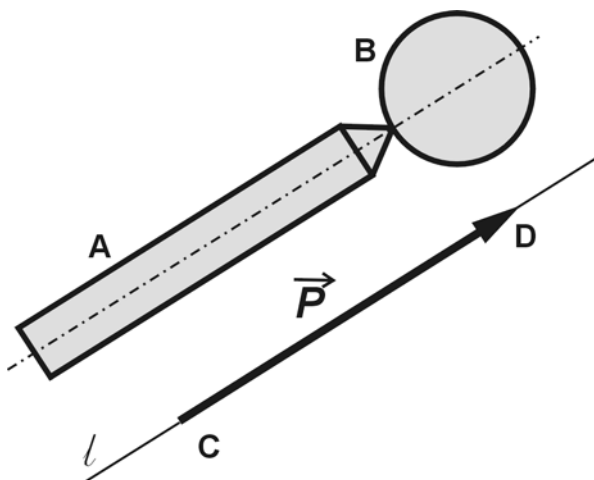
Oprócz podanych powyżej pojęć podstawowych wprowadza się szereg definicji pojęć powszechnie stosowane w mechanice.

- **Punkt materialny.** Jest to punkt geometryczny (o nieskończenie małych wymiarach), który ma pewną skończoną masę.
- **Ciało sztywne (nieodkształcalne).** Jest to ciało materialne, w którym wzajemne odległości cząstek nie ulegają zmianie pod wpływem działających na nie sił. W rzeczywistości wszystkie ciała są odkształcalne. Założenie takie przyjęto dla celów statyki.
- **Bryła.** Jest to sztywne ciało materialne.
- **Bryła swobodna.** Jest to bryła, która może zajmować dowolne położenie w przestrzeni.
- **Układ sił.** Zbiór sił przyłożonych w jednym lub w kilku punktach bryły.

1.2.2 Siła jako wektor

Siła jest wektorem charakteryzującym miarę mechanicznego oddziaływania ciał. Na rys.1.1 widzimy, że bryła *A* (pręt), działa na bryłę *B* (kulę). Wektor siły, \vec{P} jest położony na prostej działania

(l), ma zwrot (strzałkę), wartość (wartość siły przedstawiona jest odcinkiem CD), punkt przyłożenia siły (D) i punkt zaczepienia siły (C).



Rys. 1.1 Reprezentacja wektorowa siły

Aksjomat 1. Siła działająca na bryłę sztywną jest wektorem związanym z prostą.

Wszystkie siły przyłożone do poszczególnych brył lub punktów materialnych układu możemy podzielić na:

- *Siły zewnętrzne.* Są to siły przyłożone do poszczególnych brył układu, pochodzące od brył nie wchodzących w skład rozpatrywanego układu. Wśród sił zewnętrznych można wyróżnić siły czynne (powodujące ruch brył) oraz reakcje, czyli siły pochodzące od brył zewnętrznych będących więzami (ograniczeniami ruchu).
- *Siły wewnętrzne.* Są to siły, z jakimi oddziałują na siebie bryły lub punkty materialne, wchodzące w skład danego układu.

Biorąc pod uwagę sposób przyłożenia siły do ciała możemy wyróżnić:

- *Siły skupione.* Jest to pojęcie fikcyjne, gdyż takie siły nie istnieją w rzeczywistości. Przyjęcie jej jest jednak bardzo wygodne przy modelowaniu rzeczywistych obiektów.
- *Siły liniowe.* Podobnie jak siła skupiona, jest pojęciem fikcyjnym. Przykładem siły liniowej może być siła ciężkości cienkiego drutu lub pręta, którego wymiary poprzeczne pomijamy w stosunku do długości.
- *Siły powierzchniowe.* Przykładem siły powierzchniowej jest ciśnienie gazu lub cieczy na ścianki naczynia.
- *Siły objętościowe.* Przykładem siły objętościowej jest siła grawitacji, siła magnetyczna lub elektrostatyczna.

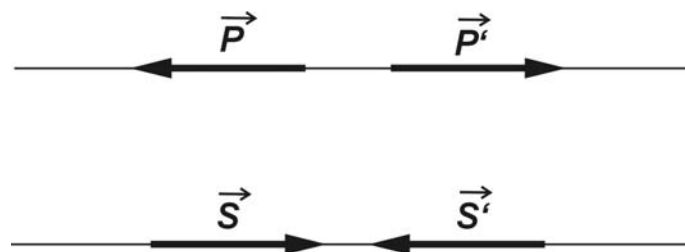
Jeżeli rozpatrujemy jedną bryłę, to wszystkie siły, z jakimi działają na tę rozpatrywaną bryłę ciała otaczające, są siłami zewnętrznymi. Siłami wewnętrznymi będą wtedy siły, z jakimi działają na siebie poszczególne punkty bryły. Siły działające między punktami w układzie punktów materialnych tworzą układ sił wewnętrznych. Pod działaniem układu sił wewnętrznych punkty materialne mogą się przemieszczać. Jedynie w układach sztywnych przemieszczenia są zerowe. W zależności od rozpatrywanego układu materialnego siły wewnętrzne mogą być rozpatrywane jako reakcje. Reakcja jest siłą, która zastępuje działanie połączeń (wielow).

Poniżej podane są określenia związane z pojęciem siły.

- **Układy równoważne.** Są to takie układy sił, że każdy z nich przyłożony osobno do ciała sztywnego wywiera takie same skutki.
- **Siła wypadkowa.** Jest to układ równoważny, złożony tylko z jednej siły, który zastępuje dany układ sił.
- **Siły składowe.** Są to siły działające w danym układzie.
- **Składanie sił.** Jest to wyznaczanie siły wypadkowej układu sił lub innego prostszego układu.
- **Układ sił zrównoważonych.** Jest to taki układ sił, który przyłożony do bryły swobodnej nie zmienia jej położenia.

1.2.3 Dwójka zerowa

Dwójką zerową nazywamy dwie siły (\vec{P}, \vec{P}') lub (\vec{S}, \vec{S}'), przyłożone do ciała sztywnego lub punktu materialnego, działające wzdłuż tej samej prostej o równych wartościach liczbowych i przeciwnych zwrotach (rys.1.2). Jest to najprostszyszy układ sił zrównoważonych.

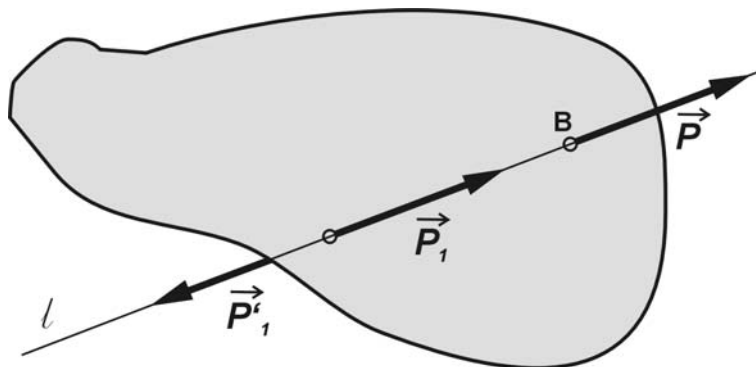


Rys. 1.2 Dwójka zerowa

Aksjomat 2. Do każdego układu sił działających na bryłę sztywną można dodać lub odjąć układ sił zrównoważonych, nie zmieniając stanu ruchowego bryły.

1.2.4 Twierdzenie o przesuwaniu siły wzdłuż prostej działania

Niech na bryłę działa siła \vec{P} przyłożona w punkcie B (rys.1.3), w punkcie A przyłożono dodatkowo dwójkę zerową, złożoną z sił \vec{P}_1 i \vec{P}'_1 . W rezultacie powstał układ trzech sił $\vec{P}, \vec{P}_1, \vec{P}'_1$. Następnie od układu trzech sił odjęto dwójkę zerową, złożoną z siły \vec{P} przyłożonej w punkcie B i siły \vec{P}'_1 przyłożonej w punkcie A , tak, że ostatecznie pozostała siła \vec{P}_1 . Na podstawie powyższych rozważań można sformułować następujący aksjomat.

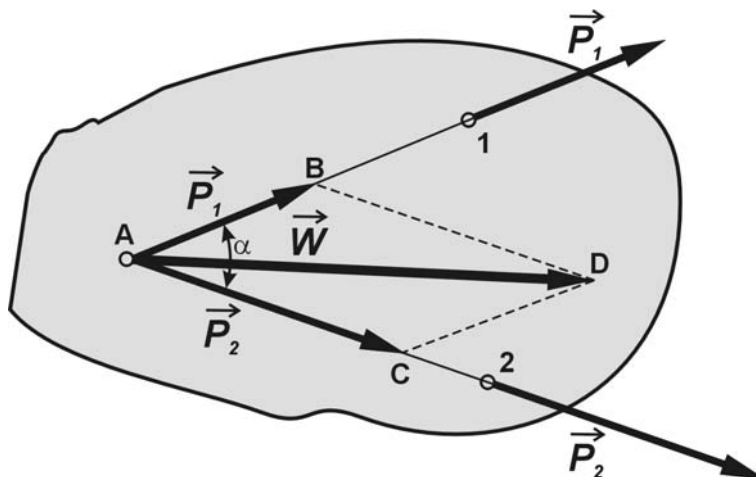


Rys. 1.3 Ilustracja zasady przesuwania siły wzdłuż prostej

Aksjomat 3. Nie naruszając równowagi bryły sztywnej możemy punkt zaczepienia siły przenieść dowolnie wzdłuż prostej działania tej siły.

1.2.5 Wypadkowa dwóch sił nierównoległych na płaszczyźnie

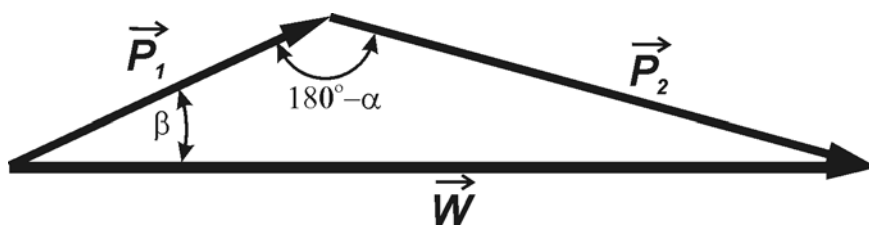
Na rys.1.4 przedstawione są dwie siły, których proste działania przecinają się. Siły te można przesunąć do punktu A przecięcia się prostych działania tych sił i złożyć je, budując równoległobok sił $ABDC$. Przekątna równoległoboku, jest siłą wypadkową \vec{W} , sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 .



Rys. 1.4 Wypadkowa dwóch sił nierównoległych

Wartość liczbową siły wypadkowej można obliczyć z trójkąta sił pokazanego na rys.5. Ponieważ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, na podstawie twierdzenia cosinusów (twierdzenie Carnota) otrzymujemy:

$$|\vec{W}| = \sqrt{|\vec{P}_1|^2 + |\vec{P}_2|^2 + 2|\vec{P}_1||\vec{P}_2|\cos \alpha} \quad (1.1)$$



Rys. 1.5 Trójkąt sił do wyznaczenia siły wypadkowej

Prostą działania wypadkowej możemy określić za pomocą jednego z kątów, jakie tworzy ona z prostymi działaniami sił składowych (rys.1.5). Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\sin \beta = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{W}|} \sin \alpha \quad (1.2)$$

Aksjomat 4. Moduł i prostą działania siły wypadkowej dwóch sił nierównoległych działających na ciało sztywne określa przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach sił składowych.

W szczególnych przypadkach mamy:

- Gdy $\alpha = 90^\circ$ czyli siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 są wzajemnie prostopadłe to:

$$|\vec{W}| = \sqrt{|\vec{P}_1|^2 + |\vec{P}_2|^2}$$

$$\sin \beta = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{W}|}$$
(1.3)

- Gdy $\alpha = 0^\circ$ czyli siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 są równoległe i mają te same zwroty to:

$$|\vec{W}| = |\vec{P}_1| + |\vec{P}_2|$$
(1.4)

Aksjomat 5. Wypadkowa dwóch sił mających te same proste działania i zwroty, ma wartość równą sumie wartości sił składowych i jest zwrócona w tę samą stronę, co siły składowe.

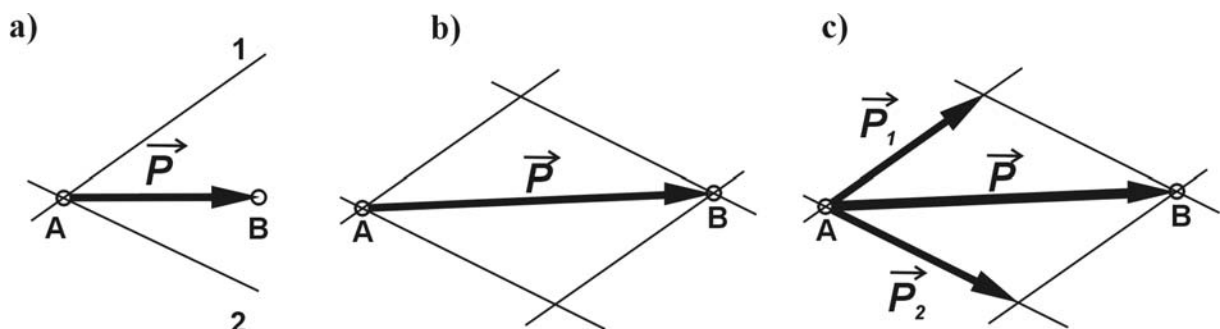
- Gdy $\alpha = 180^\circ$ czyli siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 są równoległe i mają przeciwne zwroty to:

$$|\vec{W}| = \left| |\vec{P}_1| - |\vec{P}_2| \right|$$
(1.5)

Aksjomat 6. Wypadkowa dwóch sił mających takie same proste działania, a przeciwne zwroty, jest równa różnicy ich wartości, a zwrot jej jest taki jak większej siły składowej. W szczególności, jeśli obie siły mają jednakowe wartości i proste działania, a przeciwne zwroty, ich siła wypadkowa jest równa zeru.

1.2.6 Rozkład siły na dwie składowe o danych kierunkach działania

Rozłożmy siłę \vec{P} na dwie proste działania 1 i 2 (rys.1.6.a). W tym celu przez początek A i koniec B siły \vec{P} prowadzimy równoległe do prostych 1 i 2 (rys.1.6.b-c). W wyniku tego otrzymujemy równoległobok zbudowany na siłach \vec{P}_1 i \vec{P}_2 , o kierunkach 1 i 2, przy czym siły te spełniają warunek: $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$.

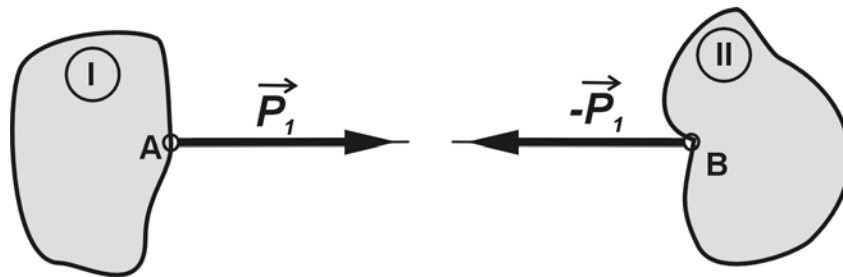


Rys. 1.6 Rozkład siły na dwie składowe

Aksjomat 7. Dowolna siła działająca na bryłę sztywną może być zastąpiona układem sił zaczepionych w punkcie przyłożenia siły.

1.2.7 Zasada akcji i reakcji

Na rys.1.7 przedstawiono zasadę akcji i reakcji (trzecie prawo dynamiki Newtona) określającą wzajemne oddziaływanie brył sztywnych.



Rys. 1.7 Zasada akcji i reakcji

Aksjomat 8. Jeżeli ciało I działa na ciało II siłą \vec{P}_1 , to ciało II oddziałuje na ciało I taką samą, co do modułu i kierunku siłą $-\vec{P}_1$, zwróconą przeciwnie

1.2.8 Rodzaje więzów

W statyce często rozpatrujemy równowagę brył nieswobodnych, tzn. takich, które nie mogą zajmować dowolnego miejsca w przestrzeni. Swobodę takich brył ograniczają połączenia z innymi bryłami. Połączenia te nazywamy więzami.

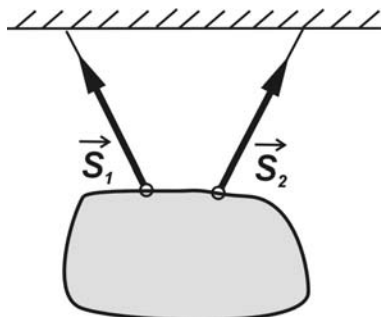
Aksjomat 9. Każde ciało nieswobodne możemy uważać za swobodne, jeżeli zamiast więzów przyłożymy do niego reakcje wywołane przez te więzy.

Należy pamiętać, że jeżeli oswobodzimy określoną bryłę układu, to należy rozpatrywać tylko układ sił czynnych przyłożony do tej bryły, oraz układ reakcji, to jest sił, z jakimi więzy (to znaczy sąsiednie bryły) oddziałują na daną bryłę.

Poniżej przedstawiono podział więzów na grupy, a na rysunkach sposób zastępowania ich siłami reakcji.

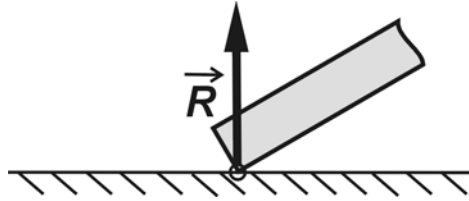
1.2.8.1 Więzy o jednej niewiadomej podporowej

- **Cięgna.** Prosta działania reakcji (\vec{S}_1, \vec{S}_2) jest znana i pokrywa się z kierunkiem cięgna (rys.1.8). Przykładem tego rodzaju więzów są liny, łańcuchy, pręty.



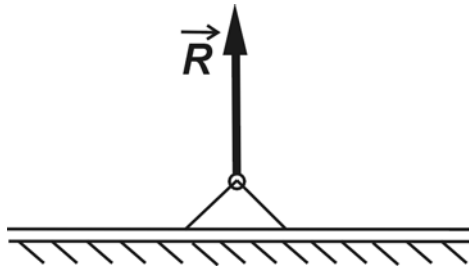
Rys. 1.8 Reakcje więzów cięgien.

- **Podpory gładkie.** Prosta działania reakcji \vec{R} jest prostopadła do powierzchni podparcia (rys.1.9). Przykładem tego rodzaju więzów jest idealnie gładka powierzchnia.



Rys. 1.9 Reakcja więzów w podporze gładkiej.

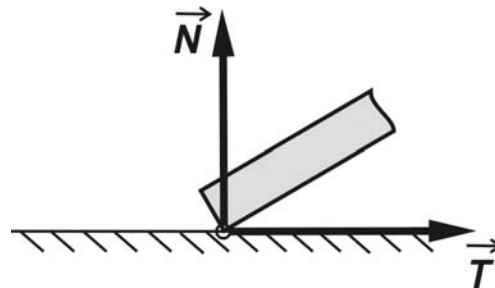
- **Podpory przegubowe ruchome.** Prosta działania reakcji \vec{R} jest prostopadła do kierunku możliwego ruchu (rys.1.10). Przykładem tego rodzaju więzów są połączenia ślizgowe bez tarcia (idealnie gładkie powierzchnie).



Rys. 1.10 Reakcja więzów w podporze przegubowej ruchomej.

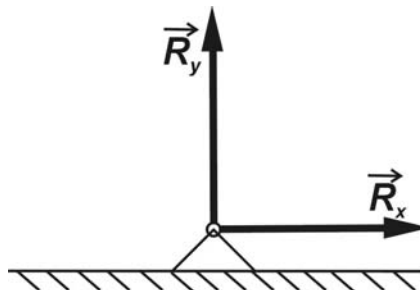
1.2.8.2 Więzy o dwóch niewiadomych podporowych

- **Podpory chropowate.** Prosta działania reakcji jest nieznana. Wprowadza się dwie składowe reakcji: normalną do powierzchni \vec{N} i styczną siłę tarcia \vec{T} (rys.1.11). Przykładem tego rodzaju więzów jest każda rzeczywista powierzchnia.



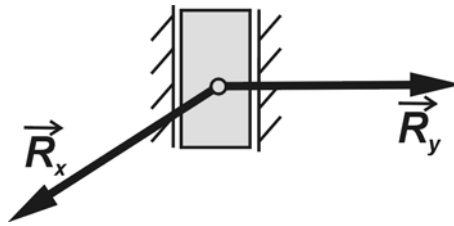
Rys. 1.11 Reakcje więzów w podporze chropowatej.

- **Podpory przegubowe stałe.** Prosta działania reakcji \vec{R} przegubu jest nieznana. Reakcję rozkłada się na dwie niezależne składowe \vec{R}_x i \vec{R}_y (rys.1.12). Przykładem tego rodzaju więzów są połączenia przegubowe.



Rys. 1.12 Reakcje więzów w podporze przegubowej stałej.

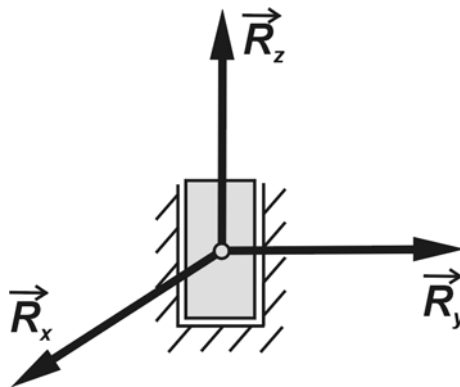
- **Przeguby walcowe.** Prosta działania reakcji przegubu \vec{R} jest nieznaną. Reakcja rozkłada się na dwie niezależne składowe \vec{R}_x i \vec{R}_y (rys.1.13). Przykładem tego rodzaju więzów jest łożysko ślizgowe.



Rys. 1.13 Reakcje więzów w przegubie walcowym.

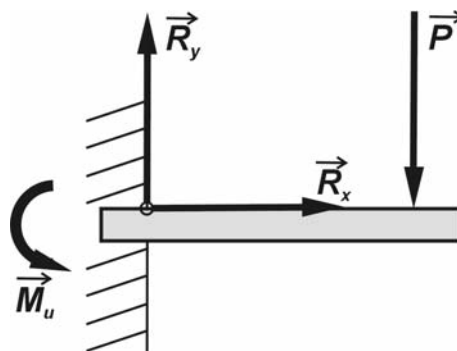
1.2.8.3 Więzy o trzech niewiadomych podporowych

- **Przeguby kuliste.** Prosta działania reakcji przegubu \vec{R} jest nieznaną. Reakcja rozkłada się na trzy niezależne składowe \vec{R}_x , \vec{R}_y , \vec{R}_z (rys.1.13). Przykładem tego rodzaju więzów jest przegub.



Rys. 1.14 Reakcje więzów w podporze przegubowej kulistej.

- **Utwardzenie.** Prosta działania reakcji jest nieznaną. W przypadku utwardzenia oprócz siły reakcji \vec{R} rozłożonej na dwie składowe \vec{R}_x i \vec{R}_y należy przyłożyć tzw. moment utwardzenia \vec{M}_u (rys.1.15). Przykładem tego rodzaju więzów jest ściana z zamurowaną belką.



Rys. 1.15 Reakcje więzów w utwardzeniu.

1.3 RÓWNOWAGA ZBIEŻNEGO UKŁADU SIŁ

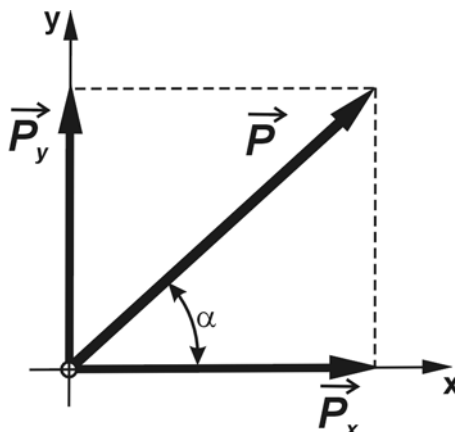
1.3.1 Układy sił

Układem sił nazywamy zbiór sił przyłożonych w jednym lub w kilku punktach bryły. Wyróżniamy następujące układy sił:

- **Zbieżny układ sił (płaski lub przestrzenny).** Jest to układ, w którym proste działania sił przecinają się w jednym punkcie. Taki układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową.
- **Dowolny układ sił (płaski lub przestrzenny).** Jest to układ, w którym proste działania sił są dowolnie położone względem siebie tzn. nie przecinają się w jednym punkcie. Taki układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową i wypadkowym momentem siły.

1.3.2 Analityczna reprezentacja siły

Dotychczasowe konstrukcje przeprowadzaliśmy na podstawie rachunku wektorowego. Rachunek wektorowy możemy zastąpić rachunkiem algebraicznym. W tym celu wprowadzamy układ współrzędnych, w którym siłę określamy rzutami wektora siły na osie układu współrzędnych. Najwygodniej jest przyjmować układ prostokątny prawoskrętny.



Rys. 1.16 Rozkład siły na składowe na płaszczyźnie.

Na rys.1.16 $|\vec{P}_x|$ i $|\vec{P}_y|$ są składowymi wektora siły \vec{P} na płaszczyźnie. Składowymi wektora siły nazywać będziemy rzuty prostokątne siły na odpowiednie osie układu współrzędnych x, y . Składowe $|\vec{P}_x|$ i $|\vec{P}_y|$ wektora siły \vec{P} określone są wzorami:

$$\begin{aligned} |\vec{P}_x| &= |\vec{P}| \cos \alpha \\ |\vec{P}_y| &= |\vec{P}| \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.6)$$

Siła \vec{P} może być wyrażona za pomocą jej składowych i wektorów jednostkowych:

$$\vec{P} = i|\vec{P}_x| + j|\vec{P}_y| \quad (1.7)$$

Jeżeli dane są składowe wektora siły, możemy określić wartość siły i znaleźć prostą jej działania. Wartość siły obliczamy ze wzoru:

$$|\vec{P}| = \sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2} \quad (1.8)$$

Prostą działania siły \vec{P} wyznaczamy obliczając kąty jakie tworzy z osiami układu współrzędnych, ze wzorów:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{P}_x|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}_x|}{\sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2}} \quad (1.9)$$

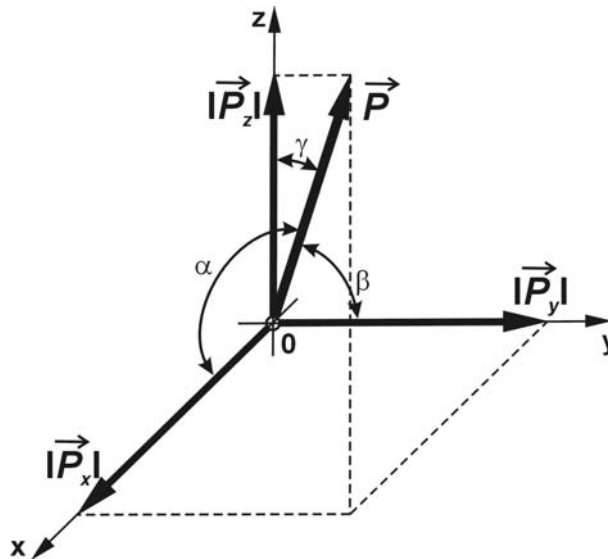
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{P}_y|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}_y|}{\sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2}}$$

Na rys.1.17 $|\vec{P}_x|$, $|\vec{P}_y|$ i $|\vec{P}_z|$ są składowymi wektora siły \vec{P} w przestrzeni. Składowe $|\vec{P}_x|$, $|\vec{P}_y|$ i $|\vec{P}_z|$ wektora siły \vec{P} określone są wzorami:

$$|\vec{P}_x| = |\vec{P}| \cos \alpha$$

$$|\vec{P}_y| = |\vec{P}| \cos \beta$$

$$|\vec{P}_z| = |\vec{P}| \cos \gamma \quad (1.10)$$



Rys. 1.17 Rozkład siły na składowe w przestrzeni.

Siła \vec{P} wyrażona za pomocą jej składowych i wektorów jednostkowych jest równa:

$$\vec{P} = i|\vec{P}_x| + j|\vec{P}_y| + k|\vec{P}_z| \quad (1.11)$$

Jeżeli podane są składowe wektora siły, możemy obliczyć wartość siły i znaleźć prostą jej działania. Wartość siły obliczamy ze wzoru:

$$|\vec{P}| = \sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2 + |\vec{P}_z|^2} \quad (1.12)$$

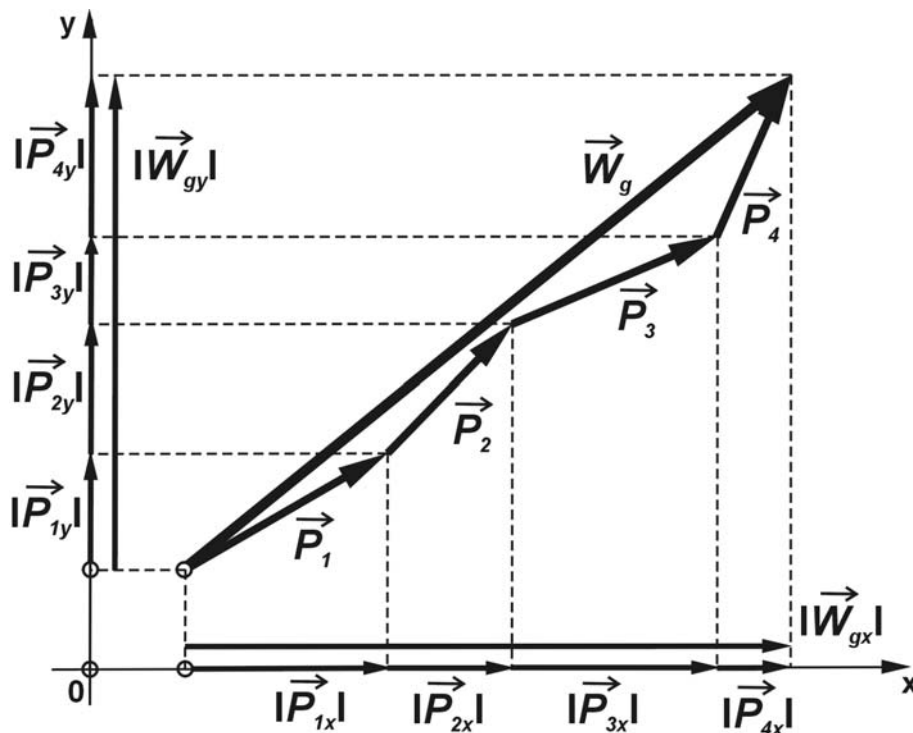
Prostą działania siły \vec{P} wyznaczamy obliczając kąty jakie tworzy z osiami układu współrzędnych, ze wzorów:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{|\vec{P}_x|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}_x|}{\sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2 + |\vec{P}_z|^2}} \\ \cos \beta &= \frac{|\vec{P}_y|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}_y|}{\sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2 + |\vec{P}_z|^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{|\vec{P}_z|}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}_z|}{\sqrt{|\vec{P}_x|^2 + |\vec{P}_y|^2 + |\vec{P}_z|^2}}\end{aligned}\quad (1.13)$$

Pomiędzy cosinusami kątów α, β, γ zawartych pomiędzy prostą działania siły a osiami układu odniesienia, zachodzi związek: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

1.3.3 Wektor główny

Suma geometryczna wszystkich sił działających na ciało nosi nazwę wektora głównego \vec{W}_g (rys.1.18). Można wykazać, że rzut wektora głównego na dowolną oś równa się sumie rzutów na tą oś sił składowych.



Rys. 1.18 Wektor główny

Składowe wektora głównego i jego wartość (w przypadku płaskiego zbieżnego sił) określone są wzorami:

$$\begin{aligned}
|\vec{W}_x| &= |\vec{W}_{gx}| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| \\
|\vec{W}_y| &= |\vec{W}_{gy}| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| \\
|\vec{W}_g| &= \sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2}
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Prostą działania wektora głównego wyznaczamy, obliczając kąt α zawarte między wektorem głównym \vec{W}_g , a osią x układu:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{W}_{gx}|}{|\vec{W}_g|}
\tag{1.15}$$

Składowe wektora głównego \vec{W}_g (w przypadku przestrzennego zbieżnego układu sił) są określone wzorami:

$$\begin{aligned}
|\vec{W}_x| &= |\vec{W}_{gx}| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| \\
|\vec{W}_y| &= |\vec{W}_{gy}| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| \\
|\vec{W}_z| &= |\vec{W}_{gz}| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iz}|
\end{aligned}
\tag{1.16}$$

Wartość wektora głównego \vec{W}_g obliczamy na podstawie wzoru:

$$|\vec{W}_g| = \sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2 + |\vec{W}_{gz}|^2}
\tag{1.17}$$

Prostą działania wektora głównego wyznaczamy, obliczając kąty α, β, γ zawarte między wektorem głównym \vec{W}_g , a osiami układu:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{|\vec{W}_{gx}|}{|\vec{W}_g|} = \frac{|\vec{W}_{gx}|}{\sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2 + |\vec{W}_{gz}|^2}} \\
\cos \beta &= \frac{|\vec{W}_{gy}|}{|\vec{W}_g|} = \frac{|\vec{W}_{gy}|}{\sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2 + |\vec{W}_{gz}|^2}} \\
\cos \gamma &= \frac{|\vec{W}_{gz}|}{|\vec{W}_g|} = \frac{|\vec{W}_{gz}|}{\sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2 + |\vec{W}_{gz}|^2}}
\end{aligned}
\tag{1.18}$$

1.3.4 Warunki równowagi zbieżnego układu sił

Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi płaskiego zbieżnego układu sił jest to, aby wektor główny \vec{W}_g był równy zeru.

Jeżeli siły działają w płaszczyźnie otrzymamy dwa równania równowagi:

$$\begin{aligned} |\vec{W}_{gx}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| = 0 \\ |\vec{W}_{gy}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

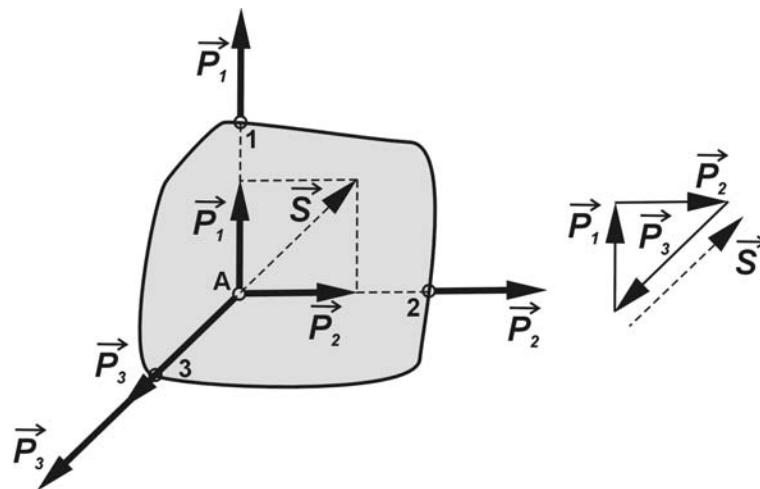
Natomiast w przypadku gdy siły działają w przestrzeni otrzymujemy trzy równania równowagi:

$$\begin{aligned} |\vec{W}_{gx}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| = 0 \\ |\vec{W}_{gy}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| = 0 \\ |\vec{W}_{gz}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iz}| = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Powyższe równania wyrażają analityczny zapis warunku równowagi płaskiego zbieżnego układu sił.

1.3.5 Twierdzenie o trzech siłach.

Rozpatrzmy przypadek szczególny, kiedy dany układ trzech sił nierównoległych, działających w jednej płaszczyźnie jest przyłożony do bryły sztywnej w punktach 1, 2, 3 (rys. 1.19). Dwie siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 zastępujemy jedną siłą $\vec{S} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ i pytamy, przy jakich warunkach siła \vec{P}_3 tworzy dwójkę zerową z siłą \vec{S} . Pierwszym warunkiem jest to, aby siła \vec{P}_3 działała wzdłuż prostej działania siły \vec{S} , czyli jej prosta działania musi przechodzić przez punkt A. Drugim warunkiem jest to, aby miała tę samą wartość i przeciwny zwrot, co znaczy że trójkąt sił \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 musi być zamknięty.



Rys. 1.19 Graficzna ilustracja twierdzenia o trzech siłach.

Opierając się na analizie powyższego układu sił można sformułować następujące twierdzenie (Twierdzenie o trzech siłach):

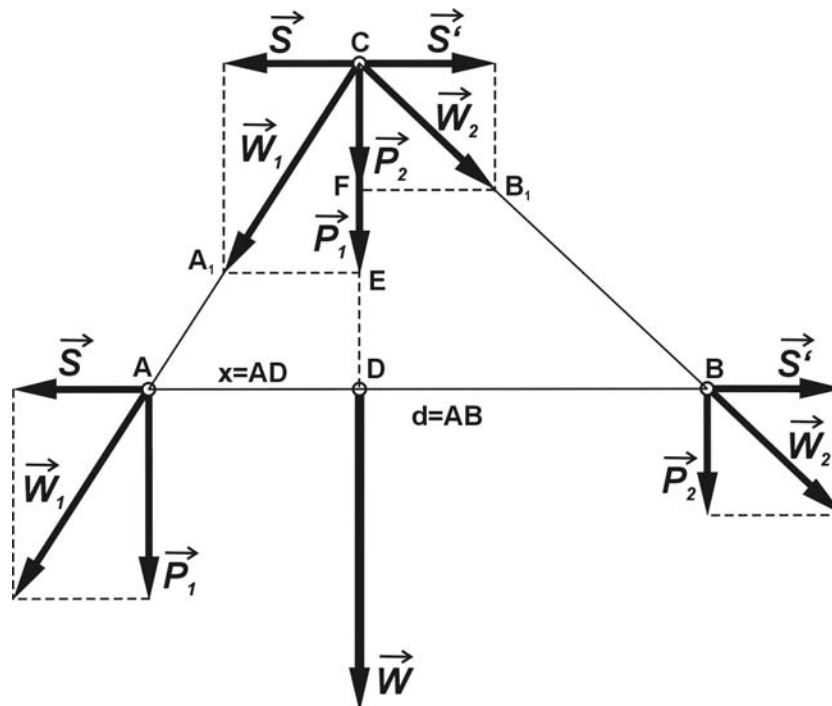
Trzy siły są w równowadze, jeżeli ich proste działania przecinają się w jednym punkcie, leżą w jednej płaszczyźnie a trójkąt sił jest trójkątem zamkniętym.

1.4 PARA SIŁ. MOMENT PARY SIŁ

1.4.1 Składanie dwóch sił równoległych

Siły których proste działania są do siebie równoległe nazywamy siłami równoległymi. Wypadkowa sił równoległych jest sumą algebraiczną tych sił i leży na ich prostej działania. Zagadnienie wyznaczania wypadkowej sił równoległych sprowadza się zatem do wyznaczania jej położenia, czyli odległości od dowolnej siły składowej, której położenie jest znane.

Rozpatrzmy przypadek, gdy na ciało sztywne działają w punktach A i B dwie siły równoległe \vec{P}_1 i \vec{P}_2 o tych samych zwrotach i różnych wartościach liczbowych. Taki układ można zastąpić jedną siłą (wypadkową \vec{W}) co pokazano na rys.1.20.



Rys. 1.20 Geometryczna interpretacja wypadkowej układu sił równoległych.

Sposób konstrukcji jest następujący: przez punkty A i B prowadzimy prostą, wzdłuż której w punktach A i B przykładamy dwójkę zerową (\vec{S}, \vec{S}'), przy czym $\vec{S} = -\vec{S}'$. Następnie składamy siły (\vec{P}_1, \vec{S}) oraz (\vec{P}_2, \vec{S}'). W wyniku otrzymujemy siły \vec{W}_1 i \vec{W}_2 , których proste działania przecinają się w punkcie C . Przesuwamy siły \vec{W}_1 i \vec{W}_2 do punktu C oraz rozkładamy je na kierunek równoległy do prostej AB i na kierunek równoległy do działających sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 . Ponieważ składowe sił \vec{W}_1 i \vec{W}_2 na kierunku równoległym do prostej AB tworzą dwójkę zerową możemy je wyeliminować. Składowe na prostej równoległej do sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 są odpowiednio równe siłom \vec{P}_1 i \vec{P}_2 oraz mają ten sam zwrot. Ich suma jest równa sile wypadkowej:

$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad (1.21)$$

Następnie obliczamy z podobieństwa trójkątów $DACD$ i DA_1CE oraz $DBCD$ i DB_1CF odległość x prostej działania siły wypadkowej \vec{W} od prostej działania siły \vec{P}_1 :

$$\frac{x}{A_1E} = \frac{CD}{|\vec{P}_1|}$$

$$\frac{d-x}{B_1F} = \frac{CD}{|\vec{P}_2|}$$
(1.22)

Ponieważ $A_1E = B_1F = |\vec{S}| = |\vec{S}'|$, otrzymamy:

$$x = \frac{|\vec{P}_2|D}{|\vec{P}_1| + |\vec{P}_2|}$$
(1.23)

Dla sił o przeciwnych zwrotach, siła wypadkowa \vec{W} wynosi $\vec{W} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$, a odległość x , prostej działania siły wypadkowej \vec{W} od prostej działania siły \vec{P}_1 wynosi:

$$x = \frac{|\vec{P}_2|D}{|\vec{P}_1| - |\vec{P}_2|}$$
(1.24)

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania można stwierdzić, że:

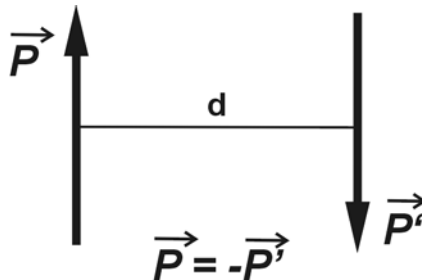
Siła wypadkowa dwóch sił równoległych o zgodnych zwrotach jest równa sumie wartości sił składowych, jest do nich równoległa, ma ten sam zwrot, a jej prosta działania przechodzi między siłami składowymi, dzieląc odcinek między nimi w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wartości tych sił.

Siła wypadkowa dwóch sił równoległych o przeciwnych zwrotach i różnych wartościach liczbowych, jest równa różnicy wartości tych sił, jest do nich równoległa, ma zwrot zgodny ze zwrotem siły większej, jej prosta działania przechodzi na zewnątrz siły większej i dzieli odcinek między siłami zewnętrznie w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wartości tych sił.

Siły równoległe mające wspólną prostą działania dodaje się jak skalary.

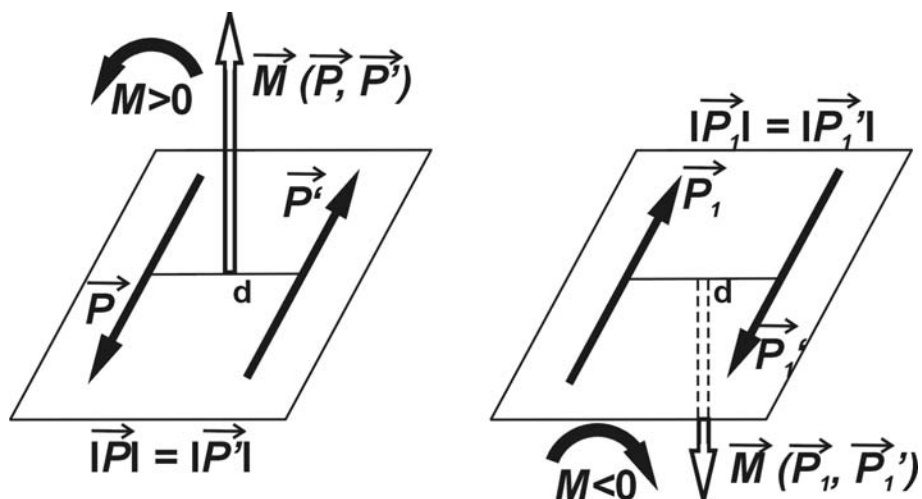
1.4.2 Para sił. Moment pary sił

Układ dwóch sił równoległych (rys.1.21) nie leżących na jednej prostej o równych wartościach, lecz przeciwnych zwrotach, nazywamy parą sił.



Rys. 1.21 Para sił

Pary sił nie można zastąpić jedną siłą (co wynika z rozważań w punkcie 1.4.1). Para sił, przyłożona do swobodnego ciała sztywnego, powoduje jego obrót dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny działania pary (płaszczyzny wyznaczonej przez proste działania sił, które tworzą parę). Parę sił można zastąpić inną parą sił o tym samym działaniu. Działanie pary sił na bryłę określa iloczyn siły i ramienia pary (ramieniem pary d nazywamy najkrótszą odległość między kierunkami działania sił pary) oraz kierunek obrotu. Działanie pary sił na bryłę określamy wektorem, który nazywamy momentem pary. Moment pary sił jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny działania pary sił (rys.1.22).

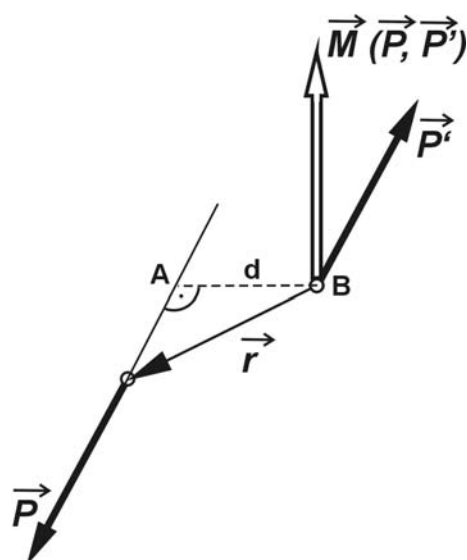


Rys. 1.22 Moment pary sił

Wartość momentu pary sił jest równa iloczynowi wartości siły i ramienia d , a jego zwrot jest taki, że patrząc od strony strzałki wektora momentu widzimy obrót pary sił w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (odpowiada to prawoskrętnemu układowi współrzędnych).

Moment pary sił można zdefiniować również jako iloczyn wektorowy (rys.1.23) wektora \vec{r} i wektora siły \vec{P} :

$$\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}') = \vec{r} \times \vec{P} \quad (1.25)$$



Rys. 1.23 Geometryczna interpretacja iloczynu wektorowego

Wartość tak zdefiniowanego momentu pary sił $\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')$ obliczamy:

$$\begin{aligned} |\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')| &= |\vec{P}| \sin(\vec{r}, \vec{P}) \\ d &= |\vec{r}| \sin(\vec{r}, \vec{P}) \\ |\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')| &= |\vec{P}| d \end{aligned} \quad (1.26)$$

Jeżeli będziemy rozpatrywać pary sił działające tylko w jednej płaszczyźnie, to wektory przedstawiające momenty tych par sił będą do siebie równoległe. W takiej sytuacji, wygodnie jest posługiwać się wartością momentu z odpowiednim znakiem "plus" lub "minus" (rys.1.22). Przy takiej umowie wartość $\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')$ zapiszemy jako: $|\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}')| = |\vec{P}| d$, a wartość $\vec{M}(\vec{P}_1, \vec{P}'_1)$ zapiszemy w postaci: $|\vec{M}(\vec{P}_1, \vec{P}'_1)| = -|\vec{P}_1| d_1$.

1.4.3 Twierdzenia o parach sił

Przy zastosowaniu metody zastępowania układów sił układami im równoważnymi powstały twierdzenia o parach sił, które podano poniżej bez udowodnienia.

Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, gdy parę przesuniemy w dowolne położenie w jej płaszczyźnie działania.

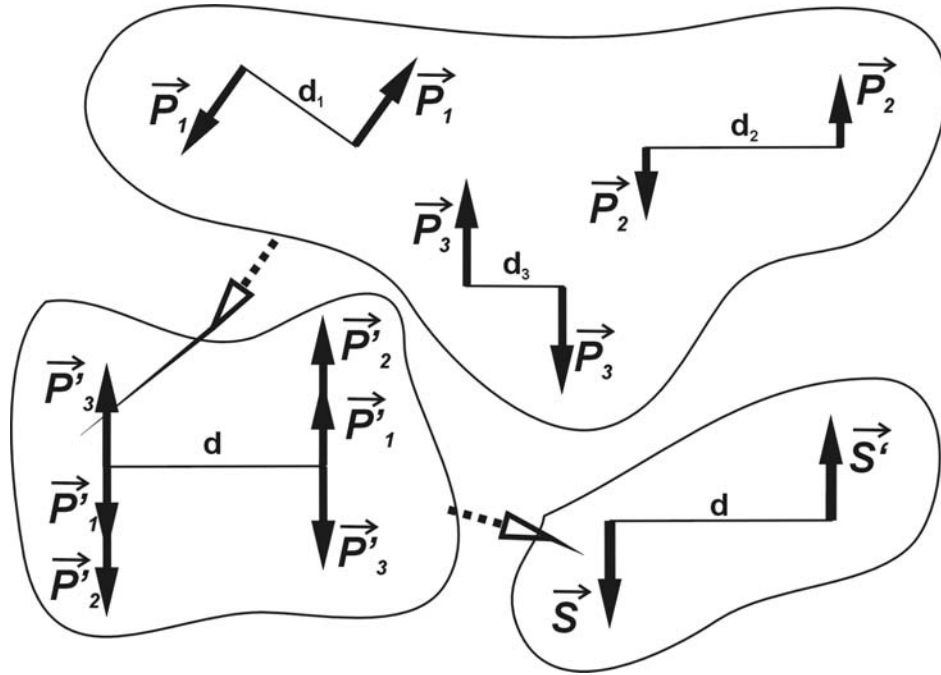
Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, gdy zmienimy siły pary i jej ramię tak, aby wektor momentu pary został niezmienny.

Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, gdy parę sił przesuniemy na płaszczyznę równoległą do jej płaszczyzny działania.

Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, jeżeli moment pary się nie zmieni.

1.4.4 Składanie par sił w jednej płaszczyźnie

Gdy na ciało sztywne działa w jednej płaszczyźnie szereg par sił, możemy zastąpić je jedną wypadkową parą sił. Na rys.1.24 przedstawiono przypadek, gdy na ciało działają trzy pary sił.



Rys. 1.24 Składanie par sił

Do rozważań przyjmijmy odpowiednie oznaczenia. I tak siły w parach oznaczmy przez \vec{P}_i , moment dowolnej pary przez \vec{M}_i , natomiast ramię pary przez d_i . Ramię d_i pary możemy dowolnie obracać i zastąpić wybraną parę, parą o ramieniu innej długości d , zachowując jednocześnie jej moment bez zmian. Możemy to zrealizować, dobierając odpowiednio siłę \vec{P}'_i , tak aby był spełniony warunek:

$$|\vec{P}_i|d_i = |\vec{P}'_i|d \quad (1.27)$$

Otrzymane w ten sposób pary możemy przesunąć na wspólne ramię d i złożyć siły przyłożone na końcach tego ramienia. Na obu końcach ramienia otrzymamy te same siły \vec{S} , równe sumie geometrycznej wszystkich sił \vec{P}_i . Siły te tworzą parę sił, której moment jest równy sumie momentów składanych par sił.

Z rozważań w punkcie 1.4.2 wynika, że moment każdej pary sił jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny działania tej pary, czyli w naszym przypadku do płaszczyzny rysunku. Wartość wektora momentu i -tej pary sił wynosi:

$$|\vec{M}_i| = |\vec{P}_i|d_i = |\vec{P}'_i|d \quad (1.28)$$

lub w zapisie wektorowym:

$$\vec{M}_i = \vec{d}_i \times \vec{P}_i = \vec{d} \times \vec{P}'_i \quad (1.29)$$

Tak więc moment pary sił \vec{S} , \vec{S}' o ramieniu \vec{d} wynosi:

$$\vec{M}_i = \vec{d} \times \vec{S} = \vec{d} \times \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \vec{d} \times \vec{P}_i \quad (1.30)$$

czyli

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (1.31)$$

Wszystkie wektory momentów par sił mają ten sam kierunek a różnić się mogą tylko zwrotami. Można przyjąć zasadę, że wektory momentów par sił o zwrocie ponad płaszczyznę działania par przedstawimy liczbą dodatnią, a o zwrocie przeciwnym liczbą ujemną. Tym samym, każemu wektorowi momentu pary sił zostaje w sposób jednoznaczny przypisana liczba względna. Liczba ta jest dodatnia lub ujemna. W takim przypadku sumę geometryczną wektorów równoległych można zastąpić sumą algebraiczną.

Można zatem napisać następujące twierdzenia:

Układ par sił działających w jednej płaszczyźnie sprowadza się do pary o momencie równym algebraicznej sumie momentów par układu.

Aby pary sił działające w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne znajdowały się w równowadze, suma momentów tych par musi się równać zeru, czyli:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 \quad (1.32)$$

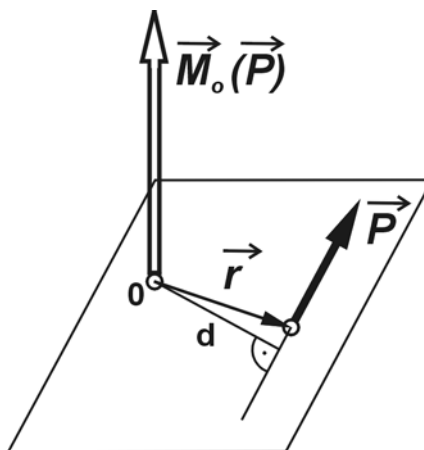
Podobne rozważania można przeprowadzać dla przypadku gdy płaszczyzny par nie są równoległe.

1.5 MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU I OSI

1.5.1 Moment siły względem punktu (bieguna)

Momentem siły względem punktu (bieguna) rys.1.25, nazywamy wektor $\vec{M}_o(\vec{P})$ prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez prostą działania siły i punkt (biegun). Wartość wektora momentu jest równa:

$$|\vec{M}_o(\vec{P})| = |\vec{P}|d, \quad \text{gdzie } d = |\vec{r}| \times \sin(\vec{r}, \vec{P}) \quad (1.33)$$



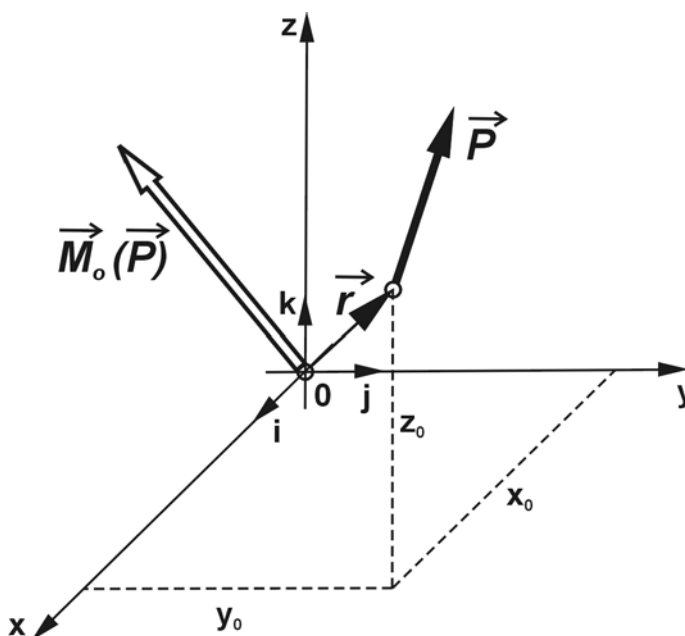
Rys. 1.25 Moment siły względem bieguna

Odległość d jest odległością punktu (bieguna) od prostej działania siły i nazywana jest ramieniem siły. Zwrot wektora momentu jest taki, aby patrząc od jego strzałki na płaszczyznę wyznaczoną przez prostą działania siły i punkt (biegun), widać było obrót siły względem punktu (bieguna) w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara czyli inaczej, aby trójka wektorów zaznaczonych na rys.1.25 była prawoskřejna. Moment siły względem punktu (bieguna) jest zerem, gdy prosta działania siły przechodzi przez ten punkt (biegun).

Z definicji momentu siły względem punktu (bieguna) wynika, że moment nie zmieni się, jeżeli siłę przesuniemy wzdłuż prostej jej działania.

1.5.2 Moment siły względem osi

Przyjmijmy, że dane są: punkt O (biegun) i siła \vec{P} . W punkcie O przyjmujemy początek prostokątnego układu współrzędnych. Momentem siły \vec{P} względem bieguna O jest wektor $\vec{M}_o(\vec{P})$ (rys.1.26).



Rys. 1.26 Moment siły względem bieguna

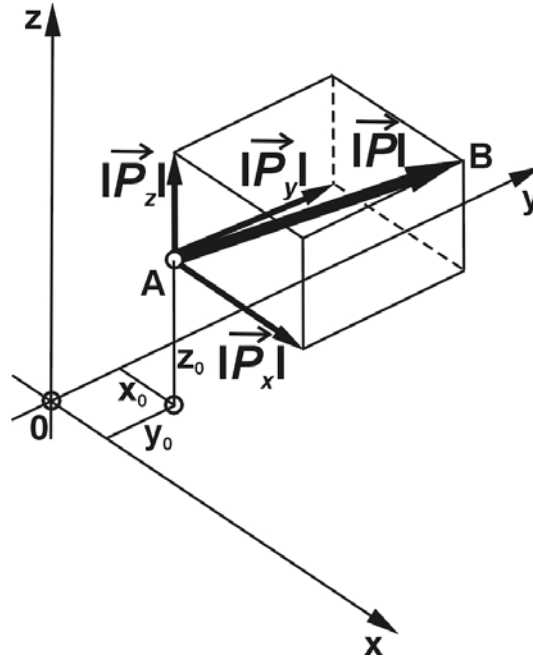
Dowolny punkt A na prostej działania siły \vec{P} ma współrzędne (x_o, y_o, z_o) . Wektor siły \vec{P} ma składowe $|\vec{P}_x|, |\vec{P}_y|, |\vec{P}_z|$. Łącząc punkt A (x_o, y_o, z_o) z początkiem układu otrzymamy wektor \vec{r} . Współrzędne wektora momentu siły \vec{P} względem bieguna O oznaczamy symbolami $|\vec{M}_x|, |\vec{M}_y|, |\vec{M}_z|$. Składowe te można obliczyć jako minory niżej podanego wyznacznika, gdzie (i, j, k) są wektorami jednostkowymi na osiach współrzędnych (wersorami):

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_o & y_o & z_o \\ |\vec{P}_x| & |\vec{P}_y| & |\vec{P}_z| \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

Po rozwiązaniu wyznacznika współrzędne momentu będą równe:

$$\begin{aligned}
|\vec{M}_x| &= |\vec{P}_z|y_0 - |\vec{P}_y|z_0, \\
|\vec{M}_y| &= |\vec{P}_x|z_0 - |\vec{P}_z|x_0, \\
|\vec{M}_z| &= |\vec{P}_y|x_0 - |\vec{P}_x|y_0.
\end{aligned}
\tag{1.35}$$

Składowe wektora momentu $\vec{M}_o(\vec{P})$ nazywami momentami siły względem odpowiedniej osi.



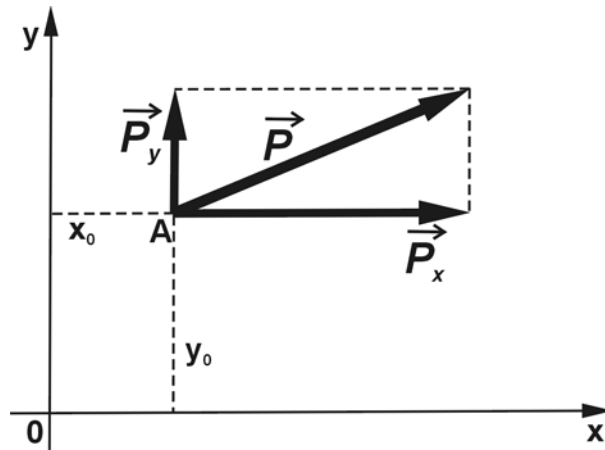
Rys. 1.27 Ilustracja związku do wyznaczania wartości momentów siły względem osi.

Na rys.1.27 przedstawiono graficznie interpretację momentów siły względem osi. Na podstawie tej interpretacji moment siły względem osi Oz można określić jako moment rzutu siły \vec{P} na płaszczyznę prostopadłą do osi Oz względem punktu przecięcia tej płaszczyzny przez oś. Rzut siły \vec{P} na płaszczyznę prostopadłą do osi oznaczony jest przez \vec{P}_{xy} , a punkt przecięcia płaszczyzny Oxy przez oś Oz oznaczony symbolem O . Z powyższego określenia momentu siły względem osi wynika, że moment siły względem osi jest zerem, gdy siła i oś leżą w jednej płaszczyźnie (gdy siła jest równoległa do osi lub gdy prosta działania siły przecina oś).

Korzystając ze wzorów na $|\vec{M}_x|$, $|\vec{M}_y|$, $|\vec{M}_z|$ możemy obliczyć wartość momentu siły \vec{P} względem punktu O oraz określić kąty zawarte pomiędzy wektorem momentu \vec{M} , a osiami układu:

$$\begin{aligned}
|\vec{M}| &= |\vec{M}_o(\vec{P})| = \sqrt{|\vec{M}_x|^2 + |\vec{M}_y|^2 + |\vec{M}_z|^2} \\
\cos(\vec{M}, i) &= \frac{|\vec{M}_x|}{|\vec{M}|} = \frac{|\vec{M}_x|}{\sqrt{|\vec{M}_x|^2 + |\vec{M}_y|^2 + |\vec{M}_z|^2}} \\
\cos(\vec{M}, j) &= \frac{|\vec{M}_y|}{|\vec{M}|} = \frac{|\vec{M}_y|}{\sqrt{|\vec{M}_x|^2 + |\vec{M}_y|^2 + |\vec{M}_z|^2}} \\
\cos(\vec{M}, k) &= \frac{|\vec{M}_z|}{|\vec{M}|} = \frac{|\vec{M}_z|}{\sqrt{|\vec{M}_x|^2 + |\vec{M}_y|^2 + |\vec{M}_z|^2}}
\end{aligned}
\tag{1.36}$$

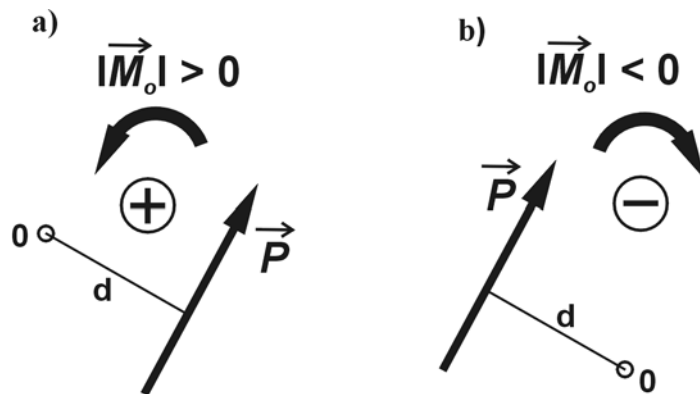
Jeżeli siła leży w płaszczyźnie Oxy , to $z_o = 0$ i $\vec{P}_z = 0$ (rys.1.28).



Rys. 1.28 Moment siły względem osi

Moment siły \vec{P} względem osi wynosi w tym przypadku wynosi:

$$\begin{aligned}
|\vec{M}_x| &= 0, \\
|\vec{M}_y| &= 0, \\
|\vec{M}_z| &= |\vec{M}_o(\vec{P})| = |\vec{P}_y|x_o - |\vec{P}_x|y_o.
\end{aligned}
\tag{1.37}$$



Rys. 1.29 Konwencja znaków przy określaniu momentu względem bieguna.

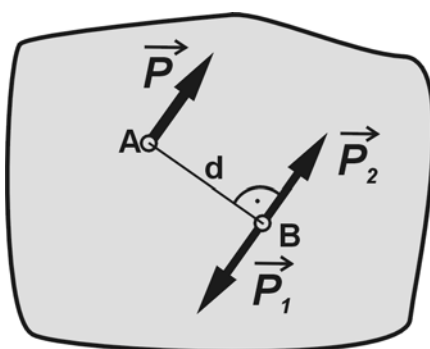
W celu określenia znaku momentu względem osi przyjmujemy następującą konwencję znaków:

- plus (+) - obrót siły dookoła osi O zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys.1.29.a),
- minus (-) - obrót siły dookoła osi O przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (rys.1.29.b).

1.5.3 Twierdzenie o równoległym przesuwaniu siły

Założmy, że na bryłę działa siła \vec{P} zaczepiona w punkcie A (rys.1.30). Następnie chcemy tę siłę przesunąć równolegle do punktu B . W tym celu w punkcie B przykładamy dwójkę zerową $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$ równoległą do siły \vec{P} przy czym $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{P}|$. Z rysunku widać, że układ sił składa się z teraz z siły \vec{P}_2 równej co do wartości sile \vec{P} oraz pary sił (\vec{P}, \vec{P}_1) , której wartość momentu wynosi :

$$\vec{M}(\vec{P}, \vec{P}_1) = \vec{P}d \quad (1.38)$$



Rys. 1.30 Równoległe przesunięcie siły.

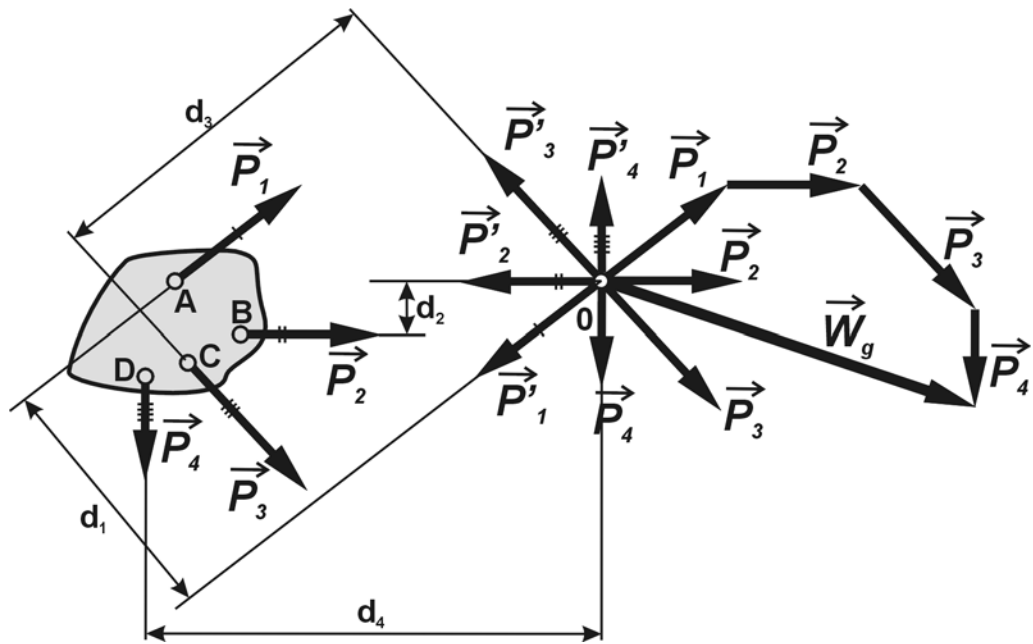
Siłę \vec{P} można przesunąć równoległe z punktu A do nowego punktu zaczepienia B , przykładając równocześnie odpowiednią parę sił (\vec{P}, \vec{P}_1) .

1.6 RÓWNOWAGA PŁASKIEGO DOWOLNEGO UKŁADU SIŁ

1.6.1 Redukcja płaskiego dowolnego układu sił.

Przez redukcję dowolnego układu sił rozumiemy przekształcenie układu w równoważny układ złożony z siły i pary sił (zastępujemy działanie układu sił jedną siłą i parą sił). Rozważmy dowolny układ sił działających w jednej płaszczyźnie (rys.1.31). Proste działania sił \vec{P}_i są dowolnie położone względem siebie na płaszczyźnie tzn. nie przecinają się w jednym punkcie. Zadajmy sobie pytanie przy jakich warunkach układ sił \vec{P}_i da się zastąpić jednym z najprostszych układów sił, to jest dwójką zerową, jedną siłą lub parą sił. W tym celu przeprowadzimy redukcję układu sił.

W płaszczyźnie działania siły obieramy dowolny punkt np. O , który nazywamy biegunem redukcji. Korzystamy z twierdzenia o równoległym przesuwaniu siły i przesuwamy siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ do bieguna O . W ten sposób układ tych sił zaczepionych w punktach A, B, C, D przekształciliśmy w układ równoważny, złożony z płaskiego zbieżnego układu sił oraz układu czterech par sił.



Rys. 1.31 Redukcja płaskiego, dowolnego układu sił

Zbieżny układ sił możemy zastąpić jedną siłą \vec{S} . Gdy suma geometryczna sił \vec{P}_i jest różna od zera, układ par sił można zastąpić jedną parą o momencie równym algebraicznej sumie momentów par sił układu. Wektory momentów poszczególnych par są równoległe, więc możemy je sumować algebraicznie. Zmiast obliczać algebraiczną sumę momentów par sił układu, możemy obliczać algebraiczną sumę momentów sił względem bieguna O . Zatem w ogólnym przypadku układ sił \vec{P}_i zastąpimy jedną siłą \vec{S} , zaczepioną w biegunie O , i momentem sił \vec{P}_i względem tego bieguna:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_o(\vec{P}_i) \quad (1.39)$$

Siła \vec{S} jest równa sumie wszystkich sił układu. Geometryczną sumę sił układu, nazywamy wektorem głównym i oznaczamy \vec{W}_g . Sumę momentów sił \vec{P}_i względem bieguna redukcji nazywamy momentem głównym i oznaczamy \vec{M}_g . Wartość wektora głównego \vec{W}_g obliczamy, jako sumę wszystkich sił układu na osie odniesienia Ox i Oy :

$$\begin{aligned} |\vec{W}_{gx}| &= \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| \\ |\vec{W}_{gy}| &= \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| \end{aligned} \quad (1.40)$$

Stąd otrzymujemy:

$$|\vec{W}_g| = \sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2} \quad (1.41)$$

Prostą działania wektora głównego określamy, obliczając cosinus kąta, jaki prosta ta tworzy z osią Ox :

$$\cos(\vec{W}_g, i) = \frac{|\vec{W}_{gx}|}{|\vec{W}_g|} \quad (1.42)$$

Dla układu płaskiego sił wartość momentu głównego, jest równa sumie algebraicznej momentów sił składowych względem bieguna redukcji:

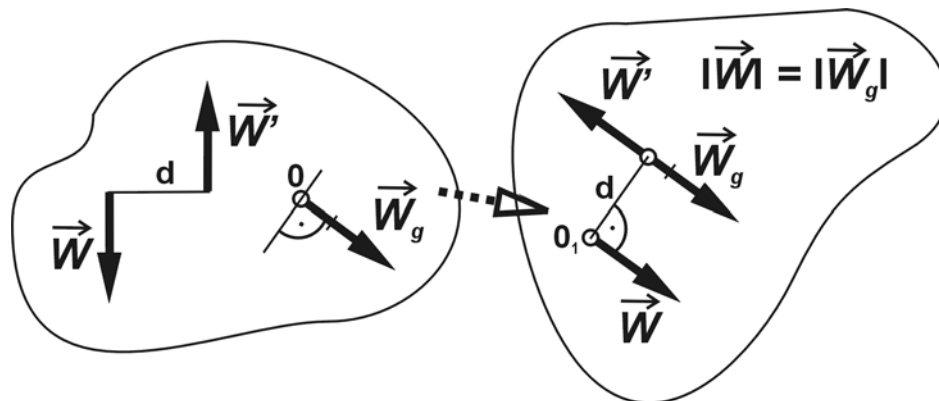
$$|\vec{M}_g| = \sum_{i=1}^n |\vec{P}_i| d_i \quad (1.43)$$

1.6.2 Przypadki redukcji płaskiego dowolnego układu sił.

Przypadki redukcji zależą od wartości wektora głównego \vec{W}_g , oraz wartości momentu głównego \vec{M}_g . Poniżej podano cztery przypadki redukcji płaskiego dowolnego układu sił.

- Przyjmijmy, że w wyniku redukcji otrzymaliśmy wektor główny \vec{W}_g i moment główny \vec{M}_g różne od zera czyli:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$



Rys. 1.32 Redukcja płaskiego dowolnego układu sił

Siły pary (\vec{W}, \vec{W}') o momencie \vec{M}_g możemy obrócić równie co do wartości wektorowi głównemu \vec{W}_g . Wtedy ramię pary będzie równe:

$$d = \frac{|\vec{M}_g|}{|\vec{W}_g|} \quad (1.45)$$

Parę sił (\vec{W}, \vec{W}') możemy tak obrócić, aby jedna z jej sił tworzyła układ równoważny wektorem głównym \vec{W}_g (rys.1.32.a). Wtedy dwójkę zerową $\vec{W} = -\vec{W}_g$ można wyeliminować. Rozpatrywany układ sprowadza się do jednej siły \vec{W} równej geometrycznie wektorowi głównemu \vec{W}_g . Układ ma więc siłę wypadkową o prostej działania przechodzącej przez punkt O_1 (rys.1.32.b), przesunięty

względem bieguna redukcji na taką odległość i w takim kierunku, że moment wypadkowej względem bieguna redukcji równy jest wartości momentu głównego. Dlatego można powiedzieć, że moment siły wypadkowej płaskiego układu sił względem dowolnie obranego bieguna w ich płaszczyźnie działania równy jest sumie algebraicznej momentów sił układu względem tego bieguna. O tym jaki jest kierunek działania siły wypadkowej decyduje suma momentów sił układu względem bieguna. Wartość, zwrot i prostą działania wypadkowej obliczamy ze wzorów podanych w 1.6.1. Natomiast punkt zaczepienia wypadkowej wyznaczamy stosując twierdzenie o momencie wypadkowej względem dowolnego bieguna. Przypuśćmy, że punkt $O_l(x,y)$ leży na prostej działania siły wypadkowej \vec{W} . Ponieważ $\vec{M}_o(\vec{W}) = \vec{M}_g$, więc:

$$|\vec{W}_{gy}|x - |\vec{W}_{gx}|y - |\vec{M}_g| = 0 \quad (1.46)$$

Jest to równanie prostej działania siły wypadkowej. Prosta ta nazywa się osią centralną. Oś centralna jest prostą działania wypadkowej, a każdy punkt na niej leżący jest punktem zaczepienia siły \vec{W} .

- Jeżeli w wyniku redukcji:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &= 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

wówczas układ sprowadza się do siły wypadkowej równej wektorowi głównemu, zaczepionej w biegunie redukcji.

- Jeżeli w wyniku redukcji:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &= 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

to wtedy układ sprowadza się do pary sił o momencie równym momentowi głównemu.

- Jeżeli w wyniku redukcji:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &= 0 \\ \vec{M}_g &= 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

to wtedy układ pozostaje w równowadze.

1.6.3 Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił

Płaski dowolny układ sił (siły działają w jednej płaszczyźnie x,y) pozostaje w równowadze, jeżeli wektor główny siły $\vec{W}_g = 0$ i moment główny $\vec{M}_g = 0$. Zachodzi to gdy:

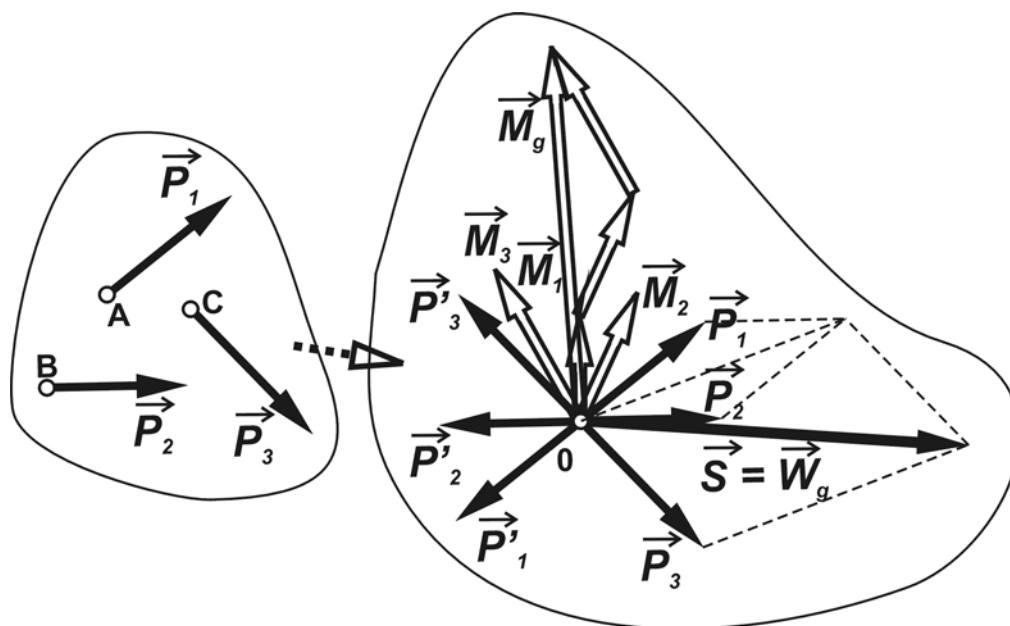
$$\begin{aligned} |\vec{W}_{gx}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| = 0 \\ |\vec{W}_{gy}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| = 0 \\ |\vec{M}_{io}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_i| d_i = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi płaskiego dowolnego układu sił jest, aby sumy algebraiczne rzutów wszystkich sił na każdą z dwóch nierównoległych osi równały się zeru i suma momentów wszystkich sił względem dowolnie obranego bieguna na płaszczyźnie działania tych sił była równa zeru (trzy równania równowagi).

1.7 RÓWNOWAGA PRZESTRZENNEGO DOWOLNEGO UKŁADU SIŁ

1.7.1 Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił

W celu przeprowadzenia redukcji przestrzennego dowolnego układu sił, przyjmijmy bryłę, na którą działa ten układ sił. Redukcję przeprowadzimy na układzie np. trzech sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, zaczepionych w punktach A, B, C (rys.1.33).



Rys. 1.33 Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił

Obieramy dowolny biegun redukcji w punkcie O . Następnie do punktu O przesuwamy równoległe dwie siły (korzystamy z twierdzenia o równoległym przesuwaniu siły). W tym celu w biegunie O przykładamy dwójki zerowe o siłach równych siłom $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$. W ten sposób otrzymujemy układ sił \vec{P}'_i , zaczepionych w biegunie redukcji, oraz układ trzech par sił działających w różnych płaszczyznach.

Pary te powstają z sił \vec{P}'_i ($\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{P}'_3$), działających na bryłę, i z sił wchodzących w skład dwójek zerowych, zaczepionych w punkcie O . Dodając geometrycznie siły $\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{P}'_3$ otrzymujemy siłę \vec{S} równą geometrycznie wektorowi głównemu \vec{W}_g . Pod względem wartości, kierunku i zwrotu, wektor główny \vec{W}_g nie zależy od obioru bieguna redukcji i dlatego jest niezmiennikiem układu.

Zatem układ trzech par sił, działających w różnych płaszczyznach, możemy zastąpić jedną parą sił, której moment równy jest geometrycznej sumie par sił składowych. Momenty tych par sił są równe momentom sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, zaczepionych odpowiednio w punktach A, B, C , względem przyjętego bieguna redukcji.

Na rys.1.33 momenty tych par sił przedstawiono umownie jako wektory $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$. Wektory momentów tych par sił są prostopadłe do płaszczyzn działania odpowiednich par sił. Wektor, będący sumą geometryczną momentów par sił układu, nazywamy momentem głównym \vec{M}_g . Powyższe postępowanie doprowadziło do zastąpienia dowolnego przestrzennego układu siłą równą wektorowi głównemu \vec{W}_g , oraz parą sił o momencie równym momentowi głównemu \vec{M}_g . Wartość wektora głównego wyznaczamy z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} |\vec{W}_{gx}| &= \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| \\ |\vec{W}_{gy}| &= \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| \\ |\vec{W}_{gz}| &= \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iz}| \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$|\vec{W}| = \sqrt{|\vec{W}_{gx}|^2 + |\vec{W}_{gy}|^2 + |\vec{W}_{gz}|^2} \quad (1.52)$$

Prostą działania wektora głównego wyznaczamy z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{W}_g, i) &= \frac{|\vec{W}_{gx}|}{|\vec{W}_g|} \\ \cos(\vec{W}_g, j) &= \frac{|\vec{W}_{gy}|}{|\vec{W}_g|} \\ \cos(\vec{W}_g, k) &= \frac{|\vec{W}_{gz}|}{|\vec{W}_g|} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Pomiędzy cosinusami tych kątów zachodzi związek:

$$\cos^2(\vec{W}_g, i) + \cos^2(\vec{W}_g, j) + \cos^2(\vec{W}_g, k) = 1 \quad (1.54)$$

Wartość momentu głównego wyznaczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} |\vec{M}_{gx}| &= \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{zi}| y_i - |\vec{P}_{yi}| z_i) = 0, \\ |\vec{M}_{gy}| &= \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{xi}| z_i - |\vec{P}_{zi}| x_i) = 0, \\ |\vec{M}_{gz}| &= \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{yi}| x_i - |\vec{P}_{xi}| y_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$|\vec{M}_g| = \sqrt{|\vec{M}_{gx}|^2 + |\vec{M}_{gy}|^2 + |\vec{M}_{gz}|^2} \quad (1.56)$$

Prostą działania momentu głównego wyznaczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{M}_g |, i) &= \frac{|\vec{M}_{gx}|}{|\vec{M}_g|} \\ \cos(\vec{M}_g |, j) &= \frac{|\vec{M}_{gy}|}{|\vec{M}_g|} \\ \cos(\vec{M}_g |, k) &= \frac{|\vec{M}_{gz}|}{|\vec{M}_g|}\end{aligned}\tag{1.57}$$

Pomiędzy cosinusami tych kątów zachodzi związek:

$$\cos^2(\vec{M}_g |, i) + \cos^2(\vec{M}_g |, j) + \cos^2(\vec{M}_g |, k) = 1\tag{1.58}$$

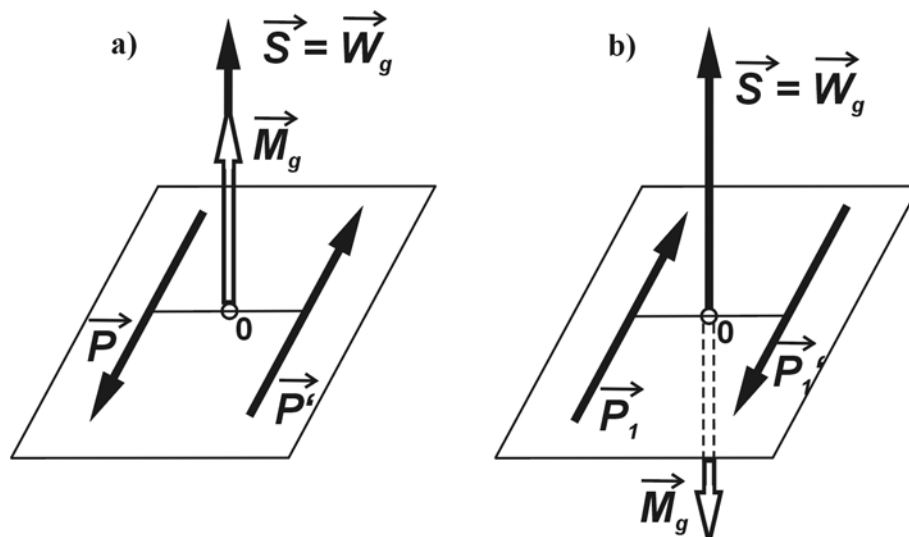
1.7.2 Przypadki redukcji przestrzennego dowolnego układu sił

W wyniku redukcji przestrzenny dowolny układ sił sprowadza się do siły wypadkowej równej wektorowi głównemu \vec{W}_g , przyłożonej w obranym biegunie redukcji, oraz do pary sił o momencie \vec{M}_g . Przypadki redukcji uzależnione są od wartości wektorów \vec{W}_g i \vec{M}_g . Poniżej podano pięć przypadków redukcji przestrzennego dowolnego układu sił.

- Jeżeli w wyniku redukcji otrzymamy wektor główny \vec{W}_g oraz moment główny \vec{M}_g różne od zera, oraz \vec{W}_g jest równoległy do \vec{M}_g , czyli:

$$\begin{aligned}\vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0 \\ \vec{W}_g &\parallel \vec{M}_g\end{aligned}\tag{1.59}$$

to układ sił w tym przypadku sprowadza się do tzn. skrętnika. Skrętnikiem albo śrubą statyczną nazywamy układ sił i pary sił, działającej w płaszczyźnie prostopadłej do tej siły. Skrętnik może być prawy albo lewy. Jeżeli kąt pomiędzy \vec{W}_g i \vec{M}_g jest równy 0^0 to układ sił sprowadza się do skrętnika prawego (rys.1.34.a). Jeżeli kąt pomiędzy \vec{W}_g i \vec{M}_g jest równy 180^0 to układ sił sprowadza się do skrętnika lewego (rys.1.34.b). Prostą działania wektora głównego \vec{W}_g nazywamy osią centralną skrętnika.



Rys. 1.34 Skrętnik pary sił

- Jeżeli wektor główny \vec{W}_g i moment główny \vec{M}_g są różne od zera, przy czym wektory te są do siebie prostopadłe, czyli:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0 \\ \vec{W}_g &\perp \vec{M}_g \end{aligned} \quad (1.60)$$

to układ sił redukuje się do jednej siły wypadkowej. Wartość siły wypadkowej jest równa wartości wektora głównego, ma jego zwrot, prosta i jest przesunięta od bieguna redukcji o ramię $d = \frac{|\vec{M}_g|}{|\vec{W}_g|}$, tak aby moment siły wypadkowej względem bieguna redukcji był równy momentowi głównemu.

- Jeżeli, wektor główny \vec{W}_g jest różny od zera, a moment główny \vec{M}_g jest równy zero czyli:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &= 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

to układ sił redukuje się do wypadkowej równej wektorowi głównemu \vec{W}_g , przyłożonej w obranym biegunie redukcji.

- Jeżeli, wektor główny \vec{W}_g jest równy zero, a moment główny \vec{M}_g jest różny od zera czyli:

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &= 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

to układ sił sprowadza się do pary sił. Kierunek, wartość i zwrot wektora \vec{M}_g nie zależą wówczas od obioru bieguna, a więc moment główny \vec{M}_g jest niezmiennikiem układu.

- Jeżeli, wektor główny \vec{W}_g jest różny od zera i moment główny \vec{M}_g jest różny od zera czyli:

$$\begin{aligned}\vec{W}_g &\neq 0 \\ \vec{M}_g &\neq 0\end{aligned}\tag{1.63}$$

i nie są do siebie równoległe ani prostopadłe, to układ sił sprowadza się do skrętnika, ale o osi przesuniętej względem bieguna redukcji o ramię d .

1.7.3 Warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił

Przestrzenny dowolny układ sił pozostaje w równowadze, jeżeli wektor główny siły $\vec{W}_g = 0$ i moment główny $\vec{M}_g = 0$. Zachodzi to gdy:

$$\begin{aligned}|\vec{W}_{gx}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{ix}| = 0 \\ |\vec{W}_{gy}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iy}| = 0 \\ |\vec{W}_{gz}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{P}_{iz}| = 0 \\ |\vec{M}_{gx}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{M}_{ix}| = 0, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{zi}|y_i - |\vec{P}_{yi}|z_i) = 0 \\ |\vec{M}_{gy}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{M}_{iy}| = 0, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{xi}|z_i - |\vec{P}_{zi}|x_i) = 0 \\ |\vec{M}_{gz}| = 0, & \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n |\vec{M}_{iz}| = 0, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n (|\vec{P}_{yi}|x_i - |\vec{P}_{xi}|y_i) = 0\end{aligned}\tag{1.64}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi przestrzennego dowolnego układu sił jest, aby algebraiczne sumy rzutów wszystkich sił na trzy osie prostokątnego układu odniesienia były równe zeru oraz aby algebraiczne sumy momentów wszystkich sił względem tych trzech osi były równe zeru.

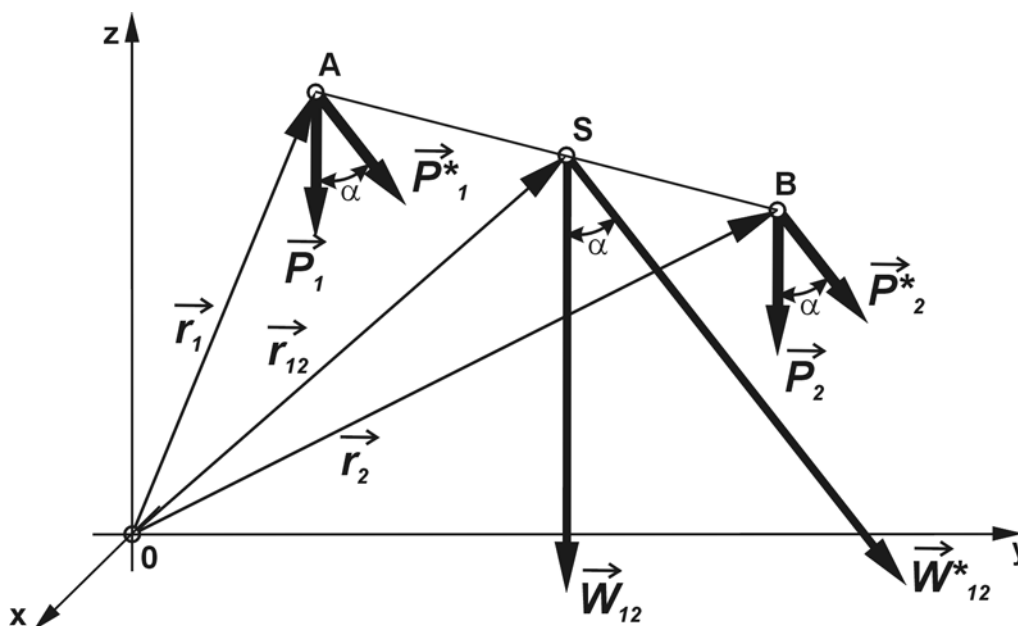
1.8 ŚRODKI CIĘŻKOŚCI

Zagadnienie wyznaczania środków ciężkości brył, figur płaskich i linii wiąże się ściśle z zagadnieniem wyznaczania środka sił równoległych, gdyż najczęściej spotykanym przykładem sił równoległych są siły ciężkości (tj. siły przyciągania cząstek ciała materialnego przez kulę ziemską), skierowane prosto do środka Ziemi. Siły te możemy traktować jako równoległe, gdyż wymiary ciał rozpatrywanych w zastosowaniach technicznych są bardzo małe w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej. Siły ciężkości są szczególnym przypadkiem sił objętościowych, a więc działają na każdy element objętości danego ciała.

1.8.1 Środek sił równoległych

Do rozważań przyjmijmy ciało sztywne, na które działa przestrzenny układ sił równoległych $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ o zgodnych zwrotach. Znajdźmy następnie taki punkt w przestrzeni, przez który będzie przechodzić wypadkowa przyjętego przestrzennego układu sił równoległych niezależnie od kierunku tych sił względem ciała. Szukamy, zatem punktu przecięcia się prostej działania wypadkowej przyjętego układu sił równoległych i prostej działania wypadkowej drugiego układu sił równoległych,

który powstał z przyjętego układu po obrocie wszystkich wektorów sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$, o ten sam kąt, przy zachowaniu ich równoległości. Ten punkt przecięcia S nazywamy środkiem sił równoległych (rys.1.35).



Rys. 1.35 Środek ciężkości układu sił równoległych

Przyjmijmy promienie-wektory \vec{r}_1 \vec{r}_2 wyznaczające odpowiednio punkty zaczepienia sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 . Prosta działania wypadkowej \vec{W}_{12} tych sił przecina odcinek AB w punkcie S . Zmieńmy kierunki działania sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 obracając je o pewien dowolny kąt α . Wówczas prosta działania nowej wypadkowej \vec{W}_{12}^* przetnie odcinek AB także w punkcie S . Zatem punkt S jest środkiem sił równoległych \vec{P}_1 i \vec{P}_2 . Jeżeli oznaczymy promień-wektor punktu S przez \vec{r}_{12} to na podstawie powyższego rysunku możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + A\vec{S} &= \vec{r}_{12} \\ \vec{r}_{12} + S\vec{B} &= \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Punkt S dzieli odcinek AB na części odwrotnie proporcjonalne do działających sił:

$$\frac{|A\vec{S}|}{|\vec{P}_2|} = \frac{|S\vec{B}|}{|\vec{P}_1|} \quad (1.66)$$

Ponieważ wektory $A\vec{S}$ i $S\vec{B}$ są liniowo zależne, więc powyższy wzór można zapisać w postaci:

$$\frac{|\vec{r}_{12}| - |\vec{r}_1|}{|\vec{P}_2|} = \frac{|\vec{r}_2| - |\vec{r}_{12}|}{|\vec{P}_1|} \quad (1.67)$$

Rozwiązując ostatnie równanie względem \vec{r}_{12} , otrzymamy:

$$|\vec{r}_{12}| = \frac{|\vec{r}_1|\vec{P}_1 + |\vec{r}_2|\vec{P}_2}{|\vec{P}_1| + |\vec{P}_2|} \quad (1.68)$$

Wzór powyższy określa położenie środka dwóch sił równoległych. Analogicznie dla środka układu n sił równoległych otrzymamy:

$$|\vec{r}_s| = \frac{\sum_{i=1}^n |\vec{r}_i|\vec{P}_i}{\sum_{i=1}^n |\vec{P}_i|} \quad (1.69)$$

Współrzędne wektora \vec{r}_s obliczymy ze wzorów:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i |\vec{P}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{P}_i|}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i |\vec{P}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{P}_i|}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i |\vec{P}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{P}_i|} \quad (1.70)$$

Położenie środka sił równoległych nie zależy od kierunku sił. Dlatego jeżeli wszystkie siły obrócimy o ten sam kąt zachowując ich równoległość, to położenie środka sił równoległych nie ulegnie zmianie.

1.8.2 Środki ciężkości brył, figur płaskich, linii

Na początek wyznaczmy środek ciężkości bryły. Określony w poprzednim punkcie środek sił równoległych w odniesieniu do sił ciężkości nazywamy środkiem ciężkości. Zatem siła, z jaką bryła jest przyciągana przez Ziemię, nazywa się siłą ciężkości. Siła ciężkości jest skierowana wzdłuż promienia kuli ziemskiej do jej środka. Do wyznaczenia środka ciężkości brył zastosujemy wzory na x_s, y_s, z_s przedstawione w punkcie powyżej. Podzielmy, zatem bryłę na elementarne objętości. Wówczas to ciężary oddzielnych objętości będą dostatecznie dokładnie przedstawiać przestrzenny układ sił równoległych (o ile rozmiar ciała jest dostatecznie mały w porównaniu z promieniem Ziemi). Oznaczmy wartość siły ciężkości elementarnej objętości przez $|\vec{G}_i|$. Wypadkowa wszystkich elementarnych sił \vec{G}_i nazywa się ciężarem bryły. Punkt, przez który przechodzi prosta działania tej wypadkowej (przy dowolnym położeniu ciała względem Ziemi) nazywa się środkiem ciężkości bryły. Środkiem ciężkości bryły jest środek sił równoległych \vec{G}_i przyłożonych do elementarnych cząstek bryły. Wyznaczając środek ciężkości ciała podstawiamy we wzorach na współrzędne środka układu sił równoległych x_s, y_s, z_s z punktu 1.8.1 \vec{G}_i zamiast \vec{P}_i czyli:

$$\sum_{i=1}^n |\vec{P}_i| = \sum_{i=1}^n |\vec{G}_i| = |\vec{G}| \quad (1.71)$$

otrzymamy

$$|\vec{r}_s| = \frac{\sum_{i=1}^n |\vec{r}_i|\vec{G}_i}{\sum_{i=1}^n |\vec{G}_i|} \quad (1.72)$$

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i |\vec{G}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{G}_i|}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i |\vec{G}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{G}_i|}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i |\vec{G}_i|}{\sum_{i=1}^n |\vec{G}_i|} \quad (1.73)$$

Powyższe wzory wyznaczają położenie środka ciężkości bryły. Oznaczając dla jednorodnej bryły ciężar właściwy przez γ , a objętość elementarnej części przez ΔV_i , to wzory na współrzędne środka ciężkości x_s, y_s, z_s po podzieleniu przez γ przyjmą postać:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta V_i}{V}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta V_i}{V}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta V_i}{V} \quad (1.74)$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy:

$$x_s = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_s = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_s = \frac{\int z dV}{V} \quad (1.75)$$

gdzie: $V = \int_V dV$ jest objętością ciała.

Dla figur płaskich można przeprowadzić podobne rozważania. Zatem, elementarnym powierzchniom figury płaskiej F przyporządkujemy siłę ciężkości $|\vec{G}_i| = \beta \Delta F_i$, gdzie β jest ciężarem przypadającym na jednostkę pola powierzchni figury płaskiej. Wówczas współrzędne środka ciężkości wynoszą:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{F}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta F_i}{F}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta F_i}{F} \quad (1.76)$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy:

$$x_s = \frac{\int x dF}{F}, \quad y_s = \frac{\int y dF}{F}, \quad z_s = \frac{\int z dF}{F} \quad (1.77)$$

gdzie: $F = \int_F dF$ jest powierzchnią całkowitą.

Powyższe wzory możemy napisać analogicznie dla linii, przyjmując $|\vec{G}_i| = \alpha \Delta L_i$, gdzie α jest ciężarem przypadającym na jednostkę długości.

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i L_i}{L}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \Delta L_i}{L}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \Delta L_i}{L} \quad (1.78)$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy:

$$x_s = \frac{\int x dL}{L}, \quad y_s = \frac{\int y dL}{L}, \quad z_s = \frac{\int z dL}{L} \quad (1.79)$$

gdzie: $L = \int_L dL$ jest długością rozpatrywanej linii.

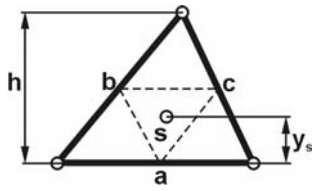
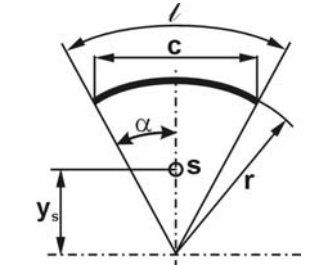
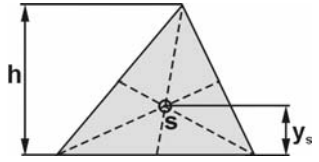
Przy wyznaczaniu środków ciężkości bardzo pomocne są pewne twierdzenia, które wynikają wprost z poprzednich definicji:

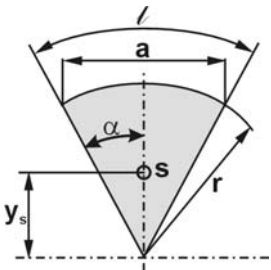
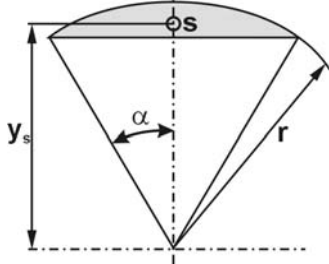
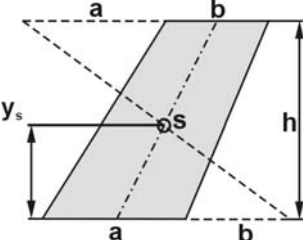
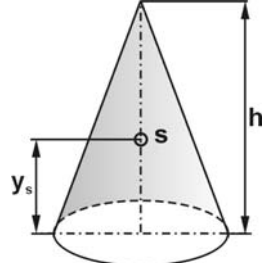
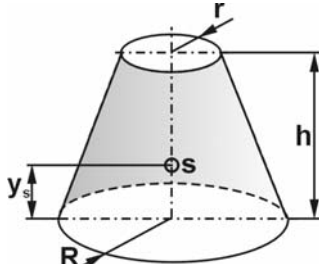
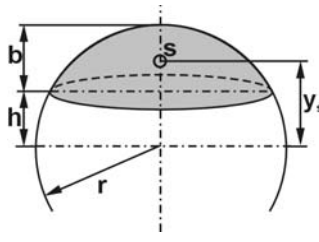
- Środek ciężkości układu (bryła, figura płaska, lub linia) mającego środek symetrii leży w tym środku.
- Jeżeli układ ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży na tej płaszczyźnie.
- Jeżeli układ ma oś symetrii, to środek ciężkości leży na tej osi.
- Jeżeli układ ma dwie lub więcej osi symetrii, to środek ciężkości leży w punkcie przecięcia się tych osi.
- Rzut środka ciężkości figury płaskiej na płaszczyznę jest środkiem ciężkości rzutu tej figury na daną płaszczyznę.

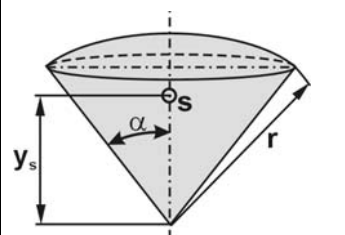
W tabelicy 1.1 podano wzory na środki ciężkości wybranych linii, figur i brył jednorodnych.

Tabela 1.1

Położenie środka ciężkości wybranych linii, figur i brył jednorodnych.

	Obwód trójkąta	<p>Środek ciężkości znajduje się w okręgu koła wpisanego w trójkąt, którego wierzchołkami są środki boków danego trójkąta:</p> $y_s = \frac{h}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$
	Łuk koła	<p>Środek ciężkości leży na osi symetrii w odległości od środka koła:</p> $y_s = r \frac{c}{l} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ <p>kąt α w radianach</p>
	Pole trójkąta	<p>Środek ciężkości znajduje się w punkcie przecięcia środkowych. Odległość środka ciężkości od podstawy:</p> $y_s = \frac{h}{3}$

	<p>Pole wycinka koła</p>	<p>Środek ciężkości leży na osi symetrii w odległości od środka:</p> $y_s = \frac{2ra}{3l} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ <p>kąt α w radianach</p>
	<p>Pole odcinka koła</p>	<p>Środek ciężkości leży na osi symetrii w odległości od środka koła:</p> $y_s = \frac{4r \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ <p>kąt α w radianach</p>
	<p>Pole trapezu</p>	<p>Środek ciężkości leży na przecięciu linii AB z linią łączącą środki boków równoległych:</p> $y_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$
	<p>Stożek</p>	<p>Środek ciężkości leży na osi symetrii stożka w odległości od podstawy:</p> $y_s = \frac{h}{3}$
	<p>Stożek ścięty</p>	<p>Środek ciężkości leży na prostej łączącej środki ciężkości podstawy dolnej i górnej w odległości od podstawy dolnej:</p> $y_s = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$
	<p>Odcinek kuli</p>	<p>Środek ciężkości leży na osi symetrii stożka w odległości od środka kuli:</p> $y_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - b)^2}{3r - b}$

	Wycinek kuli	Środek ciężkości leży na osi symetrii stożka w odległości od środka kuli: $y_s = \frac{3}{8} \cdot r(1 + \cos \alpha)$
-----------------------------------------------------------------------------------	--------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1.9 TARCIE

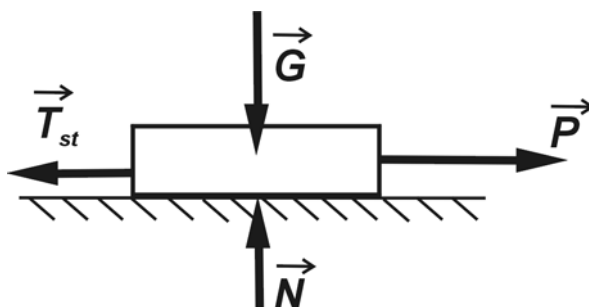
Tarciem zewnętrznym (krótko: tarciem) nazywa się całokształt zjawisk, występujących między stykającymi się ciałami stałymi, spowodowanych działaniem siły normalnej dociskającej te ciała oraz siły stycznej przemieszczających je względem siebie (tarcie kinetyczne) bądź też usiłujących je przemieścić (tarcie statyczne). Są, więc one siłami biernymi i składowymi reakcji, które wystąpią dla zachowania równowagi stykających się ciał.

W zjawiskach tarcia ciał stałych biorą w istocie rzeczy trzy ciała: powierzchniowe i podpowierzchniowe obszary materiału trących się ciał oraz środowisko, w którym przebiega tarcie. Przyczyną powstawania sił tarcia jest chropowatość powierzchni ciał, które pod wpływem obciążeń zewnętrznych wykazują tendencję ruchu względem siebie. Jeżeli wartość liczbową chropowatości maleje (wpływ obróbki mechanicznej i smarowania), to również maleją siły tarcia, stając się równe zero w przypadku powierzchni idealnie gładkich. Z tego względu tarcie dzieli się na tarcie: suche, graniczne, półsuche, półpłynne, płynne. Tarcie dzieli się również w zależności od charakteru ruchu między trącymi się ciałami na: tarcie posuwiste i tarcie toczenia.

Tarcie powoduje dwa ważne dla techniki skutki: opór względnego przemieszczania (siłę tarcia) i zużywanie trących się ciał. Siła tarcia jest w parach ruchowych czynnikiem szkodliwym, powodującym straty energii. W wielu przypadkach jest ona pożytecznie wykorzystywana w celu: sprzęgania, hamowania, uzyskania przyczepności (taśmociągi, hamulce, maszyny wyciągowe w kopalniach, koła napędzające pojazdy kołowe itp.). Z energetycznego punktu widzenia tarcie jest procesem, w którym następuje przemiana energii kinetycznej lub pracy sił utrzymujących trące się ciała w ruchu ustalonym w inne postacie energii (cieplną, elektryczną, energię fal dźwiękowych itp.).

1.9.1 Tarcie statyczne. Siła tarcia statycznego

Siła tarcia statycznego jest to reakcja styczna (styczna składowa całkowitej reakcji), przeciwdziałająca przesunięciu ciał względem siebie (rys.1.36).



Rys. 1.36 Siła tarcia w ruchu posuwistym

Ogólnie, zatem siłę tarcia można zdefiniować jako siłę oporu, zapobiegającą ruchowi, który by powstał gdyby tarcia nie było. Jest, więc to siła bierna, która wystąpi dla zachowania równowagi stykających się ciał. Zależność między graniczną wartością siły tarcia \vec{T} , a naciskiem \vec{N} określają prawa tarcia, ustalone na podstawie wielu doświadczeń wykonanych przez Coulomba i Morena dla różnego rodzaju stykających się powierzchni.

- Siła tarcia jest niezależna od wielkości powierzchni stykających się ze sobą ciał i zależy jedynie od ich rodzaju,
- Wartość siły tarcia dla ciała znajdującego się w spoczynku może zmienić się od zera do granicznej wartości, proporcjonalnej do całkowitego nacisku normalnego,
- W przypadku, gdy ciało ślizga się po pewnej powierzchni, siła tarcia jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu i jest mniejsza od granicznej wartości.

Na podstawie praw tarcia można określić zależności między siłą tarcia \vec{T} , a naciskiem normalnym \vec{N} . Największa wartość siły przesuwej, która przy danym nacisku jeszcze nie naruszy stanu względnego spoczynku, jest równa tak zwanej rozwiniętej siły tarcia statycznego $|\vec{T}_{st\ max}|$ (rys.1.37).

$$|\vec{T}_{st\ max}| = \mu |\vec{N}| \quad (1.80)$$

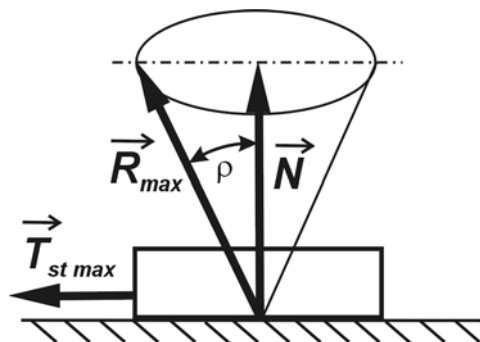
gdzie: $|\vec{N}|$ - jest reakcją normalną, μ - jest tak zwanym współczynnikiem tarcia statycznego.

Ciała pozostają w stanie równowagi względnej, dopóki wartość siły stycznej \vec{P} nie przekroczy wartości rozwiniętego tarcia statycznego, to jest, gdy:

$$|\vec{P} = \vec{T}| \leq \mu |\vec{N}| \quad (1.81)$$

Prawo tarcia statycznego jest więc nierównością. Przy danej wartości \vec{N} całkowita reakcja, \vec{R} może przyjmować różne wartości liczbowe i tworzyć różne kąty z normalną. Największą wartość ma całkowita reakcja $|\vec{R}_{max}|$ przy $|\vec{T}| = |\vec{T}_{max}|$ (rys.1.37). Kąt ρ utworzony przez reakcję $|\vec{R}_{max}|$ z normalną (największy z możliwych kątów wychylenia) nazywa się kątem tarcia. Tangens kąta tarcia jest równy współczynnikowi tarcia statycznego:

$$\operatorname{tg} \rho = \mu = \frac{|\vec{T}_{st\ max}|}{|\vec{N}|} \quad (1.82)$$



Rys. 1.37 Stożek tarcia

Ponieważ ciało nie może przemieszczać się w dowolnym kierunku, więc siła tarcia statycznego mająca zwrot przeciwny do zamierzonej prędkości względnej, będzie przyjmowała różne kierunki. Maksymalna reakcja $|\vec{R}_{\max}|$ zakreśla wtedy powierzchnię stożka (w przypadku izotropowych własności ciałnych - stożka kołowego), zwanego stożkiem tarcia.

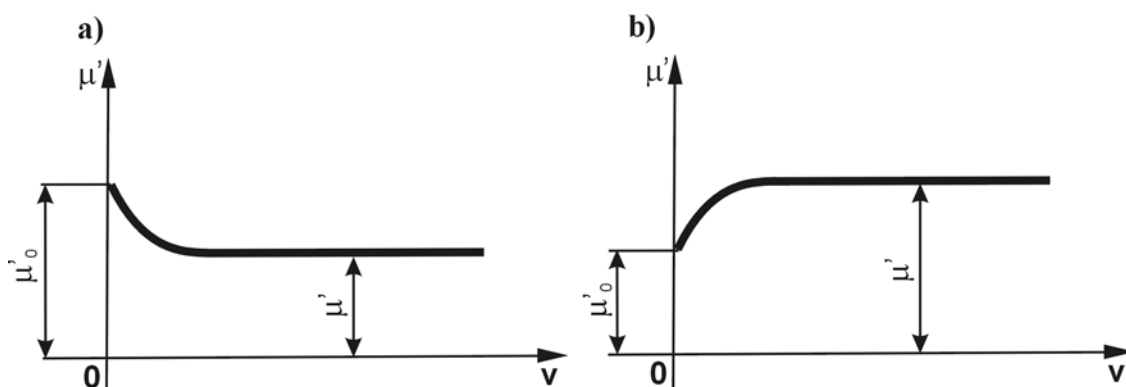
1.9.2 Tarcie kinetyczne

Jeżeli siła tarcia osiągnie swą graniczną wartość, czyli tarcie jest całkowicie rozwinięte, siła tarcia przy ruchu ma zwrot przeciwny do zwrotu prędkości względnej ciała, a jej wartość liczbową jest równością:

$$|\vec{T}| = \mu' |\vec{N}| \quad (1.83)$$

gdzie: μ' współczynnikiem tarcia ślizgowego przy ruchu (tzw. kinetyczny współczynnik tarcia).

Współczynnik tarcia μ' zależy od rodzaju materiału, chropowatości powierzchni oraz od prędkości względnej. Dla niektórych materiałów współczynnik tarcia maleje z prędkością (np. stal po stali na sucho - rys.1.38.a, a dla innych np. tworzyw sztucznych, rośnie ze wzrostem prędkości względnej - rys.1.38.b.



Rys. 1.38 Zależność współczynnika tarcia od prędkości

Często podczas rozwiązywania zadań z uwzględnieniem tarcia należy znać wartość współczynnika tarcia. Poniżej w tabelicy 1.2 podano szereg wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego dla najczęściej spotykanych materiałów.

Tablica.1.2

Wybrane współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego

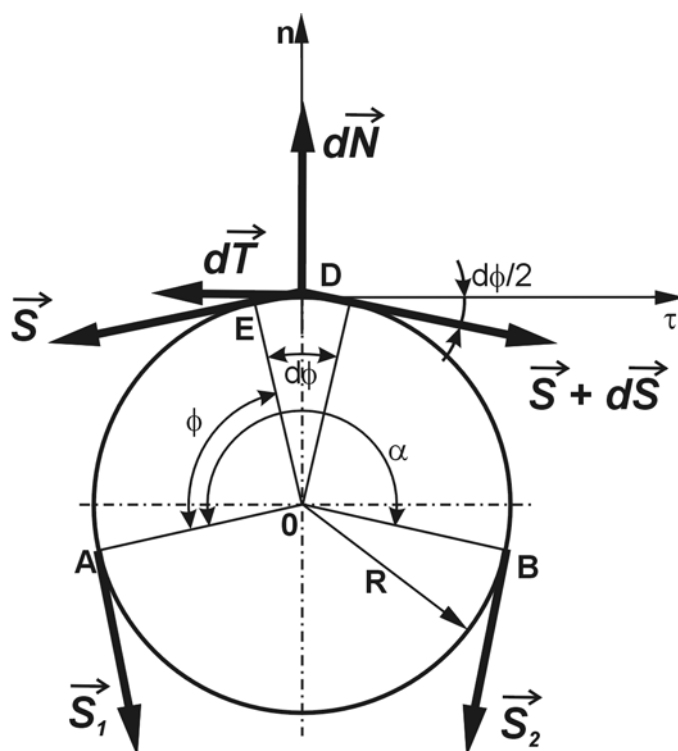
Lp.	Materiały ciał	Tarcie styczne μ [-]			Tarcie kinetyczne μ' [-]		
		Na sucho	Smarowane	Zwilżone wodą	Na sucho	Smarowane	Zwilżone wodą
1	Stal po stali	0,15	0,1	-	0,1	0,05	-
2	Stal po żeliwie, miedzi lub brązie	0,2	0,1	-	0,16	0,05	-
3	Metal po drewnie	0,55	0,1	-	0,35	0,05	0,24
4	Drewno po drewnie	0,65	0,2	0,7	0,3	0,1	0,25
5	Skóra po metalu	0,6	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
6	Skóra po drewnie	0,47	-	-	0,27	-	-

7	Guma po metalu	-	-	-	0,8	0,5	-
8	Żeliwo po żelwie	0.22	-	-	0.1	-	-
9	Stal po lodzie	-	-	0.03	-	-	0.015

1.9.3 Tarcie ciągien

Tarciem ciągna o krążek (bęben) nazywamy siły tarcia występujące między powierzchniami cylindrycznymi i cięgnami, taśmami, sznurami, pasami lub linami nawiniętymi na nie. Siły te w hamulcach taśmowych hamują wzajemny poślizg hamulca i taśmy, natomiast w przypadku kół pasowych nie dopuszczają do wzajemnego poślizgu koła i pasa.

W celu omówienia problemu tarcia ciągien, rozpatrzmy giętkie cięgno stykające się z powierzchnią walca. Na rys.1.39 przedstawiony jest walec a na nim cięgno stykające się z jego powierzchnią wzdłuż łuku ADB . Kąt ADB odpowiada kątowi środkowemu α , zwanemu kątem opasania.



Rys. 1.39 Tarcie ciągien

Współczynnik tarcia ciągna o walec równy jest μ . Do jednego końca cięgna przyłożona jest siła \vec{S}_1 . W celu zachowania warunku równowagi sił należy do drugiego końca cięgna przyłożyć siłę \vec{S}_2 . Wartość siły \vec{S}_2 znajdziemy rozpatrując warunki równowagi sił, przyłożonych do elementu walca DE o długości $ds = R d\phi$ (R jest promieniem walca). Na element ten działają w punktach D i E siły naciągu o wartości $|\vec{S}| + d|\vec{S}|$ i $|\vec{S}|$, oraz w połowie jego długości normalna reakcja o wartości $d|\vec{N}|$ i siła tarcia o wartości $d|\vec{T}|$. Zrzutujemy siły na prosta normalny i styczny. Otrzymamy wówczas równania równowagi:

$$\begin{aligned}
 (|\vec{S}| + d|\vec{S}|) \cos \frac{d\varphi}{2} - |\vec{S}| \cos \frac{d\varphi}{2} - d|\vec{T}| &= 0 \\
 d|\vec{N}| - (|\vec{S}| + d|\vec{S}|) \sin \frac{d\varphi}{2} - |\vec{S}| \sin \frac{d\varphi}{2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

przyjmując:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}, \quad \cos \frac{d\varphi}{2} = 1
 \tag{1.85}$$

otrzymujemy (pomijając wyrazy małe wyższego rzędu):

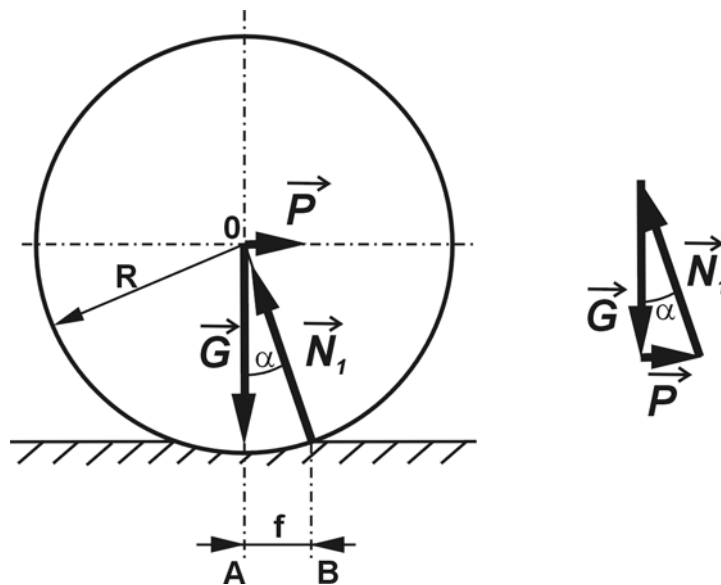
$$\begin{aligned}
 d|\vec{S}| &= d|\vec{T}| \\
 d|\vec{N}| - \vec{S}d\varphi &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.86}$$

Ponieważ rozpatrywane położenie jest położeniem granicznym (tzn. na granicy poślizgu), więc $d|\vec{T}| = \mu d|\vec{N}|$. Podstawiając wartości $d|\vec{T}|$ i $d|\vec{N}|$, otrzymujemy: $d|\vec{S}| = \mu|\vec{S}|d\varphi$, a po scałkowaniu w granicach od $\varphi = 0$ do $\varphi = \alpha$, otrzymamy tzw. wzór Eklera wyrażający poszukiwaną wartość siły \vec{S}_2 :

$$\ln \frac{|\vec{S}_2|}{|\vec{S}_1|} = \mu\alpha, \quad \text{lub} \quad |\vec{S}_2| = |\vec{S}_1| e^{\mu\alpha}
 \tag{1.87}$$

1.9.4 Tarcie toczenia

Toczeniu walca po odkształcalnej powierzchni towarzyszą skomplikowane zjawiska tarcia. Tarcie toczenia lub opór toczenia powstaje przy usiłowaniu przetoczenia walca o ciężarze \vec{G} po poziomej płaszczyźnie. Gdyby walec toczący się po podłożu i podłoże były idealnie sztywne, to styk występowałby tylko wzdłuż tworzącej walca, przechodzącej przez punkt A (rys.1.40).



Rys. 1.40 Tarcie toczenia

Scharakteryzujemy toczenie siłą oporu toczenia. Jeżeli przyłożymy do osi rolki siłę \vec{P} , to między rolką a płaszczyzną, na której ona spoczywa, powstają siły tarcia. Przeanalizujemy przypadek, kiedy siła \vec{P} jest równoległa do poziomej płaszczyzny. Z doświadczenia wiadomo, że przy zmianie wartości siły \vec{P} od 0 do pewnej granicznej wartości, rolka pozostaje w spoczynku (można tak przyjąć z wystarczającą dla praktyki dokładnością), to znaczy siły działające na rolkę równoważą się. Reakcja \vec{N}_1 powinna przechodzić przez oś rolki, co wynika z warunku równowagi dla trzech sił nierównoległych. W związku z tym punkt przyłożenia reakcji, \vec{N}_1 musi być przesunięty od pionu OA o pewną odległość f . W przeciwnym przypadku reakcja \vec{N}_1 nie miałaby składowej poziomej koniecznej do zrównoważenia siły \vec{P} . Graniczną wartość siły \vec{P}_{gr} , przy której jeszcze nie będzie toczenia, można znaleźć z podobieństwa trójkątów OAB i trójkąta sił $\vec{N}_1, \vec{G}, \vec{P}$. Przyjmując $OA \cong R$, otrzymamy:

$$\frac{|\vec{P}_{gr}|}{|\vec{G}|} = \frac{f}{R} \quad (1.88)$$

skąd

$$|\vec{P}_{gr}| = \frac{f}{R} |\vec{G}| \quad (1.89)$$

Wielkość f mierzymy w jednostkach długości i nazywamy ramieniem oporu toczenia. Z ostatniego wzoru można również obliczać opór toczenia przy ruchu ustalonym. Stosunek f/R dla wielu elementów maszyn, wykonanych z różnych materiałów, ma wartość znacznie mniejszą niż odpowiednie współczynniki tarcia ślizgowego. Dlatego też w technice, tam gdzie jest to możliwe, dąży się do zastąpienia tarcia ślizgowego tarcem toczenia (łożyska toczne, koła rolki itp.)

Poniżej w tabelicy 1.3 podano wartości wybranych współczynników tarcia tocznego f (ramię oporu toczenia).

Tabela 1.3

Wybrane współczynniki tarcia tocznego

Lp.	Materiał koła i podłoża	Współczynnik oporu toczenia f [cm]
1	Koło żeliwne po żelwie	0,005
2	Koło stalowe po stali	0,005
3	Koło drewniane po drewnie	0,05-0,15
4	Koło drewniane po kamieniu	0,13
5	Koło drewniane po stali	0,03-0,04
6	Koło stalowe hartowane po stali hartowanej	0,0005-0,001
7	Koło samochodowe po asfalcie	0,24
8	Koło samochodowe po gruncie trawiastym	1,0-1,5

1.10 PYTANIA DO ROZDZIAŁU I

1. Podać definicję punktu materialnego.
2. Podać definicję ciała sztywnego.
3. Podać definicję dwójki zerowej.
4. Podać twierdzenie o przesuwaniu siły wzdłuż jej prostej działania.
5. Omówić sposób wyznaczania wypadkowej dwóch sił nierównoległych na płaszczyźnie.
6. Podać wzór na wyznaczenie wartości liczbowej wypadkowej dwóch sił nierównoległych na płaszczyźnie.

7. Omówić zagadnienie wypadkowej dwóch sił działających wzdłuż tej samej prostej.
8. Wyjaśnić pojęcie sił zewnętrznych i podać ich podział.
9. Podać trzecie prawo sformułowane przez Newtona.
10. Co to jest reakcja?
11. Co rozumiemy przez więzy?
12. Podać zasadę osowbadzania od więzów.
13. Wymienić rodzaje więzów i narysować je wraz z zaznaczonymi siłami reakcji.
14. Podać twierdzenie o trzech siłach.
15. Podać analityczny sposób przedstawienia siły i wieloboku sił.
16. Co rozumiemy pod pojęciem wektora głównego?
17. Jaki układ nazywamy zbieżnym?
18. Określić analityczne warunki równowagi zbieżnego układu sił (płaskiego i przestrzennego).
19. Jak wyznaczamy wypadkową dwóch sił równoległych?
20. Co rozumiemy przez parę sił?
21. Co rozumiemy przez ramię pary sił?
22. Co rozumiemy przez moment pary sił?
23. Czy można przenieść parę sił do dowolnej płaszczyzny równoległej do jej płaszczyzny działania?
24. Czy działanie pary sił na ciało sztywne ulegnie zmianie jeżeli parę przesuniemy w dowolne położenie w jej płaszczyźnie działania?
25. Do czego sprowadza się układ par sił działających sztywne w jednej płaszczyźnie?
26. Jaki jest warunek równowagi par sił działających na ciało sztywne w jednej płaszczyźnie?
27. Moment siły względem punktu jako iloczyn wektorowy. Podać jego własności.
28. Co to jest moment siły względem osi.
29. Określić analityczne warunki równowagi płaskiego i przestrzennego dowolnego układu sił.
30. Podać równania równowagi układu sił równoległych.
31. Co rozumiemy przez redukcję układu sił?
32. Jakie są możliwe przypadki redukcji płaskiego dowolnego układu sił?
33. Kiedy płaski dowolny układ sił redukuje się do pary sił?
34. Kiedy płaski dowolny układ sił pozostaje w równowadze?
35. Co rozumiemy przez redukcję układu sił?
36. Wymienić wszystkie przypadki, które zachodzą przy redukcji dowolnego przestrzennego układu sił.
37. Kiedy przestrzenny dowolny układ sił redukuje się do wypadkowej?
38. Kiedy przestrzenny dowolny układ sił redukuje się do pary sił?
39. Kiedy przestrzenny dowolny układ sił redukuje się do skrętnika?
40. Co to jest skrętnik (śruba statyczna)?
41. Co to jest środek sił równoległych?
42. Określić pojęcie siły ciężkości i środka ciężkości.
43. Podać wzory na wyznaczanie środków ciężkości brył, figur płaskich i linii.
44. Podaj twierdzenia pomocne przy wyznaczaniu środków ciężkości.
45. Podać prawa tarcia sformułowane przez Coulomba.
46. Tarcie kinetyczne a statyczne.
47. Podać definicję siły tarcia statycznego.
48. Kiedy ciała pozostają w stanie równowagi względnej (tarcie statyczne)?
49. Co to jest kąt tarcia?
50. Co to jest stożek tarcia?
51. Jaki jest związek między napięciami w cięgnie nawiniętym na chropowaty krążek (wzór Eulera)?
52. Omówić istotę tarcia tocznego.
53. Co to jest ramię oporu tocznienia (współczynnik tarcia tocznego)?