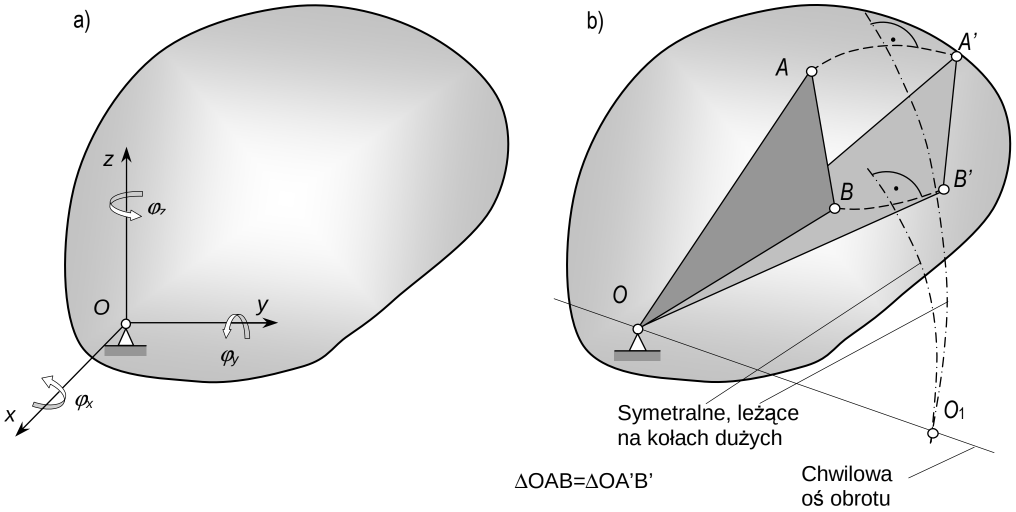
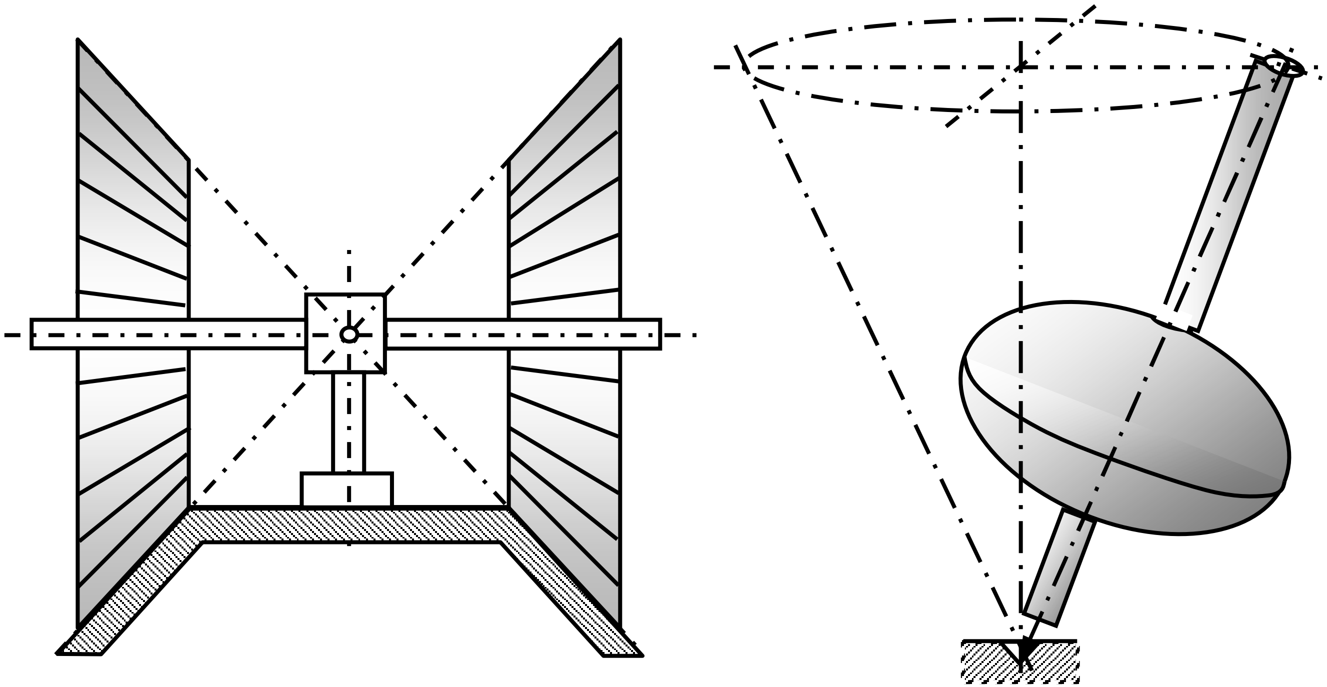
Ruch kulisty bryły. Kinematyka

Ruchem kulistym nazywamy ruch, w czasie którego jeden z punktów bryły jest stale nieruchomy. Ruch kulisty jest obrotem dookoła *chwilowej osi obrotu* (oś ta zmienia swoje położenie w czasie).

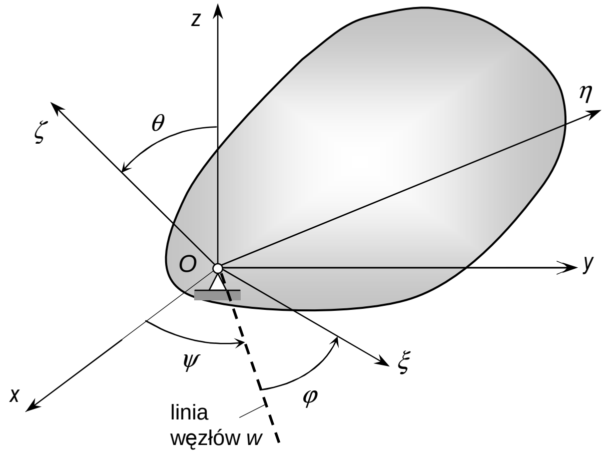


Ruch kulisty bryły: a) obrót wokół punktu, b) obrót dookoła chwilowej osi obrotu



Przykłady brył w ruchu kulistym

Położenie. Bryła, której jeden punkt jest unieruchomiony ma 3 stopnie swobody. Jej położenie jest opisane w sposób jednoznaczny jedynie za pomocą kątów, zwanych ***kątami Eulera***. Dla określenia tych kątów wprowadzamy układ współrzędnych związanych z bryłą ξ, η, ζ.



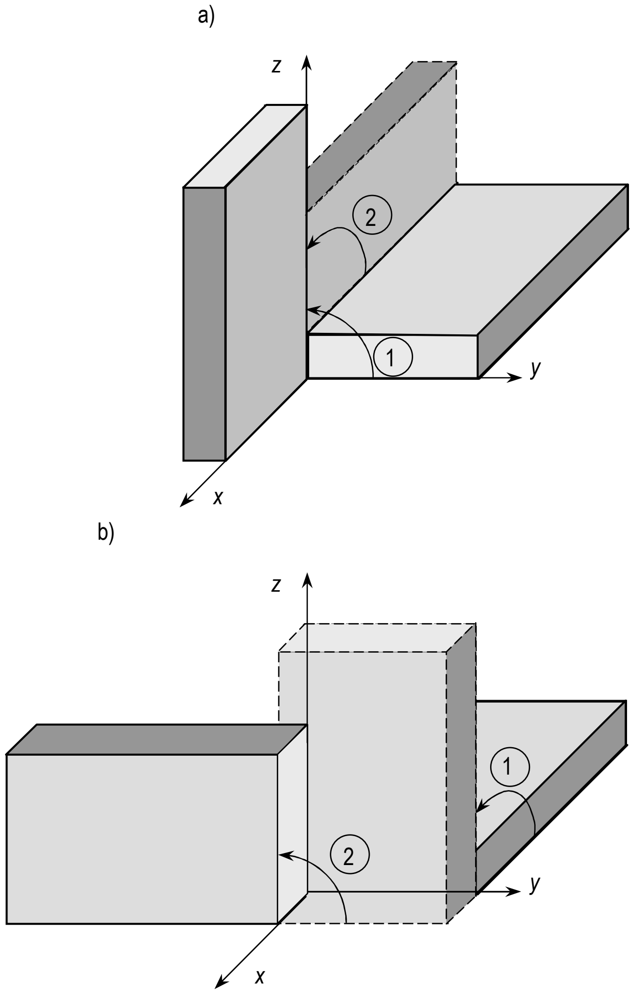
Opis ruchu kulistego bryły za pomocą kątów Eulera

Wyobraźmy sobie, że początkowo osie układu nieruchomego x, y, z pokrywają się z osiami układu ξ, η, ζ. Następnie bryła wykonuje obroty:

- wokół osi nieruchomej z o kąt ψ (kąt precesji), po wykonaniu tego obrotu oś ξ znajdzie się na linii zwanej linią węzłów w,
- wokół osi ξ o kąt θ (kąt nutacji), ściśle wokół linii węzłów w,
- wokół osi ζ o kąt φ (kąt obrotu własnego).

Kolejność „wykonywania” powyższych obrotów jest dowolna i nie ma ona wpływu na położenie końcowe bryły.

Gdybyśmy chcieli za współrzędne bryły przyjąć kąty będące obrotami wokół osi układu nieruchomego x, y, z, wówczas kolejność wykonywania obrotów decydowałaby o położeniu końcowym bryły. Kąty φ_x, φ_y, φ_z nie opisują więc jednoznacznie położenia bryły (można je przyjąć tylko dla małych obrotów).



Wpływ kolejności „wykonywania" obrotów bryły na położenie końcowe: a) obroty w kolejności – wokół osi x potem y, b) obroty w kolejności – wokół osi y potem x

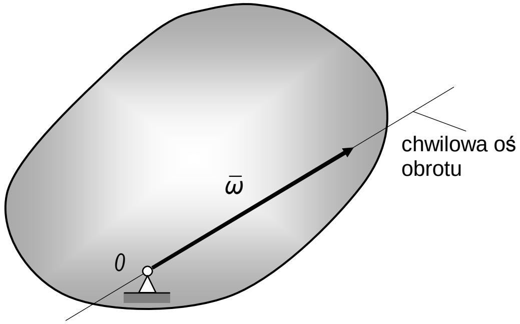
Zatem kąty: $\psi = \psi(t)$,

$$\theta = \theta(t),$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

są współrzędnymi bryły w ruchu kulistym.

Prędkość bryły. Ponieważ ruch kulisty jest obrotem wokół chwilowej osi obrotu, wektor prędkości kątowej leży na tej osi.



Chwilowa oś obrotu bryły w ruchu kulistym

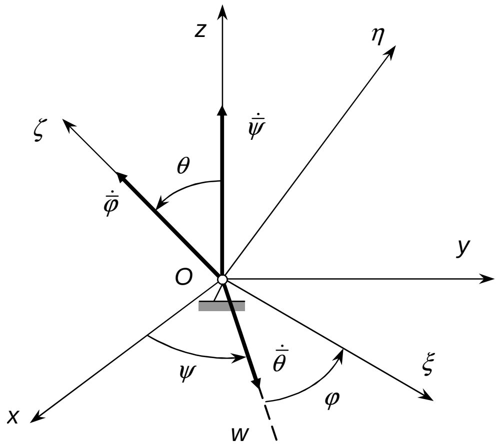
Wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$ możemy podać zarówno w nieruchomym układzie osi x, y, z

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} \; ,$$

jak i w układzie związanym z bryłą

$$\bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_\xi + \omega_\eta \bar{e}_\eta + \omega_\zeta \bar{e}_\zeta \; .$$

Znając prędkości: $\dot{\varphi}$ – obrotu własnego, $\dot{\psi}$ – precesji oraz $\dot{\theta}$ – nutacji,



Wektory prędkości kątowych: obrotu własnego $\dot{\varphi}$, precesji $\dot{\psi}$ i nutacji $\dot{\theta}$

Składowe wektora $\overline{\omega}$, w układzie nieruchomym x, y, z oraz ruchomym ξ, η, ζ obliczamy z zależności:

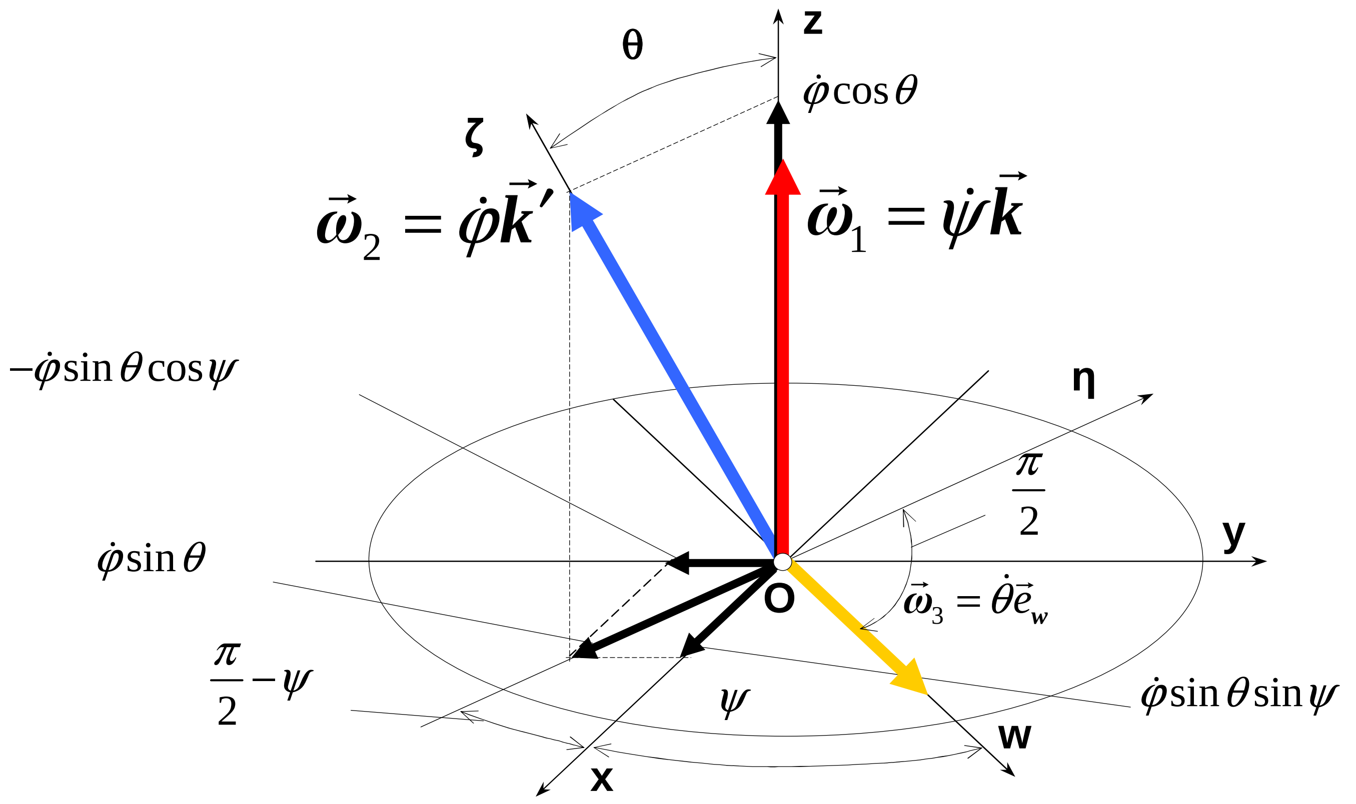
$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ -\sin\theta\cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \cos\theta & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}.$$

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 1 & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

natomiast: $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$ - prędkości zmian kątów *Eulera*.

Możemy też wektor prędkości kątowej bryły w ruchu kulistym przedstawić w postaci $\overline{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \overline{e}_\zeta + \dot{\psi} \cdot \overline{k} + \dot{\theta} \cdot \overline{e}_w$

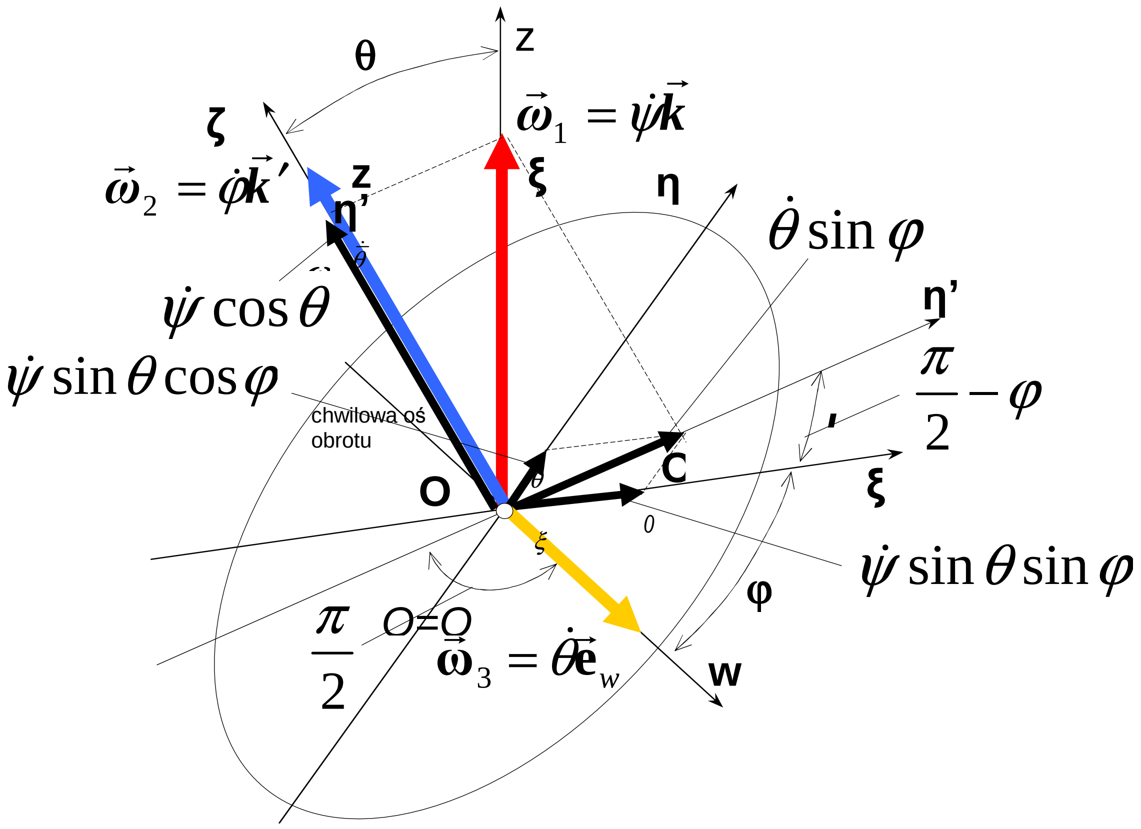
W celu znalezienia składowych prędkości kątowej w układzie x,y,z obliczamy poszczególne jej składowe sumując algebraicznie odpowiednie składowe wektorów prędkości kątowych $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2 \overline{\omega}_3$ ’



Transformacja do układu nieruchomego: *x,y,z*

	$\overline{\omega}_1 = \dot{\psi} \cdot \overline{k}$	$\overline{\omega}_2 = \dot{\varphi} \cdot \overline{k}'$	$\overline{\omega}_3 = \dot{\theta} \cdot \overline{e}_w$
ω_x	0	$\dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi$	$\dot{\theta} \cdot \cos\psi$
ω_y	0	$-\dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi$	$\dot{\theta} \cdot \sin\psi$
ω_z	$\dot{\psi}$	$\dot{\varphi} \cdot \cos\theta$	0

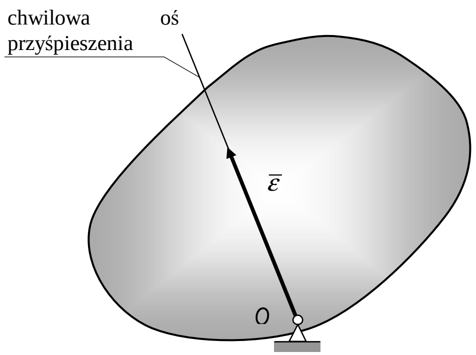
W celu znalezienia składowych prędkości kątowej w układzie ξ,η,ζ obliczamy poszczególne jej składowe sumując algebraicznie odpowiednie składowe wektorów prędkości kątowych $\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2\overline{\omega}_3$ '



Transformacja do układu ruchomego: ξ, η, ζ

	$\overline{\omega}_1 = \dot{\psi} \cdot \overline{k}$	$\overline{\omega}_2 = \dot{\varphi} \cdot \overline{k}'$	$\overline{\omega}_3 = \dot{\theta} \cdot \overline{e}_w$
ω_ξ	$\dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$	0	$\dot{\theta} \cdot \cos\varphi$
ω_η	$\dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$	0	$-\dot{\theta} \cdot \sin\varphi$
ω_ζ	$\dot{\psi} \cdot \cos\theta$	$\dot{\varphi}$	0

Przyspieszenie. Wektor przyspieszenia kątowego bryły w ruchu kulistym leży na chwilowej osi przyspieszenia.



Chwilowa oś przyśpieszenia bryły w ruchu kulistym

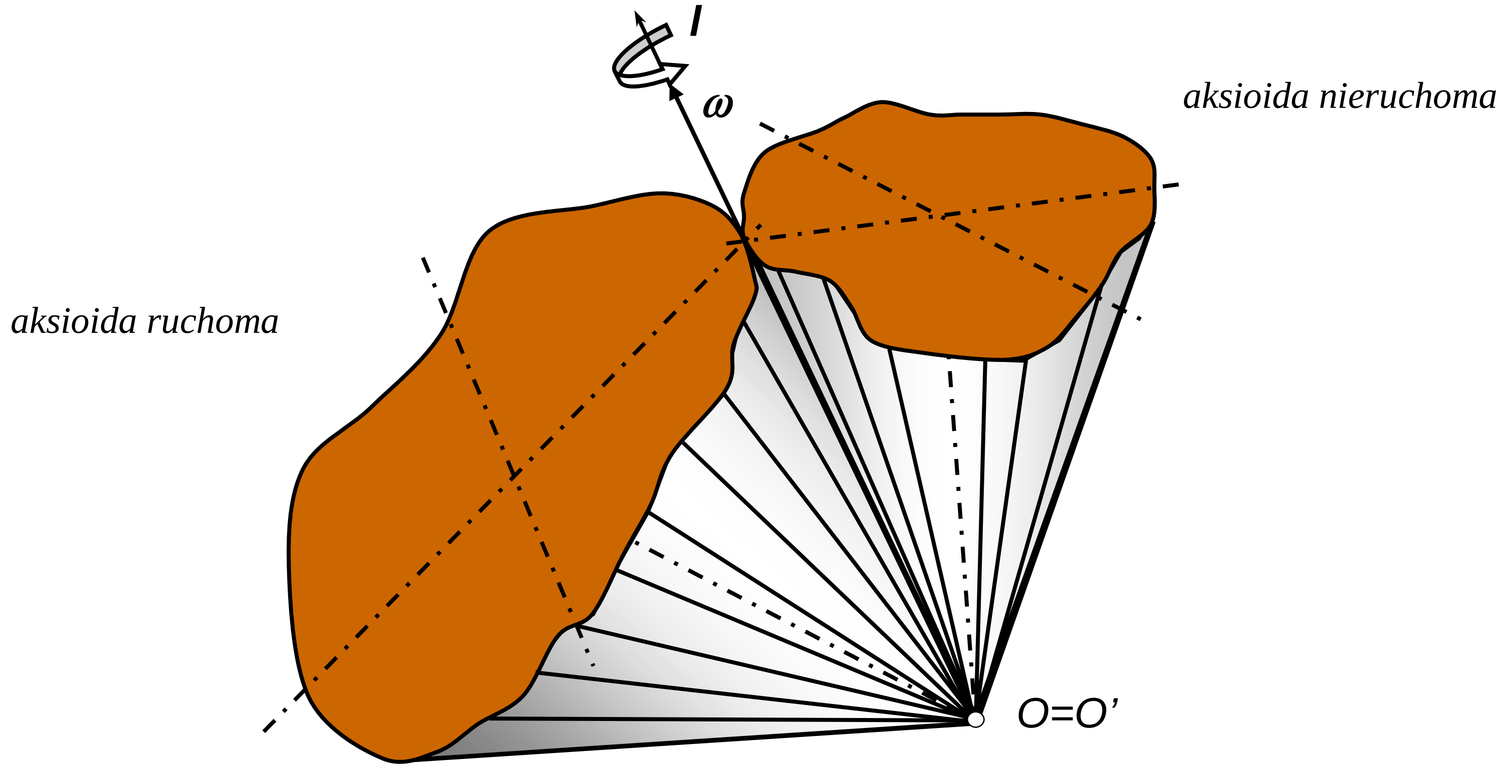
Wektor przyspieszenia kątowego możemy podać tak w nieruchomym układzie osi *x, y, z*

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \varepsilon_x \overline{i} + \varepsilon_y \overline{j} + \varepsilon_z \overline{k} \ ,$$

jak i w ruchomym układzie osi ξ, η, ζ

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \varepsilon_\xi \overline{e}_\xi + \varepsilon_\eta \overline{e}_\eta + \varepsilon_\zeta \overline{e}_\zeta \ .$$

W czasie ruchu kulistego bryły sztywnej chwilowa oś obrotu zmienia swoje położenie względem nieruchomego układu odniesienia *U* oraz względem poruszającej się bryły. Przechodzi ona jednak zawsze przez środek *O* ruchu kulistego. Z tego względu chwilowe osie obrotu muszą leżeć na pewnej powierzchni stożkowej o wierzchołku w punkcie *O*. Podobnie, miejscem geometrycznym chwilowych osi obrotu w układzie ruchomym *U'* jest powierzchnia innego stożka, o wierzchołku w punkcie *O*. Powierzchnie te nazywają się ***aksoidami (aksioida ruchoma i aksioida nieruchoma)***.



Precesja regularna (szczególny przypadek ruchu kulistego)

Precesja regularna ma miejsce, gdy spełnione są warunki:

$$\theta = const, \quad \text{stąd} \quad \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\varphi} = const$$

$$\dot{\psi} = const$$

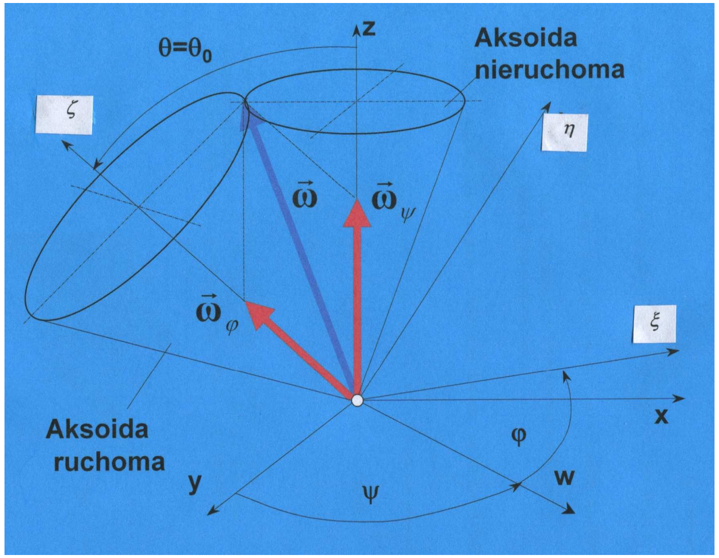
Dla precesji regularnej ruchy obrotowy precesji i obrotu własnego są jednostajnymi ruchami wokół osi z oraz ζ. Precesję regularną można zinterpretować jako sumę dwóch obrotowych ruchów jednostajnych: ruchu wokół osi związanej z bryłą ζ, nachylonej stale pod kątem θ, z prędkością kątową $\dot{\varphi} = const$ oraz ruchu wokół osi z, z prędkością kątową precesji $\dot{\psi} = const$.

Wektor prędkości kątowej $\overline{\omega}$ leży w płaszczyźnie z, ζ,

a jego długość wynosi (tw. cosinusów)

$$\omega = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta_0}$$

gdzie: $\omega = const$, $\theta_0 = const$



W zależności od wartości kąta pomiędzy wektorami prędkości kątowej precesji $\overline{\omega}_\psi$ i obrotu własnego $\overline{\omega}_\varphi$, mamy do czynienia z precesją prostą (współbieżną), gdy $\theta_0 \leq 90^0$ (kąt ostry), lub precesją odwrotną (przeciwbieżną), gdy $\theta_0 > 90^0$ (kąt rozwarty).