KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Monika Fabijańczyk
Andrzej Fabijańczyk

Repetytorium z wybranych działów matematyki szkolnej

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Łódź 2008

RECENZENT
Artur Bartoszewicz

OKŁADKĘ PROJEKTOWAŁA
Barbara Grzejszczak

Wydrukowano z dostarczonych Wydawnictwu UŁ gotowych materiałów

Książka współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
2008
Wydanie 1. Nakład 60+33 egz.
Ark. druk. 10,625. Papier kl. III, 80 g, 70 x 100
Zam. 1/4460/2009

Drukarnia Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8

ISBN 978-83-7525-238-5

Spis treści

Wstęp

Matematyka występuje w różnych wersjach w programach szeregu kierunków studiów wyższych. Może to być jeden przedmiot obejmujący najważniejsze zagadnienia matematyki wyższej, jak również mniej lub więcej sprecyzowane jej działy takie, jak analiza matematyczna, algebra, geometria, rachunek prawdopodobieństwa, itp. Okazuje się, że ich opanowanie wymaga odpowiedniego przygotowania z zakresu matematyki szkolnej. A z tym bywa różnie!

Prezentowana książka jest próbą wyjścia naprzeciw potrzebom studentów. Jest ona zwięzłym kompendium wiedzy obejmującym następującą problematykę z zakresu matematyki elementarnej:

- elementy logiki i teorii zbiorów
- rodzaje liczb i ich własności
- działania na wyrażeniach algebraicznych
- ogólne własności funkcji
- funkcje elementarne i ich własności
- ciągi liczbowe
- trygonometria.

Celowo zostały pominięte takie działy, jak rachunek prawdopodobieństwa, geometria, czy rachunek różniczkowy. Są one bowiem z reguły wykładane od podstaw w trakcie studiów.

Należy zdawać sobie sprawę z tego, że matematyka to nie tylko pojęcia i ich własności, ale również, a może przede wszystkim, umiejętność posługiwania się nimi. Dlatego omawiany materiał teoretyczny został bogato zilustrowany przykładami.

Repetytorium nie jest systematycznym wykładem „krok po kroku”, ale uporządkowaniem i uzupełnieniem posiadanych już wiadomości. Daje to możliwość autorom wykorzystania w materiale przykładowym funkcji i obiektów matematycznych, które zostaną dokładniej opisane i omówione w dalszej części opracowania.

Z uwagi na powyższe, książka jest głównie adresowana do tych absolwentów szkół średnich, którym matematyka szkolna potrzebna jest do kontynuowania nauki na studiach wyższych. Jednak może być ona również pomocna już uczącym nauczycielom matematyki, jak również wszystkim osobom zainteresowanym omawianą problematyką.

Aby ułatwić czytelnikowi „poruszanie się po książce”, zaopatrzona została ona w spis treści oraz indeks. Pominięta została natomiast literatura ze względu na jej ogrom. Jej zgromadzenie lub wyselekcjonowanie wydawało się niecelowe.

Autorzy

1. Elementy logiki

1.1. Rachunek zdań

Początki rachunku zdań datują się na III wiek p.n.e. Jest to jeden z najprostszych systemów logiki formalnej. Może on służyć do sprawdzania poprawności wnioskowań, czyli takich procesów myślowych, podczas których drogą odpowiedniego postępowania z pewnej liczby zdań uważanych za prawdziwe wyprowadzamy nowe zdanie, które uznajemy za prawdziwe.

W logice <u>*zdaniem*</u> nazywamy stwierdzenie, któremu możemy przypisać w sposób jednoznaczny, w ramach danej nauki, jedną z dwóch ocen: prawda lub fałsz. Zdania oznaczamy zwykle małymi literami łacińskimi p, q, $r\ldots$

Zdanie p: „*Wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta równobocznego mają miarę* $60°$ ” jest zdaniem prawdziwym w geometrii euklidesowej. Przypisujemy mu wartość logiczną 1, pisząc $w(p)=1$. Natomiast zdanie q: „*Wszystkie liczby pierwsze są liczbami nieparzystymi*” jest zdaniem fałszywym, gdyż w arytmetyce przyjmuje się, że 2 jest liczbą pierwszą. Dlatego oznaczając przez 0 wartość logiczną takiego zdania, piszemy symbolicznie $w(q)=0$. Zauważmy, że w matematyce istnieją zdania, które posiadają ustaloną wartość logiczną, choć nie potrafimy jej podać. Są to tzw. <u>*hipotezy matematyczne*</u>. Znana hipoteza Goldbacha (z 1742 r.) mówi: „*Każda liczba parzysta większa niż 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych*”. Do chwili obecnej matematykom nie udało się ani udowodnić prawdziwości tego twierdzenia, ani podać kontrprzykład, który by tę hipotezę obalał.

W matematyce, oprócz zdań, posługujemy się często tzw. funkcjami zdaniowymi zwanymi również formami zdaniowymi. Równanie postaci $x^2+1=10$ nie jest zdaniem, bo nie posiada wartości logicznej. Jeżeli natomiast na miejsce x podstawimy konkretną liczbę rzeczywistą, to powstanie równość, która jest prawdziwa albo fałszywa. Np. dla $x=-3$ otrzymujemy równość prawdziwą „$10=10$”, a dla $x=1$ − równość fałszywą „$2=4$”.

Niech X będzie pewną przestrzenią zawierającą przynajmniej jeden element. Wyrażenie $\varphi(x)$, w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym, gdy w miejsce x podstawimy dowolny element z przestrzeni X, nazywamy <u>*funkcją zdaniową jednej zmiennej*</u> x <u>*o zakresie zmienności*</u> X.

Przykładami funkcji zdaniowych o zakresie zmienności równym zbiorowi wszystkich liczb rzeczywistych **R** są równania „$x^2-2x-1=0$”,

„$\sin(x+3)=\frac{1}{3}$”, „$2x-1=5$” oraz nierówności „$x^2 \le 1$”, „$\sin 2x > \frac{1}{2}$”, „$2^{x+1} > 32$”. Pojęcie funkcji zdaniowej możemy rozszerzyć na funkcję zdaniową większej liczby zmiennych; przykładowo równanie „$2x - y = 5$” jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych.

O elemencie a zbioru X mówimy, że <u>*spełnia funkcję zdaniową*</u> $\varphi(x)$, jeżeli zdanie $\varphi(a)$ jest zdaniem prawdziwym. Zbiór elementów spełniających funkcję zdaniową $\varphi(x)$ o zakresie X oznaczamy symbolem $\{x \in X : \varphi(x)\}$. Analogiczne oznaczenia obowiązują dla funkcji zdaniowych większej liczby zmiennych.

Przykład. Zbiór $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2x = 0\}$ tworzą dokładnie dwie liczby -2 oraz 0, podczas gdy zbiór $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 4 \le 0\}$ składa się z wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż -2 i nie większych niż 2.

Z danych zdań lub funkcji zdaniowych możemy tworzyć nowe zdania lub funkcje zdaniowe za pomocą słów lub zwrotów: „*i*”, „*lub*”, „*jeżeli…*, *to*”, „*wtedy i tylko wtedy*, *gdy*”. Nazywamy je <u>*funktorami zdaniotwórczymi*</u> lub <u>*spójnikami logicznymi*</u>.

Stwierdzenie „*W tym roku Adaś zdał maturę i wyjechał do Anglii*” uznamy za fałszywe, jeżeli Adaś nie zdał matury. Podobnie gdyby okazało się, że Adaś nie wyjechał do Anglii, to całą wypowiedź uznalibyśmy za fałszywą. Oczywiście, jeżeli Adaś ani nie zdał matury, ani nie pojechał do Anglii, to nasze stwierdzenie także nie jest prawdziwe. Zdanie „*W tym roku Adaś zdał maturę i wyjechał do Anglii*” jest prawdą, gdy oba zdarzenia zaszły, tzn. Adaś zdał maturę oraz pojechał do Anglii.

Spójnik „*i*” oznaczamy symbolem $\wedge$ zwanym <u>*znakiem koniunkcji*</u>. Zdanie $p \wedge q$ nazywamy <u>*koniunkcją*</u> lub <u>*iloczynem logicznym zdań*</u> p <u>*i*</u> q. Koniunkcja $p \wedge q$ jest zdaniem prawdziwym, jeżeli obydwa zdania p i q są zdaniami prawdziwymi; w pozostałych przypadkach koniunkcja jest zdaniem fałszywym. Możemy to zapisać przy pomocy <u>*tabeli zero-jedynkowej*</u>:

w(p)	w(q)	w($p \wedge q$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Jeżeli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o zakresie zmienności X, to mówimy, że element $a \in X$ spełnia funkcję zdaniową $\varphi(x) \wedge \psi(x)$, jeżeli zdanie $\varphi(a) \wedge \psi(a)$ jest zdaniem prawdziwym; tzn. jeżeli obydwa zdania $\varphi(a)$ i $\psi(a)$ są zdaniami prawdziwymi.

Słysząc prognozę „*Jutro będą opady śniegu lub deszczu*”, uznamy ją za fałszywą, jeżeli następnego dnia nie spadnie ani śnieg, ani deszcz. Jeżeli natomiast spadnie sam deszcz lub sam śnieg, albo śnieg z deszczem, to prognozę uznamy za prawdziwą.

Zamiast słowa „lub” używamy symbolu $\vee$ zwanego znakiem alternatywy lub sumy logicznej. Oto tablica zero-jedynkowa dla alternatywy:

w(p)	w(q)	w($p \vee q$)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Analogicznie definiujemy alternatywę dwóch funkcji zdaniowych. Zapis „$x \geq 1$” jest skróconym zapisem wyrażenia „$x > 1$ lub $x = 1$”. Jest to alternatywa dwóch funkcji zdaniowych: „$x > 1$” oraz „$x = 1$”.

Często w mowie potocznej zdania łączone spójnikami występują w „skróconej” formie lub różnej postaci. W zdaniu „*Kowalski jest aktorem filmowym lub teatralnym*” wyrażenie „*teatralnym*” jest skrótem zdania „*Kowalski jest aktorem teatralnym*”. Natomiast zdanie „*Kowalski jest aktorem filmowym, a Nowak teatralnym*” jest koniunkcją dwóch zdań: „*Kowalski jest aktorem filmowym*” i „*Nowak jest aktorem teatralnym*”. Czasami w zdaniu pojawi się wyrażenie odpowiadające któremuś ze spójników, ale nie będące spójnikiem logicznym, np. „*Ania i Zuzia są przyjaciółkami*”.

Zastanówmy się, kiedy wypowiedź „*Jeżeli będziesz grzeczny, to dostaniesz czekoladę*” uznamy za prawdziwą. Jeżeli Jasio był grzeczny i dostał czekoladę lub był niegrzeczny i nie dostał czekolady, to niewątpliwie obietnica była prawdziwa. Jeżeli Jasio był grzeczny i mimo to nie dostał czekolady, to obietnica była fałszywa. Wątpliwości budzi przypadek, gdy Jasio był niegrzeczny, a mimo to dostał czekoladę. Wbrew pozorom nie została złamana złożona obietnica. Nie precyzuje ona, co się stanie, jeżeli Jasio będzie niegrzeczny. Może się zdarzyć, że odwiedzi go w tym czasie babcia i mimo, że Jasio był niegrzeczny, otrzymał od babci w prezencie czekoladę.

Zdanie „*jeżeli p, to q*” zapisujemy symbolicznie w postaci $p \Rightarrow q$ i nazywamy implikacją lub wynikaniem o poprzedniku p i następniku q. W języku matematycznym „implikacja” ma nieco szersze znaczenie niż słowo „wynikanie” w języku potocznym. Mówiąc potocznie „*jeżeli p, to q*”, mamy tylko na myśli, że q jest następstwem p. W logice matematycznej spójnik ten jest precyzyjnie zdefiniowany. Implikacja jest fałszywa jedynie wtedy, gdy poprzednik jest zdaniem prawdziwym, a następnik fałszywym. Poniżej zamieszczona została tablica zero-jedynkowa dla implikacji:

w(p)	w(q)	w($p\Rightarrow q$)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Stwierdzenia:

„*jeżeli* 12 *dzieli się przez* 10, *to* 12 *dzieli się przez* 5*”*,
„*jeżeli* 12 *dzieli się przez* 10, *to* 12 *dzieli się przez* 2*”*,
„*jeżeli* 12 *dzieli się przez* 4, *to* 12 *dzieli się przez* 2*”*,

w sensie logiki są zdaniami prawdziwymi. Natomiast zdanie „*jeżeli* 12 *dzieli się przez* 4, *to* 12 *dzieli się przez* 5*”* jest zdaniem fałszywym .

Ostatnim ze wspomnianych spójników jest zwrot „*wtedy i tylko wtedy”*, który oznaczamy symbolem $\Leftrightarrow$ zwanym *znakiem równoważności*. Zgodnie z intuicją *równoważność* dwóch zdań uznamy za stwierdzenie prawdziwe, jeżeli oba te zdania mają tę samą wartość logiczną.

w(p)	w(q)	w($p\Leftrightarrow q$)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funktor równoważności, jak również i implikacji, może być zastosowany także do tworzenia bardziej złożonych funkcji zdaniowych. Równoważnością dwóch funkcji zdaniowych jest wyrażenie „*liczba naturalna x dzieli się przez* 6 *wtedy i tylko wtedy, gdy x dzieli się przez* 2 *i jednocześnie x dzieli się przez* 3*”*.

Dotychczas omówione funktory zdaniotwórcze pozwalają tworzyć nowe zdania (lub funkcje zdaniowe) z dwóch zdań (lub funkcji zdaniowych). Nazywamy je dlatego *funktorami dwuargumentowymi*. W logice używa się często również *funktora jednoargumentowego*, który zmienia wartość logiczną zdania na przeciwną. Zdanie $\neg p$ nazywamy *negacją* zdania p i czytamy „*nieprawda, że p”*. Zamiast $\neg p$ stosowane są również zapisy: $\sim p$, p'.

w(p)	w($\neg p$)
1	0
0	1

Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową o zakresie zmienności X, to przyjmujemy, że element $a \in X$ spełnia funkcję $\neg\varphi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $\varphi(a)$ jest zdaniem fałszywym.

Za pomocą funktorów zdaniotwórczych możemy tworzyć różne schematy zdań lub funkcji zdaniowych złożonych. W naukach ścisłych szczególną rolę odgrywają schematy zdań złożonych o tej własności, że każde zdanie „podpadające" pod ten schemat jest zdaniem prawdziwym bez względu na wartość logiczną zdań, z których jest ono zbudowane. Są to tzw. *tautologie* zwane również *prawami logicznymi* lub *prawami rachunku zdań*.

Najczęściej stosowanymi takimi prawami są:

(i) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ – prawo podwójnego zaprzeczenia;

(ii) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ – prawo przemienności alternatywy;

(iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ – prawo przemienności koniunkcji;

(iv) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – prawo łączności alternatywy;

(v) $p \wedge (q \wedge r)\,) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ – prawo łączności koniunkcji;

(vi) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ – prawo de Morgana dla koniunkcji;

(vii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ – prawo de Morgana dla alternatywy;

(viii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ – prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy;

(ix) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji;

(x) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ – prawo zaprzeczenia implikacji;

(xi) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ – prawo kontrapozycji;

(xii) $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ – prawo przechodniości implikacji.

1.2. Zastosowanie rachunku zdań do dowodzenia twierdzeń

Twierdzenia w matematyce mają często postać implikacji, np. *„jeżeli wyróżnik funkcji kwadratowej f jest ujemny, to funkcja ta nie ma miejsc zerowych"* lub *„jeżeli czworokąt jest rombem, to jego przekątne są prostopadłe"*.

Poprzednik takiej implikacji nazywamy *założeniem twierdzenia*, a jej następnik – *tezą*. W pierwszym z twierdzeń mamy:

założenie: *„wyróżnik funkcji kwadratowej f jest ujemny"*,

teza: *„funkcja f nie ma miejsc zerowych"*.

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji $Z \Rightarrow T$, to Z nazywamy *warunkiem dostatecznym* (*wystarczającym*) na to, aby zaszło T, a T – *warunkiem koniecznym* na to, aby zaszło Z.

W drugim z zacytowanych twierdzeń fakt, że czworokąt jest rombem jest warunkiem dostatecznym na prostopadłość przekątnych tego czworokąta, a ta ostatnia własność z kolei – warunkiem koniecznym na to, aby czworokąt był rombem.

Mając dane twierdzenie w postaci implikacji $Z \Rightarrow T$, możemy zbudować formalnie dodatkowo trzy inne twierdzenia, nie przesądzając o ich prawdziwości. Te cztery twierdzenia tworzą tzw. *logiczny kwadrat twierdzeń* i noszą nazwy:

$Z \Rightarrow T$ – *twierdzenie proste*,

$T \Rightarrow Z$ – *twierdzenie odwrotne*,

$\neg T \Rightarrow \neg Z$ – *twierdzenie przeciwstawne*,

$\neg Z \Rightarrow \neg T$ – *twierdzenie przeciwne*.

Z prawa kontrapozycji wynika, że twierdzenia proste i przeciwstawne są jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe, tzn.

$$(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg Z \Rightarrow \neg T).$$

Taką samą własność mają twierdzenia odwrotne i przeciwne, tzn.

$$(T \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\neg T \Rightarrow \neg Z).$$

Natomiast twierdzenia proste i odwrotne nie muszą być jednocześnie zdaniami prawdziwymi, choć może się tak zdarzyć.

Przykłady. Zbudujemy cztery twierdzenia tworzące kwadrat logiczny twierdzeń.

a) Przypadek, gdy twierdzenie proste i przeciwstawne są prawdziwe, a twierdzenie odwrotne i przeciwne — fałszywe.

Twierdzenie proste: *„Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 25, to liczba ta dzieli się przez 5."*

Twierdzenie odwrotne: *„Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 5, to liczba ta dzieli się przez 25.”*

Twierdzenie przeciwstawne: *„Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 5, to liczba ta nie dzieli się przez 25.”*

Twierdzenie przeciwne: *„Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 25, to liczba ta nie dzieli się przez 5.*”

b) Twierdzenie Pitagorasa jako przypadek, gdy wszystkie twierdzenia są prawdziwe.

Twierdzenie proste: *„Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków.”*

Twierdzenie odwrotne: *„Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to trójkąt jest prostokątny.”*

Twierdzenie przeciwstawne: *„Jeżeli w trójkącie kwadrat długości najdłuższego boku nie jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to trójkąt nie jest prostokątny.”*

Twierdzenie przeciwne: *„Jeżeli trójkąt nie jest prostokątny, to kwadrat długości najdłuższego boku nie jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków.*

1.3. Kwantyfikatory

Ważną rolę w formułowaniu twierdzeń i definicji, oprócz funktorów zdaniotwórczych, odgrywają wyrażenia *„istnieje*”, *„dla każdego*”. Słowa te oznaczane są specjalnymi symbolami. Zdanie: *„Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi* $x^2 + 1 > 0$*.”* zapisujemy w postaci $\forall_{x} \left(x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \right)$ lub krócej $\forall_{x \in \mathbf{R}} \left(x^2 + 1 > 0 \right)$. Zdanie: *„Istnieje taka liczba rzeczywista x, że* $x^2 = 1$*.”* zapisujemy $\exists_{x} \left(x \in \mathbf{R} \wedge x^2 = 1 \right)$ lub $\exists_{x \in \mathbf{R}} (x^2 = 1)$.

Ogólnie: jeżeli $p(x)$ jest funkcją zdaniową o zakresie zmienności X, to zdanie „*Dla każdego* $x \in X$ *zachodzi* $p(x)$*.”* zapisujemy $\forall_{x \in X} p(x)$ i analogicznie zdanie ”*Istnieje takie* $x \in X$*, że zachodzi* $p(x)$*.”* zapisujemy $\exists_{x \in X} p(x)$.

Symbole $\forall$ i $\exists$ nazywamy odpowiednio <u>*kwantyfikatorem ogólnym*</u> i <u>*kwantyfikatorem szczegółowym*</u>. Stosowana jest również symbolika $\bigwedge$ oraz $\bigvee$ na oznaczenie odpowiednio kwantyfikatora ogólnego i kwantyfikatora szczegółowego.

Kwantyfikatory wiążąc zmienną funkcji zdaniowej mogą przekształcić tę funkcję zdaniową w zdanie. Stwierdzenie $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\left((x+1)^2 = x^2+2x+1\right)$ jest zdaniem prawdziwym, a stwierdzenie $\underset{x\in\mathbf{R}}{\exists}\left(x^2+1=0\right)$ − zdaniem fałszywym. Kwantyfikatory stosuje się również w przypadkach funkcji zdaniowych większej liczby zmiennych. Np. $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbf{R}}{\exists}\left(x+y=7\right)$ jest zdaniem prawdziwym, zdanie $\underset{y\in\mathbf{R}}{\exists}\ \underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\left(x+y=7\right)$ − zdaniem fałszywym. Z drugiej strony wyrażenie $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\left(x^2+y>0\right)$ pozostaje funkcją zdaniową jednej zmiennej y, gdyż jedynie zmienna x została związana przy pomocy kwantyfikatora.

Stosując jednocześnie kwantyfikatory i funktory zdaniotwórcze, należy zwrócić uwagę na sposób użycia nawiasów. Przykładowo, wyrażenie $\underset{x\in X}{\exists}\left(p(x)\Rightarrow q(x)\right)$ jest zdaniem, natomiast w implikacji $\underset{x\in X}{\exists}\ p(x)\Rightarrow q(x)$ tylko poprzednik $\underset{x\in X}{\exists}\ p(x)$ jest zdaniem, a następnik $q(x)$ jest funkcją zdaniową. W konsekwencji w tym przypadku całe wyrażenie jest funkcją zdaniową. Przyjmujemy tu zasadę, że kwantyfikator ma pierwszeństwo przed funktorami zdaniotwórczymi.

2. Zbiory

2.1. Rachunek zbiorów

Jednym z podstawowych pojęć występujących w matematyce jest pojęcie zbioru. Dział matematyki, który bada własności zbiorów, nazywany *teorią mnogości*. Rozwinął się on w XIX wieku, a za jego twórcę uważany jest G. Cantor.

Mówiąc o konkretnym zbiorze podajemy zwykle warunki, jakie spełniają elementy do niego należące. Przykładowo, możemy rozważać zbiór wszystkich rozwiązań równania $x^2 - 1 = 0$ lub zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $x^2 > 2.$ Elementami zbioru nie muszą być liczby, np. można utworzyć zbiór wszystkich studentów pewnej wyższej uczelni, zbiór wszystkich trójkątów równoramiennych, itp.

Wygodne jest wprowadzenie pojęcia *zbioru pustego*, oznaczanego symbolem $\varnothing$, jako zbioru, który nie zawiera żadnego elementu. Zbiór rozwiązań równania $x^2 = 2,$ które są liczbami całkowitymi, jest zbiorem pustym.

Zdanie *„x jest elementem zbioru A”* zapisujemy symbolicznie $x \in A$, natomiast zdanie *„y nie jest elementem zbioru A”* zapisujemy $y \notin A$. Zbiór składający się ze skończonej liczby elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ może być zapisany w postaci $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Mówimy, że *zbiór A jest zawarty w zbiorze B*, jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B. Zbiór A nazywamy wtedy *podzbiorem* zbioru B, a zbiór B *nadzbiorem* zbioru A, co zapisujemy symbolicznie $A \subset B$. Znak $\subset$ nazywa się *znakiem inkluzji*.

Używając symboliki rachunku zdań, mamy więc:

$$A \subset B \Leftrightarrow \underset{x}{\forall}(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Zauważmy przykładowo, zbiór liczb naturalnych jest podzbiorem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, a zbiór liczb wymiernych jest nadzbiorem zbioru wszystkich rozwiązań równania $x^2 - 1 = 0.$

Dwa *zbiory są równe*, jeżeli mają te same elementy, tzn.

$$A = B \Leftrightarrow \underset{x}{\forall}(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Równymi będą zbiory rozwiązań równania $4x^2 - 1 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych i zbiór rozwiązań równania $16x^4 - 1 = 0$ w tym samym zbiorze.

Wprowadźmy oznaczenia najczęściej używanych zbiorów liczbowych, których elementy zostaną bliżej opisane w następnych paragrafach tego rozdziału. Oznaczenia te są powszechnie używane, choć nieco różnią się od oznaczeń używanych w szkole średniej:

$\mathbf{N}$ – zbiór liczb naturalnych,
$\mathbf{N}_+$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich,
$\mathbf{Z}$ – zbiór liczb całkowitych,
$\mathbf{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,
$\mathbf{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbf{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Zachodzą następujące inkluzje:

$$\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R};$$
$$\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}.$$

Sumą zbiorów A i B, w zapisie $A \cup B$, nazywamy zbiór złożony z wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B i który innych elementów nie zawiera.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Iloczynem zbiorów A i B, oznaczanym symbolem $A \cap B$, nazywamy zbiór, który zawiera wszystkie elementy należące jednocześnie do zbiorów A oraz B i który innych elementów nie zawiera.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Iloczyn zbiorów nazywamy też *częścią wspólną* lub *przekrojem* tych *zbiorów*.

Zbiory A i B nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli $A \cap B = \varnothing$.

Różnicą zbiorów A i B, zapisywaną symbolem $A \setminus B$, nazywamy zbiór, do którego należą te i tylko te elementy, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Jeżeli A jest podzbiorem ustalonego zbioru X, to stosowane jest oznaczenie: $A' = X \setminus A$. Zbiór A' nazywa się *dopełnieniem zbioru* A lub dokładniej *dopełnieniem zbioru* A *do przestrzeni* X.

Ponieważ działania na zbiorach są określone przez działania na zdaniach, to prawa rachunku zbiorów są analogiczne do praw rachunku zdań. Tezę tę wyjaśnia poniższa tabela:

Prawo	Zbiory	Zdania
przemienność iloczynu/koniunkcji	$A \cap B = B \cap A$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
przemienność sumy/alternatywy	$A \cup B = B \cup A$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
łączność iloczynu/koniunkcji	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
łączność sumy/alternatywy	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
rozdzielność iloczynu/koniunkcji względem sumy/alternatywy	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
rozdzielność sumy/alternatywy względem iloczynu/koniunkcji	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
prawo de Morgana	$(A \cap B)' = (A' \cup B')$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
prawo de Morgana	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

Zdefiniujmy teraz pewne ważne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych **R**. Zakładamy, że $a,\ b \in \mathbf{R}$, przy czym $a < b$. Wtedy *przedziałem*

otwartym o końcach *a* oraz *b* nazywamy zbiór

$$(a;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\};$$

domkniętym o końcach *a* oraz *b* nazywamy zbiór

$$[a;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\};$$

domknięto-otwartym o końcach *a* oraz *b* nazywamy zbiór

$$[a;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : a \le x < b\};$$

otwarto-domkniętym o końcach *a* oraz *b* nazywamy zbiór

$$(a;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \le b\};$$

lewostronnie otwartym nieograniczonym o początku *a* nazywamy zbiór

$$(a;\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\};$$

lewostronnie domkniętym nieograniczonym o początku *a* nazywamy zbiór

$$[a;\ \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \ge a\};$$

prawostronnie otwartym nieograniczonym o końcu *b* nazywamy zbiór

$$(-\infty;\ b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\};$$

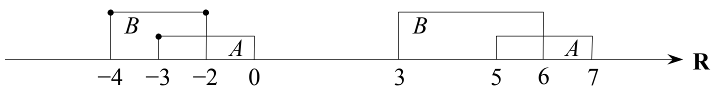
prawostronnie domkniętym nieograniczonym o końcu *b* nazywamy zbiór

$$(-\infty;\ b] = \{x \in \mathbf{R} : x \le b\}.$$

Zamiast nawiasów kwadratowych [oraz] używane są również odpowiednio symbole $\langle$ oraz $\rangle$.

Przykład. Niech $A = [-3;\ 0) \cup (5;\ 7)$, $B = [-4;\ -2] \cup (3;\ 6)$. Znajdziemy zbiór

$$((A \cap B) \cup A') \cap (B \setminus A)'.$$



Mamy:

$$A \cap B = [-3;\,-2] \cup (5;\,6),$$
$$A' = (-\infty;\,-3) \cup [0;\,5] \cup [7;\,\infty),$$
$$(A \cap B) \cup A' = (-\infty;\,-2] \cup [0;\,6) \cup [7;\,\infty),$$
$$B \setminus A = [-4;\,-3) \cup (3;\,5],$$
$$(B \setminus A)' = (-\infty;\,-4) \cup [-3;\,3] \cup (5;\,\infty)$$
$$\left[(A \cap B) \cup A'\right] \cap (B \setminus A)' = (-\infty;\,-4) \cup [-3;\,-2] \cup [0;\,3] \cup (5;\,6) \cup [7;\,\infty).$$

Niech $a \in \mathbf{R}$ oraz $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ będą liczbami ustalonymi. Wtedy *otoczeniem punktu* a *o promieniu* ε nazywamy przedział $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$, a *sąsiedztwem punktu* a *o promieniu* ε sumę przedziałów $(a-\varepsilon;\, a) \cup (a;\, a+\varepsilon)$.

Zbiór $A \subset \mathbf{R}$ nazywamy *ograniczonym z góry*, jeżeli istnieje taka liczba M, że dla każdego elementu x zbioru A zachodzi nierówność $x \le M$. Liczbę M nazywamy wtedy *ograniczeniem górnym* zbioru A. Analogicznie definiujemy zbiór *ograniczony z dołu* i jego *ograniczenie dolne*, zastępując nierówność $x \le M$ nierównością $x \ge M$.

Zbiór nazywamy *ograniczonym*, jeżeli jest on jednocześnie ograniczony z góry i z dołu.

Kresem górnym zbioru A, oznaczanym symbolem $\sup A$, nazywamy najmniejszą z liczb ograniczającą ten zbiór z góry (o ile ona istnieje).

Kresem dolnym zbioru A, oznaczanym symbolem $\inf A$, nazywamy największą z liczb ograniczającą ten zbiór z dołu (o ile ona istnieje).

Przykładowo, $\mathbf{R}_+$ jest zbiorem ograniczonym z dołu, ale nie jest zbiorem ograniczonym z góry. Kresem dolnym tego zbioru jest liczba 0. Zauważmy, że w tym przypadku kres dolny zbioru $\mathbf{R}_+$ nie należy do $\mathbf{R}_+$. Oczywiście zbiór $\mathbf{R}_+$ nie posiada kresu górnego.

2.2. Liczby naturalne

Liczbami naturalnymi nazywamy liczby: 0, 1, 2, 3, …. ,10, 11, 12, …. Zbiór ich oznaczamy literą **N**. A więc

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

W starożytnej Grecji nie znano zera, pojawiło ono znacznie później. Często wykorzystywany zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczamy symbolem $\mathbf{N}_+$, tj.

$$\mathbf{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}.$$

W zbiorze liczb naturalnych można wyróżnić pewne ważne jego podzbiory takie jak *zbiór liczb pierwszych*, *zbiór liczb złożonych*.

Liczbą pierwszą nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami są 1 oraz n. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest pierwsza nazywamy *liczbą złożoną*.

Tak więc zbiór liczb naturalnych możemy przedstawić jako sumę zbioru liczb pierwszych, zbioru liczb złożonych oraz dwuelementowego zbioru $\{0, 1\}$.

Każda liczba złożona jest iloczynem liczb pierwszych. Rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników.

Zbiór liczb naturalnych posiada dwie bardzo ważne własności:

(i) istnieje najmniejsza liczba naturalna, tzn. 0;
(ii) dla każdej liczby naturalnej n istnieje bezpośrednio po niej występująca liczba n+1.

Tę własność zbioru liczb naturalnych wykorzystuje się do wprowadzenia pewnego ważnego sposobu dowodzenia twierdzeń. Wyobraźmy sobie ciąg przekaźników radiowych:

$$\boxed{0} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \;\ldots\; \rightarrow \boxed{k-1} \rightarrow \boxed{k} \rightarrow \boxed{k+1} \rightarrow \;\ldots$$

Aby sygnał mógł przejść przez wszystkie przekaźniki muszą zajść dwa fakty:

1. sygnał musi być zainicjowany w przekaźniku 0;
2. przekaźniki, jak sama nazwa wskazuje, muszą posiadać własność „przekazywania”, to znaczy jeżeli sygnał dotrze do któregoś z przekaźników, to na pewno zostanie wysłany do następnego przekaźnika.

Opisane wyżej doświadczenie sugeruje nam następujący sposób dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych. Według tego schematu twierdzenie będzie prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych, jeżeli:

1. twierdzenie jest prawdziwe dla liczby 0;

2. twierdzenie ma własność „przekazywania”, tzn. jeżeli jest prawdziwe dla dowolnie wybranej liczby k, to jest ono prawdziwe dla liczby $k+1$.

Oczywiście nadawanie sygnału możemy rozpocząć nie od stacji 0, ale od dowolnej stacji n_0. Do tego sposobu dowodzenia twierdzeń upoważnia nas poniższa _zasada indukcji matematycznej_:

Niech będzie dane pewne twierdzenie dotyczące liczb naturalnych.
Jeżeli

1^0 twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n_0;

2^0 z przypuszczenia, że twierdzenie zachodzi dla liczby naturalnej k, gdzie $k \ge n_0$, wynika, że twierdzenie zachodzi również dla liczby $k+1$,

to wówczas twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n takich, że $n \ge n_0$.

Przykłady. a) Wykażemy, że dla liczb naturalnych $n \ge 2$, prawdziwa jest nierówność

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy tzw. _warunek początkowy_ 1^0, przyjmując $n_0 = 2$:

$$L_2 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = P_2.$$

Następnie sprawdzamy warunek 2^0 zwany _krokiem indukcyjnym_. W tym celu zakładamy, że k jest dowolną liczbą naturalną nie mniejszą niż 2. Tzw. _założeniem indukcyjnym_ jest nierówność

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k},$$

zaś tzw. _tezą indukcyjną_ nierówność

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Dowód kroku indukcyjnego przebiega następująco:

$$L_{k+1} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = L_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > P_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}} =$$

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} = P_{k+1}.$$

Oznacza to, że twierdzenie ma własność „przekazywania”. A więc na mocy zasady indukcji badana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych nie mniejszych niż 2.

b) Pokażemy, że dla każdej liczny naturalnej n liczba $2^{6n+1}+3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.
<u>*Rozwiązanie*</u>. Warunek początkowy 1^0 dla $n_0=0$.

Mamy

$$L_0=2^1+3^2=11.$$

Jest to oczywiście liczba podzielna przez 11.
Krok indukcyjny 2^0. Niech k będzie dowolnie wybraną liczną naturalną. Wtedy założenie indukcyjne możemy zapisać warunkiem

$$\underset{m\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(2^{6k+1}+3^{2k+2}=11m\right),$$

a tezę indukcyjną warunkiem

$$\underset{l\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(2^{6(k+1)+1}+3^{2(k+1)+2}=11l\right).$$

Dowód kroku indukcyjnego wygląda wtedy następująco:

$$2^{6k+7}+3^{2k+4}=2^6\left(2^{6k+1}+3^{2k+2}\right)-64\cdot 3^{2k+2}+9\cdot 3^{2k+2}=$$
$$2^6\cdot 11m-55\cdot 3^{2k+2}=11\left(2^6m-5\cdot 3^{2k+2}\right).$$

Wystarczy zatem położyć $l=64m-45\cdot 9^k$, bo oczywiście $l\in\mathbf{Z}$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważane twierdzenie jest więc prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.

c) Pokażemy, że n prostych, parami nierównoległych i takich, że żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ części.
<u>*Rozwiązanie*</u>. Krok początkowy 1^0 dla $n_0=1$ jest oczywisty, gdyż jedna prosta dzieli płaszczyznę na dwie części. Przechodząc do kroku indukcyjnego 2^0, ustalmy dowolną dodatnią liczbę naturalną $k\geq 1$. Założenie indukcyjne oznacza, że k prostych dzieli płaszczyznę na $1+\dfrac{k(k+1)}{2}$ części, a teza indukcyjna, że $k+1$ takich prostych dzieli płaszczyznę na $1+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ części.
Dowód kroku indukcyjnego.
Możemy przyjąć, że $k+1$ prostych powstało w wyniku dołączenia dodatkowej prostej do układu k prostych. Ta dodana prosta przecina poprzednie k prostych w k różnych punktach, które dzielą ją na $k+1$ odcinków (dwa z nich są półprostymi). Każdy z tych odcinków dzieli część, w której jest zawarty, na dwie części. W konsekwencji „nowa" ilość części wynosi

$$1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=1+(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej rozważane twierdzenie jest więc prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych dodatnich.

Wprowadźmy teraz dwa symbole występujące w matematyce, a dotyczące liczb naturalnych.

Niech $n \in \mathbf{N}$. Symbol $n!$ (czytaj n silnia) można zdefiniować następująco:

$$0! = 1 \wedge \left(n \geq 1 \Rightarrow n! = n \cdot (n-1)!\right).$$

Łatwo zauważamy, że dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ .$$

Przykład. Mamy

$$\frac{100!}{98!} = \frac{\left(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 98\right) \cdot 99 \cdot 100}{98!} = \frac{98! \cdot 99 \cdot 100}{98!} = 99 \cdot 100 = 9900.$$

Niech $n, k \in \mathbf{N}$ oraz $n \geq k$. Wówczas tzw. symbol Newtona $\binom{n}{k}$ jest określony wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

W niektórych opracowaniach dla $k > n$ kładzie się $\binom{n}{k} = 0$.

Symbol Newtona posiada własności:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

(ii) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$;

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ dla $k \leq n$;

(iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ dla $n \geq k+1$;

(v) $\binom{n}{k} \in \mathbf{N}$.

Przykłady. a) $\binom{20}{18} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$.

b) $\binom{12}{5}+2\binom{12}{6}+\binom{11}{6}+\binom{11}{7}=\left(\binom{12}{5}+\binom{12}{6}\right)+\binom{12}{6}+\left(\binom{11}{6}+\binom{11}{7}\right)=$

$$\binom{13}{6}+\left(\binom{12}{6}+\binom{12}{7}\right)=\binom{13}{6}+\binom{13}{7}=\binom{14}{7}=\frac{14!}{(7!)^2}=3432.$$

Podane własności pozwalają nam na uniknięcie uciążliwych obliczeń w celu wyznaczenia wartości symboli Newtona. Zbudujmy następującą tablicę:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} & \dots & \binom{n}{n} & \\
\binom{n+1}{0} & \dots & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & \dots & \binom{n+1}{n} & \dots & \binom{n+1}{n+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Stosując własności symboli Newtona, wnioskujemy, że w tak zbudowanej tablicy liczbami występującymi na końcu i początku każdego wiersza są jedynkami. Natomiast każda inna liczba jest sumą dwóch liczb poprzedniego wiersza sąsiadujących z nią. Z uwagi na opisane zależności wspomniana tablica, zwana _trójkątem Pascala_, ma postać:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

....

itd.

W n-tym wierszu (numerując je od 0) stoją kolejno liczby:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Dodajmy, że trójkąt Pascala umożliwia, m.in., uzyskiwanie w wygodny sposób rozwinięć wyrażeń postaci $(a+b)^n$.

Zauważmy na zakończenie paragrafu, że zbiór liczb całkowitych **Z** jest rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych **N**. Składa on się z liczb naturalnych i liczb do nich przeciwnych:

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

2.3. Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, która daje się przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi oraz $q \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **Q**.

Liczbę wymierną można wyrazić w postaci ilorazu liczb całkowitych na wiele sposobów, np. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \ldots$ Wśród nich jest taki, że liczby stojące w liczniku i mianowniku są względnie pierwsze. Mówimy wtedy, że dany *ułamek* jest *nieskracalny*.

Zbiór liczb wymiernych jest *uporządkowany*, tzn. dla każdych dwóch różnych liczb wymiernych można orzec, która z nich jest mniejsza od drugiej.

W zbiorze **Q** wykonalne są podstawowe działania arytmetyczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie), a jako wyniki otrzymujemy również liczby wymierne. Jedyny wyjątek stanowi dzielenie przez zero, które jest nieokreślone.

Często stosowaną postacią liczby wymiernej jest jej rozwinięcie dziesiętne. Odnotujmy ciekawe twierdzenie:

Liczba x jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończone lub okresowe rozwinięcie dziesiętne.

Zbiór liczb wymiernych ma ważną własność, której nie miał zbiór liczb naturalnych i całkowitych, a mianowicie, dla każdych dwóch liczb wymiernych można znaleźć trzecią liczbę wymierną, która leży między nimi. Dla liczb a i b może to być np. liczba $\frac{a+b}{2}$. Dlatego mówimy, że zbiór liczb wymiernych jest *gęsty*. Łatwo widać, że liczb wymiernych „leżących” pomiędzy a i b jest nieskończenie wiele.

Istnieją liczby, które mają nieskończone nieokresowe rozwinięcia dziesiętne. Nazywamy je liczbami niewymiernymi. Przykładową liczbą niewymierną jest długość przekątnej kwadratu o boku jednostkowym, a także stosunek długości obwodu okręgu do długości jego średnicy.
Elementy sumą zbioru liczb wymiernych $\mathbf{Q}$ i zbioru liczb niewymiernych $\mathbf{Q}'$ nazywamy liczbami rzeczywistymi. Stosujemy tu oznaczenie

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'.$$

Zbiór liczb rzeczywistych posiada pewną własność, której nie posiadały poprzednie zbiory, a mianowicie, *własność ciągłości*. Wyraża się ona następującym twierdzeniem:

Każdy ograniczony z góry (z dołu) podzbiór zbioru liczb rzeczywistych posiada kres górny (dolny).

Przykład. Niech $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$. W zbiorze liczb wymiernych zbiór A jest ograniczony, ale nie ma kresu górnego. Tymczasem w zbiorze liczb rzeczywistych kres taki istnieje i jest nim liczba niewymierna $\sqrt{2}$.

Geometrycznie własność ciągłości oznacza, że oś liczbowa jest linią ciągłą (nie ma „dziur"), tzn. każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada pewna liczba rzeczywista i odwrotnie, każdej liczbie rzeczywistej jest przyporządkowany odpowiedni punkt na osi liczbowej.

Ponadto można wykazać, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych, co oznacza, że w każdym otoczeniu liczby rzeczywistej leży nieskończenie wiele liczb wymiernych. Zbiór liczb niewymiernych jest także gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

2.4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Wartością bezwzględną lub *modułem* *liczby rzeczywistej* x nazywamy odległość punktu na osi liczbowej o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0. Oznaczamy ją symbolem $|x|$.

Z tej geometrycznej definicji wartości bezwzględnej wynikają natychmiast następujące własności:

(i) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}(|x| \geq 0)$;

(ii) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;

(iii) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\left(|x| = |-x|\right);$

(iv) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{a\in\mathbf{R}^+}{\forall}\left(|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a\right);$

(v) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{a\in\mathbf{R}^+}{\forall}\left(|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a\right);$

(vi) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{a\in\mathbf{R}^+}{\forall}\left(|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a\right).$

Powyższe własności pozwalają rozwiązać wiele równań i nierówności, w których występuje wartość bezwzględna. Rozważmy dla przykładu nierówność $|x - x_0| < \delta$, gdzie x_0 jest daną liczbą rzeczywistą, δ – daną dodatnią liczną rzeczywista, x – niewiadomą. Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby *x,* dla których odległość punktu o współrzędnej $x - x_0$ od punktu 0 jest mniejsza niż δ. Oznacza to, że $-\delta < x - x_0 < \delta$. W konsekwencji $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. Widzimy więc, że nierówność $|x - x_0| < \delta$ opisuje otoczenie punktu x_0 o promieniu δ.

Do pewnych zastosowań definicja geometryczna wartości bezwzględnej jest niewygodna. Łatwiej wówczas operować równoważną jej definicją algebraiczną:

$$|x| = \begin{cases} x;\ x \ge 0 \\ -x;\ x < 0. \end{cases}$$

Z definicji tej wynikają następujące własności:

(vii) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\left(|x| \ge x \wedge |x| \ge -x\right);$

(viii) $\underset{x,y\in\mathbf{R}}{\forall}\left(|x \cdot y| = |x| \cdot |y|\right);$

(ix) $\underset{x\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}}{\forall}\left(\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\right);$

(x) $\underset{x,y\in\mathbf{R}}{\forall}\left(|x + y| \le |x| + |y|\right);$

(xi) $\underset{x,y\in\mathbf{R}}{\forall}\left(|x - y| \ge \big||x| - |y|\big|\right).$

Przykład. Rozwiążemy wybrane nierówności modułowe.

a) $\big||2x + 5| - 4\big| \le 3$.

Rozwiązanie. Podstawiając $t = |2x+5| - 4$, przekształcamy badaną nierówność do postaci $|t| \le 3$. Z definicji geometrycznej wynika więc, że $-3 \le t \le 3$. Wracając do początkowej niewiadomej mamy $-3 \le |2x+5| - 4 \le 3$, skąd $1 \le |2x+5| \le 7$. Podstawmy następnie $s = 2x+5$. Wówczas $1 \le |s| \le 7$, czyli $-7 \le s \le -1$ lub $1 \le s \le 7$. W konsekwencji $-7 \le 2x+5 \le -1$ lub $1 \le 2x+5 \le 7$, a zatem $-6 \le x \le -3$ lub $-2 \le x \le 1$. Zbiorem rozwiązań badanej nierówności jest suma przedziałów $[-6; -3] \cup [-2; 1]$.

b) $|x-1| + |2x-5| < 9$.

Rozwiązanie. Będziemy szukać rozwiązań tej nierówności w odpowiednich podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych. Podzbiory te mają tę własność, że w każdym z nich wyrażenia występujące pod modułami są stałego znaku lub przyjmują wartość 0. Rozpatrzymy więc trzy przypadki.

1^0 $x \in (-\infty; 1)$. Wtedy

$$-x+1-2x+5 < 9 \Leftrightarrow x > -1.$$

W rozpatrywanym przedziale rozwiązaniami są liczby z przedziału $(-1; 1)$.

2^0 $x \in [1; 2{,}5)$. Wtedy

$$x-1-2x+5 < 9 \Leftrightarrow x > -5.$$

Wszystkie liczby z badanego przedziału są więc rozwiązaniami.

3^0 $x \in [2{,}5; \infty)$. Wtedy

$$x-1+2x-5 < 9 \Leftrightarrow x < 5.$$

Zatem $x \in [2{,}5; 5)$.

Reasumując, zbiorem rozwiązań analizowanej nierówności jest zbiór $(-1; 1) \cup [1; 2{,}5) \cup [2{,}5; 5)$, czyli przedział $(-1; 5)$.

3. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

3.1. Rozkładanie wyrażeń algebraicznych na czynniki

Pierwszym zagadnieniem, które omówimy, jest kwestia rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki, tzn. przekształcania ich do postaci iloczynu dwóch lub większej liczby wyrażeń algebraicznych. Wyrażenie algebraiczne rozkładamy zwykle na czynniki najprostsze, tzn. takie, które się już na czynniki nie rozkładają.

Najczęściej, aby rozłożyć wyrażenie algebraiczne na czynniki należy:

1. wyłączyć wspólny czynnik poza nawias;
2. zastosować do całego wyrażenia lub jego części wzory uproszczonego mnożenia;
3. pogrupować składniki wyrażenia algebraicznego w takie grupy, które zawierają wspólny czynnik, jednakowy dla wszystkich grup;
4. zastosować znane twierdzenie (postać iloczynowa funkcji kwadratowej, twierdzenie Bezout, itp.) lub inny własny pomysł.

Podstawowymi *wzorami skróconego mnożenia* są:

(i) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

(ii) $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$;

(iii) $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$;

(iv) $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$;

(v) $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$;

(vi) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

(vii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

(viii) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

(ix) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(x) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(xi) $(a+b)^n=$

$$a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

Przykłady. Rozłożymy na czynniki dane wyrażenia.

a) $(x+y)^3-(x-y)^3=$

$$\left((x+y)-(x-y)\right)\left((x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\right)=$$
$$2y\left(x^2+2xy+y^2+x^2-y^2+x^2-2xy+y^2\right)=2y\left(3x^2+y^2\right).$$

b) $169u^4-\dfrac{v^2}{625}=\left(13u^2-\dfrac{v}{25}\right)\left(13u^2+\dfrac{v}{25}\right).$

c) $a^2+6a+9-b^2+8b-16=\left(a^2+6a+9\right)-\left(b^2-8b+16\right)=$
$(a+3)^2-(b-4)^4==\left((a+3)-(b-4)\right)\left((a+3)+(b-4)\right)=$
$(a-b+7)(a+b-1).$

d) $48a^3x^4-24a^3x^2y^2+3a^3y^4=$
$$3a^3\left(\left(4x^2\right)^2-2\cdot 4x^2\cdot y^2+\left(y^2\right)^2\right)=3a^3\left(4x^2-y^2\right)^2=$$
$$3a^3\left((2x-y)(2x+y)\right)^2=3a^3(2x-y)^2(2x+y)^2.$$

e) $\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}=\left(a^2-(b-c)^2\right)\cdot\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=$
$$(a-b+c)(a+b-c)\cdot\frac{a+b+c}{a+b-c}=(a+c-b)(a+c+b).$$

f) $u^4+v^4=\left(u^4+2u^2v^2+v^4\right)-2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2-\left(\sqrt{2}\,uv\right)^2=$
$\left(u^2+v^2-\sqrt{2}\,uv\right)\left(u^2+v^2+\sqrt{2}\,uv\right).$

g) $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)=$
$$ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)=$$
$$a\left(y^3-x^3\right)-xy\left(y^2-x^2\right)-a^3(y-x)=$$
$$(y-x)\left(ay^2+axy+ax^2-xy^2-x^2y-a^3\right)=$$
$$(y-x)\left(a(y^2-a^2)-x^2(y-a)-xy(y-a)\right)=$$
$$(y-x)(y-a)\left(ay+a^2-x^2-xy\right)=$$
$$(y-x)(y-a)\left(y(a-x)+(a^2-x^2)\right)=(y-x)(y-a)(a-x)(y+a+x).$$

Przykład. Znajdziemy najmniejszą wartość wyrażenia
$$2x^2+y^2+2xy+6x+4y+8$$
oraz punkt $(x,\ y)$, w którym jest ona przyjmowana.

<u>Rozwiązanie</u>. Mamy
$$2x^2+y^2+2xy+6x+4y+8=(x+y+2)^2+x^2+2x+4=$$
$$(x+y+2)^2+(x+1)^2+3.$$

Zatem wartość najmniejsza równa 3 jest przyjmowana wtedy, gdy

$x+1=0$ oraz $x+y+2=0$, tzn. gdy $x=-1$ i $y=-1$.

3.2. Działania na ułamkach algebraicznych

Działania na ułamkach algebraicznych są analogiczne do działań na ułamkach liczbowych.

Aby dodać albo odjąć ułamki algebraiczne, sprowadzamy je do wspólnego mianownika, a następnie dodajemy lub odejmujemy liczniki przy niezmienionych mianownikach.

Po pomnożeniu ułamka algebraicznego przez ułamek algebraiczny otrzymujemy ułamek, którego licznik jest iloczynem liczników danych ułamków, a mianownik – iloczynem mianowników.

Aby podzielić dane wyrażenie przez ułamek algebraiczny należy pomnożyć je przez odwrotność tego ułamka.

Przykłady. Doprowadzimy do najprostszej postaci poniższe ułamki.

a) $\left(\frac{3x-1}{x-2}-\frac{2x+3}{x+2}\right)-\left(1-\frac{x^2-3x+4}{x^2-4}\right)=$

$\frac{(3x-1)(x+2)-(2x+3)(x-2)}{x^2-4}-\frac{x^2-4-x^2+3x-4}{x^2-4}=$

$\frac{3x^2+6x-x-2-2x^2+4x-3x+6}{x^2-4}-\frac{3x-8}{x^2-4}=$

$\frac{x^2+6x+4}{x^2-4}-\frac{3x-8}{x^2-4}=\frac{x^2+3x+12}{x^2-4}$; $x\neq 2 \wedge x\neq -2$.

b) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{ab}{a^2-b^2}\right):\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\right)=$

$\frac{a(a-b)+b(a+b)+ab}{a^2-b^2}:\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}=$

$\frac{a^2+b^2+ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{2\left(a^2+b^2\right)}=\frac{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b)}{2\left(a^2+b^2\right)}=$

$\frac{\left(a^3-b^3\right)(a+b)}{2\left(a^2+b^2\right)}$; $a\neq b \wedge a\neq -b$.

c) $\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)=$

$$\frac{x}{a(x-2a)}-\frac{2}{x(x-2a)+(x-2a)}\left(1+\frac{x(3+x)}{3+x}\right)=$$

$$\frac{x}{a(x-2a)}-\frac{2(1+x)}{(x-2a)(x+1)}=\frac{x}{a(x-2a)}-\frac{2}{(x-2a)}=$$

$$\frac{x-2a}{a(x-2a)}=\frac{1}{a};\; x\neq 2a \wedge x\neq -1 \wedge x\neq -3 \wedge a\neq 0.$$

d) $$\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=$$

$$\frac{a^2-1}{n(n+a)}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(a+n)-n^3(a+n)}{1-a^2}=\frac{a^2-1}{n(a+n)}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{(a+n)\left(1-n^3\right)}{1-a^2}=$$

$$\frac{-1}{n}\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{\left(1+n+n^2\right)}{1}=\frac{n^2+n+1}{n};\; n\neq 0 \wedge n\neq 1 \wedge n\neq -a \wedge a\neq 1 \wedge a\neq -1.$$

e) $$\left(\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right)\cdot\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}=$$

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{(a-2)(a+2)}-\frac{4(a+1)}{a^2+2a-a-2}+\frac{a}{a^2-2a-a+2}\right)\cdot\frac{36\left(\left(a^3-a^2\right)-4(a-1)\right)}{(a+3)\left(a^2-3a+9\right)}=$$

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{2(a-1)}{(a-2)(a+2)}-\frac{4(a+1)}{(a+2)(a-1)}+\frac{a}{(a-2)(a-1)}\right)\cdot\frac{36(a-1)\left(a^2-4\right)}{(a+3)\left(a^2-3a+9\right)}=$$

$$\frac{a^2-4+2(a-1)^2-4(a+1)(a-2)+a(a+2)}{(a-1)\left(a^2-4\right)}\cdot\frac{36(a-1)\left(a^2-4\right)}{(a+3)\left(a^2-3a+9\right)}=$$

$$\frac{2a+6}{1}\cdot\frac{36}{(a+3)\left(a^2-3a+9\right)}=\frac{72(a+3)}{(a+3)\left(a^2-3a+9\right)}=\frac{72}{a^2-3a+9};$$

$$a\neq 1 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq -3.$$

f) $$\left(\frac{3(x+2)}{2\left(x^3+x^2+x+1\right)}+\frac{2x^2-x-10}{2\left(x^3-x^2+x-1\right)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right)=$$

$$\left(\frac{3(x+2)}{2\left(x^2(x+1)+(x+1)\right)}+\frac{2x^2+4x-5x-10}{2\left(x^2(x-1)+(x-1)\right)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3(x-1-x-1)}{2\left(x^2-1\right)}\right)=$$

$$\left(\frac{3(x+2)}{2(x+1)\left(x^2+1\right)}+\frac{2x(x+2)-5(x+2)}{2(x-1)\left(x^2+1\right)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{-6}{2\left(x^2-1\right)}\right)=$$

$$\left(\frac{3(x+2)(x-1)+(x+2)(2x-5)(x+1)}{2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}\right)\cdot\left(\frac{2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{10\left(x^2-1\right)-6\left(x^2+1\right)}\right)=$$

$$\frac{(x+2)\left(3x-3+2x^2+2x-5x-5\right)}{4x^2-16}=\frac{2(x+2)\left(x^2-4\right)}{4\left(x^2-4\right)}=\frac{x+2}{2};$$

$$x\neq-1,\ x\neq1,\ x\neq-2,\ x\neq2.$$

3.3. Działania na potęgach

Niech $a\in\mathbf{R}$ oraz $n\in\mathbf{N}_+$. <u>*Potęgą o podstawie*</u> a <u>*i wykładniku*</u> n nazywamy liczbę a^n zdefiniowaną następująco:

$$\begin{cases} a^1=a \\ a^{n+1}=a\cdot a^n; \quad n\geq 1. \end{cases}$$

Na mocy dodatkowej umowy dla $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ definiujemy <u>*potęgę o wykładniku zerowym*</u> przyjmując, że $a^0=1$.

Jeżeli $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $n\in\mathbf{N}_+$, to <u>*potęgą o podstawie*</u> a <u>*i wykładniku całkowitym ujemnym*</u> $-n$ nazywamy liczbę $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Jeżeli $n\in\mathbf{N}_+\setminus\{1\}$, to <u>*pierwiastkiem arytmetycznym n - tego stopnia*</u> z liczby nieujemnej x nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną a spełniającą równanie $a^n=x$. Oznaczamy go symbolem $\sqrt[n]{x}$. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego równania wynika z zasady ciągłości zbioru liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że jeśli $x<0$ i n jest liczbą parzystą, to równanie $a^n=x$ nie ma rozwiązań. Określamy natomiast pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej w następujący sposób: jeżeli $x<0$ i $n=2k+1$, gdzie $k\in\mathbf{N}_+$, to $\sqrt[n]{x}=-\sqrt[n]{-x}$.

Reasumując, z powyższych definicji wynika, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to dla każdego x istnieje w zbiorze $\mathbf{R}$ dokładnie jeden pierwiastek arytmetyczny $\sqrt[n]{x}$. Gdy natomiast n jest liczbą parzystą, to w zbiorze $\mathbf{R}$

pierwiastek arytmetyczny $\sqrt[n]{x}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geq 0$. Oczywiście wtedy jest on również określony jednoznacznie.

Niech w będzie liczbą wymierną różną od zera. Wówczas liczbę tę można zawsze przedstawić, i to tylko w jeden sposób, w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$ takiego, że $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^+$. W związku z tym dla dowolnego $a > 0$ możemy przyjąć, że

$$a^w = \begin{cases} \sqrt[q]{a^p} \text{ ; } q \neq 1, \\ a^p \text{ ; } q = 1. \end{cases}$$

Uwaga. Można wykazać, że założenie nieskracalności ułamka $\frac{p}{q}$ nie jest konieczne. Natomiast pominięcie założenia $a > 0$ i próba zdefiniowania potęgi o wykładniku wymiernym w analogiczny sposób prowadzi do sprzeczności, gdyż np.

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3, \text{ gdy tymczasem } \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym wymaga znajomości pojęcia kresu zbioru i zasady ciągłości liczb rzeczywistych lub granicy ciągu. A mianowicie, niech a będzie liczbą rzeczywistą dodatnią, a x dowolną liczbą rzeczywistą. Gdy $a \geq 1$, połóżmy

$$E = \{a^w : w \in \mathbf{Q} \wedge w < x\}.$$

Dowodzi się, że jest to zbiór niepusty i ograniczony z góry i dlatego istnieje jego kres górny. Zatem poprawna jest definicja

$$a^x = \sup\{a^w : w < x \wedge w \in \mathbf{Q}\}.$$

Jeżeli $0 < a < 1$, to wobec poprzedniego możemy przyjąć, że

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Inne podejście do potęgi o wykładniku rzeczywistym opiera się na pojęciu granicy ciągu liczbowego. Wiadomo, że każda liczba rzeczywista x jest granicą ciągu liczb wymiernych. Mogą to być na przykład ciągi jej przybliżeń z niedomiarem otrzymane przez odpowiednie obcinanie rozwinięć dziesiętnych x. Można udowodnić dla dowolnego $a \in \mathbf{R}_+$, że jeżeli ciąg liczb wymiernych (w_n) jest zbieżny do liczby x, to ciąg (a^{w_n}) posiada skończoną granicę. Ponadto łatwo widać, że jeżeli inny ciąg liczb wymiernych (q_n) jest zbieżny do x, to

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{w_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$. Rzeczywiście, wtedy ciąg $(w_1, q_1, w_2, q_2, w_3, q_3, \ldots, w_n, q_n, \ldots)$ jest także zbieżny do x. Ponadto ciągi $\left(a^{w_n}\right)$ i $\left(a^{q_n}\right)$ są podciągami ciągu zbieżnego $\left(a^{w_1}, a^{q_1}, a^{w_2}, a^{q_2}, a^{w_3}, a^{q_3}, \ldots\right)$, a więc są zbieżne do tej samej granicy, co ten ciąg.

Możemy więc dla $a \in \mathbf{R}_+$ i $x \in \mathbf{R}$ przyjąć, że

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{w_n},$$

gdzie (w_n) jest dowolnym ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x.

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych x i y prawdziwe są następujące wzory:

(i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

(ii) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;

(iii) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;

(iv) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

(vi) $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$;

(vii) Jeżeli $a > 1$, to $x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$;

(viii) Jeżeli $0 < a < 1$, to $x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$;

(ix) Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Przykłady. a) Znajdziemy wartość wyrażenia $\left(a^{-\frac{3}{2}}\, b \left(a b^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ dla $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$\left(a^{-\frac{3}{2}}\, b \left(a b^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{-\frac{9}{2}} b^3 a^{-\frac{3}{2}} b^3 a^2 = a^{-4} b^6 = \frac{b^6}{a^4} = \frac{\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6}{\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^4} = \frac{2^{-2}}{2^{-2}} = 1.$$

b) Uprościmy wyrażenie $w = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{1}{x^{1,5}-1}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$w = \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} \cdot \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 1}{1} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} = x-1;$$

$$x \neq 1 \wedge x > 0.$$

c) Uprościmy wyrażenie $w = \left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zachodzą równości

$$w = \left(a + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + \sqrt{a}\,\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

$$\left(a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left(a+b-\sqrt{ab}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left(a+b-\sqrt{ab}\right)^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(a+b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left(a+b-\sqrt{ab}\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (a-b)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a-b)^2}\,;\ a>0 \wedge b>0 \wedge a \neq b.$$

d) Uprościmy wyrażenie $w = \left(\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}} - \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$w=\left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}(x-2)}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x-1)}\right)^{-1}-\frac{3x-2}{1-2x}=\left(\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{-1}-\frac{3x-2}{1-2x}=$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{3x-3-x+2}-\frac{3x-2}{1-2x}=\frac{x^2-3x+2}{2x-1}+\frac{3x-2}{2x-1}=\frac{x^2}{2x-1};$$

$$x>0\wedge x\neq\frac{1}{2}\wedge x\neq 1\wedge x\neq 2.$$

4. Ogólne własności funkcji

4.1. Pojęcie funkcji

Często badamy stosunki między różnymi wielkościami, które są ze sobą tak związane, że każdej wartości pierwszej z nich odpowiada ściśle określona wartość drugiej. Mamy wówczas do czynienia z funkcją.

Niech X, Y będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y ze zbioru Y, to mówimy, że została określona funkcja f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y. Symbolicznie piszemy $f : X \to Y$.

Element y przyporządkowany elementowi x nazywamy wartością funkcji f w punkcie x lub obrazem elementu x i oznaczamy symbolem $f(x)$. Mówią o tym także zapisy: $y = f(x)$, $f : x \mapsto y$, $f : x \mapsto f(x)$.

Zbiór X, oznaczany symbolem D_f, nazywamy dziedziną funkcji f, a elementy zbioru X – argumentami funkcji f. Jeżeli zbiór wartości funkcji, tzn. zbiór $f(D_f) = \left\{ y \in Y : \underset{x \in D_f}{\exists} (y = f(x)) \right\}$ jest równy Y, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje X na Y. Np. funkcja $f : \mathbf{R} \to Y$ określona wzorem $y = x^2$ jest odwzorowaniem w zbiór Y, gdy $Y = \mathbf{R}$, i odwzorowaniem na zbiór Y, gdy $Y = [0; \infty)$.

Przykłady. Zdefiniujemy kilka funkcji postaci $f : X \to Y$.

a) $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \mapsto x^3 - 6x^2$.

Jest to funkcja rzeczywista jednej zmiennej.

b) $X = \{(s, t) : s \in \mathbf{R} \wedge t \in \mathbf{R}\}$, $Y = \mathbf{R}$, $f : (s, t) \mapsto 3 - 2st + t^2$.

W tym przypadku f jest funkcją rzeczywista dwóch zmiennych.

c) $X = Y$ – ustalona płaszczyzna Π, $\vec{v}$ – ustalony wektor. Przyporządkowując dowolnemu punktowi $A \in \Pi$ taki punkt $B \in \Pi$, że $\vec{AB} = \vec{v}$, otrzymujemy funkcję przekształcająca Π na Π, oznaczaną symbolem $T_{\vec{v}}$, która nazywa się translacją o wektor $\vec{v}$.

d) $X = \mathbf{N}$, $Y = \mathbf{R}$, $f : n \mapsto \dfrac{2n^2 - 1}{n + 1}$.

Jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych; funkcje tego rodzaju zwane są także ciągami liczbowymi.

e) $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{Z}$, $f : x \mapsto \max\{t : t \le x \wedge t \in \mathbf{Z}\}$.

Odwzorowanie f nazywa się *częścią całkowitą liczby*, *funkcją entier*, *funkcją podłogi*. Zamiast $f(x)$ najczęściej pisze się $[x]$ lub $\lfloor x \rfloor$.

f) $X = \mathbf{R}$, $Y = \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$.

Jest to *funkcja Dirichleta*. Ma ona wiele ciekawych własności, w dalszej części opracowania będziemy się do niej odwoływać.

Uwaga. Często zdarza się, że podaje się jedynie wzór definiujący funkcję liczbową bez sprecyzowania jej dziedziny *X* lub zbioru *Y*. Uważa się wówczas, że dziedziną funkcji jest największy zbiór, na którym wyrażenie określające tę funkcję ma sens. Nazywany jest on czasem *dziedziną naturalną funkcji*. Jako zbiór *Y*, jeżeli nie jest wyraźnie określony, przyjmuje się zbiór wszystkich liczb rzeczywistych **R**.

W dalszym ciągu zajmować się będziemy przypadkiem, gdy $X \subset \mathbf{R}$ i $Y \subset \mathbf{R}$.

Jeżeli funkcje *f* i *g* mają wspólną dziedzinę, tj. $D_f = D_g = D$, to można zdefiniować *sumę*, *różnicę*, *iloczyn* oraz *iloraz* funkcji f i g. Funkcje te definiujemy w następujący sposób:

$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ dla $x \in D$;

$f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$ dla $x \in D$;

$f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ dla $x \in D$;

$\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dla $x \in D \setminus \{x : g(x) = 0\}$.

Miejscem zerowym funkcji $f : X \to Y$ nazywamy każdy punkt $x_0 \in X$ o tej własności, że $f(x_0) = 0$. Np. funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Są nimi wszystkie liczby postaci $x = k\pi$, gdzie *k* jest dowolną liczbą całkowitą, różną od 0.

Dwie funkcje $f : D_f \to Y$ i $g : D_g \to Y$ nazywamy *równymi*, jeżeli:

1^0 $D_f = D_g$,

2^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(f(x) = g(x) \right)$.

Przykłady. ***a)*** Funkcje: $f: x \mapsto x^3$ określona na zbiorze **R** oraz $g: x \to \frac{x^4}{x}$ określona na zbiorze $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ nie są równe, gdyż ich dziedziny są różne.

b) Funkcje $f: x \mapsto \sqrt{x^6}$ i $g: x \to x^3$ określone na **R** nie są równe, ponieważ dla $x < 0$ przyjmują różne wartości, np.

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^6} = 8, \quad g(-2) = -8.$$

c) Funkcje $f: x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$ i $g: x \mapsto 1$ określone na **R** są równe.

Niech f będzie funkcją przekształcającą X w Y. Czasami istnieje potrzeba rozważania funkcji f na części jej dziedziny, np. na pewnym podzbiorze A zbioru X. Przykładowo, najczęściej funkcję $f: x \mapsto \sin x$ określamy na zbiorze liczb rzeczywistych, ale czasami może być wygodnym rozpatrywanie jej tylko na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. W takim przypadku określamy nową funkcję postaci $g: A \to Y$, przyjmując, że $g(x) = f(x)$ dla $x \in A$. Oznaczamy ją symbolem $f \mid A$ i nazywamy <u>obcięciem funkcji</u> f <u>do zbioru</u> A.

<u>Wykresem funkcji</u> $f: D_f \to Y$ nazywamy zbiór

$$W_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}.$$

Wykresy funkcji liczbowych są więc podzbiorami płaszczyzny układu współrzędnych. Nie zawsze można je jednak narysować. Ze względu na gęstość zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych (patrz *paragraf 2.3*) wykresu funkcji Dirichleta nie da się narysować, chociaż on istnieje.

Wykresy wielu funkcji możemy otrzymać z wykresów funkcji elementarnych stosując proste przekształcenia płaszczyzny. Opiszemy najważniejsze takie przekształcenia w przypadku, gdy $D_f = \mathbf{R}$.

1. Przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a, 0]$, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - a)$.

2. Rezultatem przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [0, a]$ jest wykres funkcji $y = f(x) + a$.

3. W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{v} = [a,\, b]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x-a) + b$.

4. Odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi *OX*, otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(x)$.

5. Odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem osi *OY*, otrzymujemy wykres funkcji $y = f(-x)$.

6. Odbijając wykres funkcji $y = f(x)$ symetrycznie względem początku układu współrzędnych, otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(-x)$.

7. Wykresem funkcji $y = f(|x|)$ jest suma dwóch zbiorów: wykresu funkcji $y = f(x)$ obciętej do przedziału $[0;\, \infty)$ oraz wykresu funkcji $y = f(-x)$ obciętej do przedziału $(-\infty;\, 0)$.

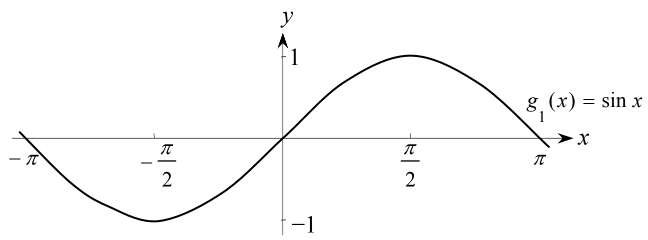
8. Wykresem funkcji $y = |f(x)|$ jest suma tych części wykresów funkcji $y = f(x)$ i funkcji $y = -f(x)$, które leżą powyżej lub na osi *OX*.

9. Aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = f(a\,x)$, gdzie $a \neq 0$, należy każdy punkt wykresu funkcji f o współrzędnych $(x,\, y)$ przekształcić w punkt $\left(\frac{x}{a},\, y\right)$.

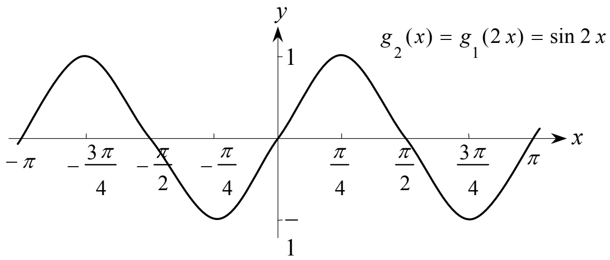
10. Aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = a\,f(x)$, gdzie $a \neq 0$, należy każdy punkt wykresy funkcji f o współrzędnych $(x,\, y)$ przekształcić w punkt $(x, a\,y)$.

Przykład. Naszkicujmy wykres funkcji $f(x) = \left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\right|$.

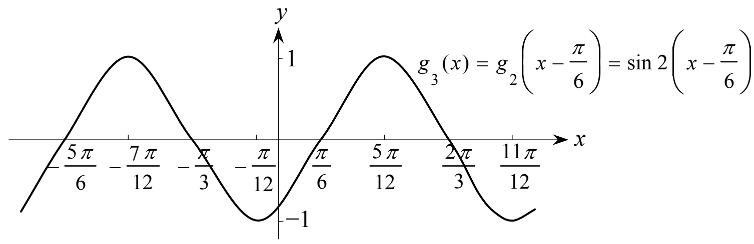
<u>*Rozwiązanie*</u>. Zauważmy na wstępie, że wzór definiujący funkcję f można przekształcić do postaci $f(x) = \left|\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right|$ oraz, że dziedziną funkcji jest zbiór **R**. Szkicujemy najpierw wykres funkcji $g_1(x) = \sin x$ i następnie przy pomocy kolejnych modyfikacji uzyskujemy wykresy nowych funkcji tak, aby na końcu dojść do wykresu funkcji *f*. Są to następujące funkcje:



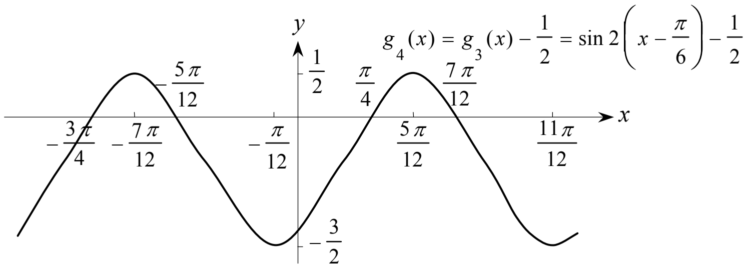
Przekształcenie 9:



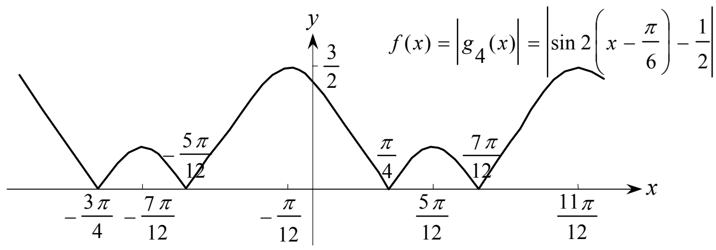
Przekształcenie 1:



Przekształcenie 2:



Przekształcenie 8:



4.2. Monotoniczność i różnowartościowość

W trakcie rozwiązywania pewnego typu nierówności i równań (np. logarytmicznych, wykładniczych, pierwiastkowych) mają zastosowanie: własność monotoniczności i własność różnowartościowości funkcji.

Funkcję f nazywamy:
rosnącą na zbiorze $A \subset D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right);$$

malejącą na zbiorze $A \subset D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right);$$

nierosnącą na zbiorze $A \subset D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \right);$$

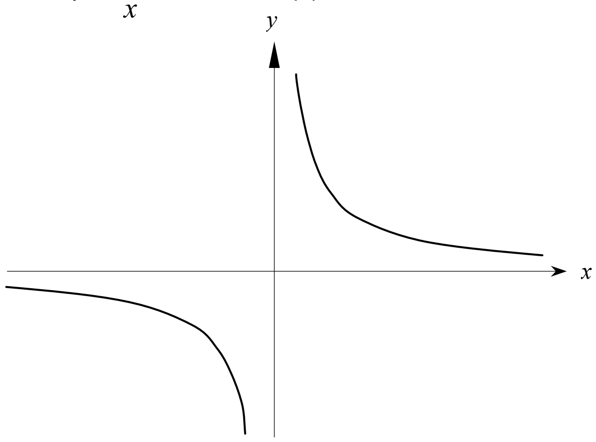
niemalejącą na zbiorze $A \subset D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \right);$$

monotoniczną na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest ona rosnąca, malejąca, nierosnąca lub niemalejąca na tym zbiorze.

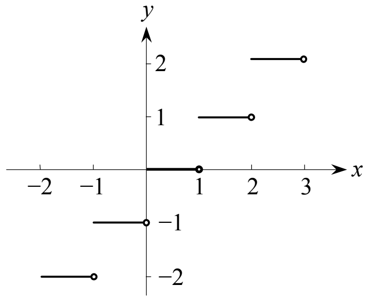
Funkcje rosnące i malejące nazywamy także funkcjami *ściśle monotonicznymi*.

`*Przykłady.* *a)* Rozważmy *proporcjonalność odwrotną*, tj. funkcja określoną wzorem $y = \dfrac{1}{x}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$:



Jest ona malejąca zarówno na przedziale $(-\infty; 0)$, jak i na przedziale $(0; \infty)$, wobec czego jest to *funkcja przedziałami malejąca*. Z drugiej strony dyskutowana funkcja nie jest malejąca na całej swojej dziedzinie, gdyż np. $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. Podobnie funkcja $g(x) = -\dfrac{1}{x}$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ jest *przedziałami rosnąca*, choć nie jest funkcją rosnącą.

b) Funkcja entier $f(x) = [x]$ jest niemalejąca na całej swojej dziedzinie, co potwierdza jej wykres:



c) Funkcja Dirichleta (patrz *przykład* na początku rozdziału) nie jest monotoniczna w żadnym z przedziałów.

Jak było wspomniane wcześniej, pojęcie funkcji monotonicznej jest przydatne do rozwiązywania pewnych typów nierówności. Korzysta się tu z następujących twierdzeń:

Jeżeli funkcja f jest rosnąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 .$$

Jeżeli funkcja f jest malejąca na swojej dziedzinie, to dla dowolnych $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

Przykład. Rozwiążemy nierówność

$$\sqrt{x-2} + x > 4 .$$

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu, że funkcja $f(x) = x^2$ obcięta do przedziału $[0; \infty)$ jest rosnąca. Dziedziną nierówności jest przedział $[2; \infty)$. Mamy

$$\sqrt{x-2} + x > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 4 - x .$$

Jeżeli $x > 4$, to lewa strona ostatniej nierówności jest dodatnia, a prawa – ujemna, więc dla takich x nierówność jest prawdziwa. Jeżeli $x \in [2; 4]$, to obie strony są nieujemne i możemy skorzystać z zacytowanego wyżej twierdzenia. Zatem

$$\sqrt{x-2} > 4 - x \Leftrightarrow x - 2 > 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 - 6x\right) - \left(3x - 18\right) < 0 \Leftrightarrow x(x-6) - 3(x-6) < 0 \Leftrightarrow (x-6)(x-3) < 0,$$

skąd w rozważanym przypadku $x \in (3; 4]$, co można wywnioskować analizując znaki i wartości czynników $x - 6$ oraz $x - 3$.

W konsekwencji nierówność jest prawdziwa dla $x \in (3; \infty)$.

Funkcję $f : D_f \to Y$ nazywamy *różnowartościową* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli różnym elementom ze zbioru A przyporządkowuje ona różne wartości, tzn., gdy zachodzi warunek

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right).$$

Może on być zastąpiony warunkiem równoważnym

$$\underset{x_1, x_2 \in A}{\forall} \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right).$$

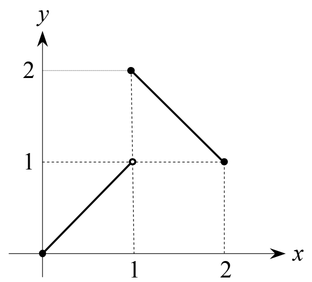
Z powyższego wynika, że każda wartość funkcji jest przyjmowana przez funkcję tylko jeden raz. Dla funkcji o wartościach liczbowych geometrycznie oznacza to, że dowolna prosta równoległa do osi OX przecina wykres funkcji w co najwyżej jednym punkcie.

Łatwo zauważyć, że funkcje ściśle monotoniczne na pewnym zbiorze są na tym zbiorze różnowartościowe. Odwrotne wynikanie nie jest prawdziwe.

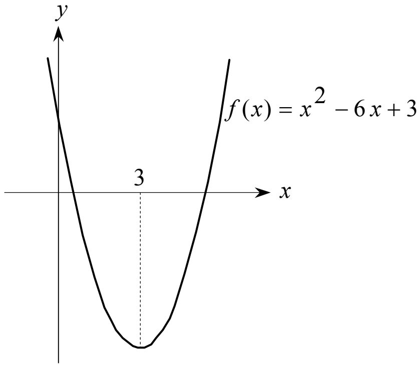
Przykład. Niech funkcja f określona na przedziale $[0; 2]$ będzie zdefiniowana następująco:

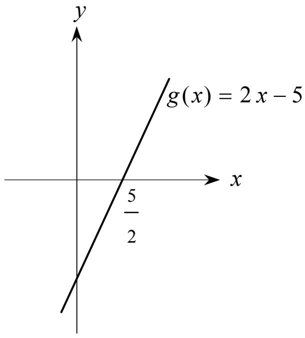
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle 0; 1), \\ -x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1; 2\rangle. \end{cases}$$

Jest ona różnowartościowa, ale nie jest ściśle monotoniczna na przedziale $[0; 2]$:



Przykłady. Funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 3$ jest różnowartościowa na przedziałach $(-\infty; 3\rangle$ oraz $\langle 3; \infty)$, ale nie jest ona różnowartościowa na całej swojej dziedzinie. Funkcja $g(x) = 2x - 5$ jest natomiast różnowartościowa na całej swojej dziedzinie, którą jest zbiór **R**.





Duże znaczenie praktyczne ma następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa na swojej dziedzinie, to dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in D_f$ zachodzi równoważność

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Zastosowania różnowartościowości do rozwiązywania równań zostaną omówione dokładniej przy okazji omawiania własności poszczególnych funkcji. Teraz ograniczymy się do dwóch przykładów.

Przykład. Rozwiążemy poniższe równania.

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 72 = 0$.

<u>Rozwiązanie.</u> Stosując wzór na sześcian różnicy, sprowadzamy równanie do postaci

$$(x-2)^3 = 4^3 .$$

Dzięki różnowartościowości funkcji $x \mapsto x^3$ na **R** jest oczywiste, że rozwiązaniem równania jest liczba $x = 6$.

b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = 4$.

<u>Rozwiązanie</u>. Dziedziną równania jest przedział $[5; \infty)$. Rozwiążemy równanie metodą równań równoważnych, korzystając z zacytowanego wyżej twierdzenia i faktu, że funkcja $f(x) = x^2$ obcięta do przedziału $[0; \infty)$ jest różnowartościowa. Mamy

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=4 \Leftrightarrow 2x-2+2\sqrt{(x-5)(x+3)}=16 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2-2x-15}=9-x.$$

Dla $x>9$ równanie nie posiada rozwiązań, ponieważ wtedy prawa jego strona jest ujemna, a lewa nieujemna. Dla $x \in [5;\ 9]$ mamy natomiast następujące równoważności:

$$\sqrt{x^2-2x-15}=9-x \Leftrightarrow x^2-2x-15=81-18x+x^2 \Leftrightarrow 16x=96 \Leftrightarrow x=6.$$

Liczba $x=6$ należy do przedziału $[5;\ 9]$ i dlatego jest pierwiastkiem rozwiązywanego równania.

4.3. Dalsze własności funkcji

Mówimy, że funkcja $f: D_f \to Y$ przyjmuje na zbiorze $A \subset D_f$ <u>wartość największą</u> $y_0 \in Y$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0)=y_0$ oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Odpowiednio, funkcja $f: D_f \to Y$ przyjmuje na zbiorze $A \subset D_f$ <u>wartość najmniejszą</u> $y_0 \in Y$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0)=y_0$ oraz dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Przykład. Funkcja $f(x)=x^2$ przyjmuje wartość największą równą 1 i najmniejszą równą 0 na zbiorze $[-1;\ 1]$, natomiast na zbiorze $(-1;\ 1)$ przyjmuje tylko wartość najmniejszą równą 0, ale nie przyjmuje wartości największej.

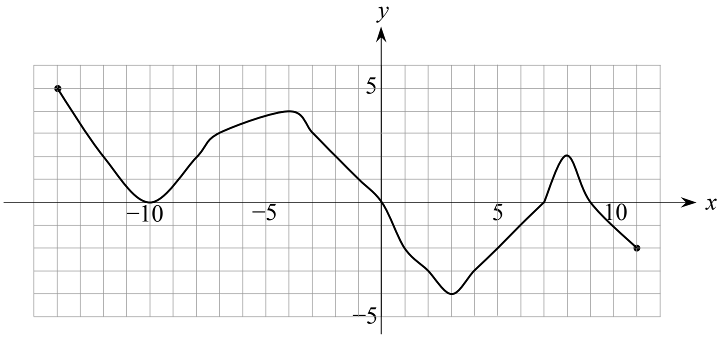
Funkcję f nazywamy <u>ograniczoną</u> na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieją takie stałe m i M, że dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność $m \leq f(x) \leq M$, tzn., gdy

$$\underset{m,\ M \in \mathbf{R}}{\exists}\ \underset{x \in A}{\forall} \left(m \leq f(x) \leq M\right).$$

Przykładowo, funkcja sinus jest ograniczona na **R**, natomiast proporcjonalność odwrotna nie jest ograniczona na całej swojej dziedzinie.

Wykres funkcji jest bogatym źródłem informacji dotyczących własności tej funkcji.

Przykład. Przypuśćmy, że poniższy rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji określonej na przedziale $[-14; 11]$:



Widzimy, że:

a) zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-4; 5]$;

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -10 \vee x = 0 \vee x = 7 \vee x = 9$;

c) $f(2) = -3,\ f(3) = -4,\ f(-4) = 4$;

d) $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \{-10\} \cup [0; 7] \cup [9; 11]$;

e) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -12 \vee x = -8 \vee x = -2 \vee x = 8$;

f) $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5 \vee x = 11$;

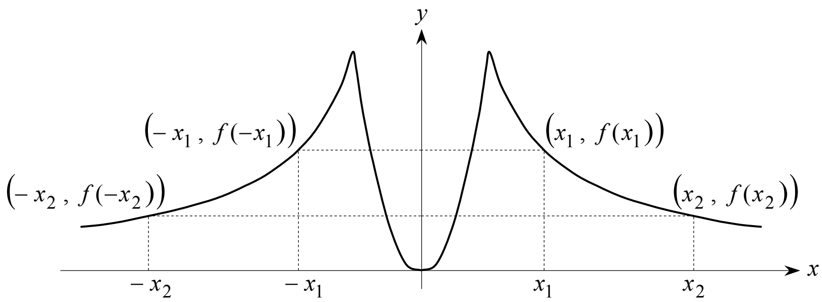
g) $f(x) \ge 2 \Leftrightarrow x \in [-14; -12] \cup [-8; -2] \cup \{8\}$;

h) $f(x) < -3 \Leftrightarrow x \in (2; 4)$;

i) funkcja rośnie na przedziałach $[-10; -4]$ oraz $[3; 8]$;

j) funkcja maleje na przedziałach $[-14; -10]$, $[-4; 3]$ oraz $[8; 11]$.

Wśród wszystkich funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych wyróżnia się te, których wykresy mają pewne symetrie.



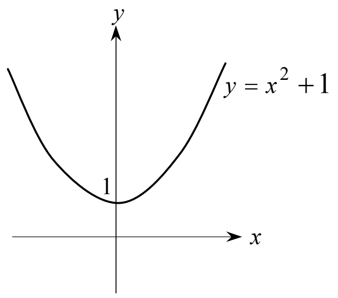
Funkcję $f : D_f \to \mathbf{R}$ nazywamy funkcją <u>*parzystą*</u>, jeżeli:

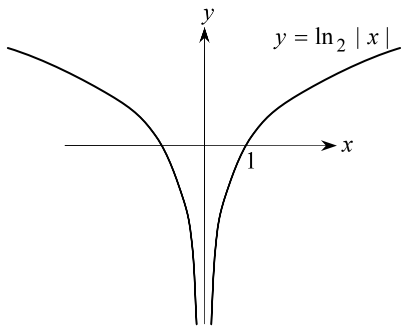
1^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(-x \in D_f\right)$;

2^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(f(-x) = f(x)\right)$.

Uwaga. Z warunków 1^0 i 2^0 wynika, że oś OY układu współrzędnych jest osią symetrii wykresu funkcji parzystej f.

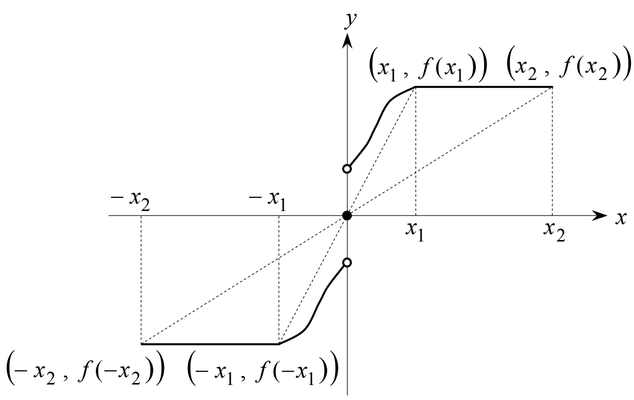
Przykłady. Oto przykłady wykresów funkcji parzystych:





Dodajmy, że nazwę tej funkcji można skojarzyć z faktem, że jednomiany stopnia parzystego, tj. funkcje postaci $f(x) = a\,x^{2n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, są funkcjami parzystymi.

Rozważymy teraz funkcje, dla których początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii ich wykresów.



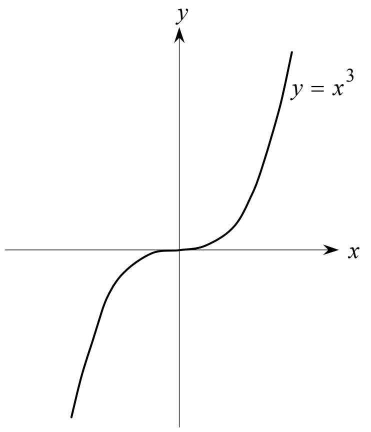
Funkcję $f : D_f \to \mathbf{R}$ nazywamy <u>*funkcją nieparzystą*</u>, jeżeli

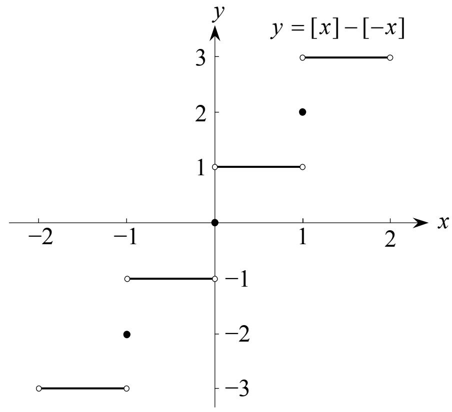
1^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(-x \in D_f \right)$;

2^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(f(-x) = -f(x) \right)$.

Uwaga. Z warunków 1^0 i 2^0 wynika, że początek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji nieparzystej f.

Przykłady. Oto wykresy przykładowych funkcji nieparzystych:





Funkcjami nieparzystymi są między innymi funkcje trygonometryczne sinus, tangens, cotangens oraz jednomiany stopnia nieparzystego, tj. funkcje postaci $f(x) = a\,x^{2n+1}$, gdzie $a \neq 0$ i $n \in \mathbf{N}$.

Funkcję $f : D_f \to \mathbf{R}$ nazywamy <u>*okresową*</u>, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia T, że

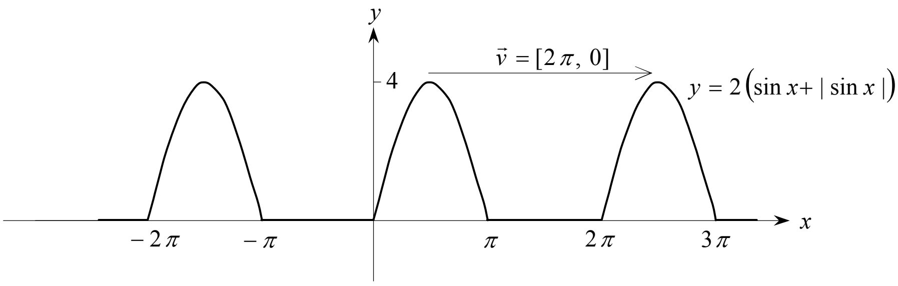
1^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} \left(x + T \in D_f \wedge x - T \in D_f \right)$;

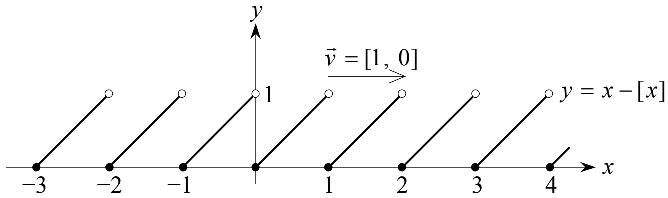
2^0 $\underset{x \in D_f}{\forall} f(x+T) = f(x)$.

Liczbę T nazywamy <u>*okresem funkcji*</u> f.

Geometrycznie powyższa definicja oznacza, że jeżeli wykres funkcji okresowej o okresie T przesuniemy o wektory $\vec{v} = [T, 0]$ lub $\vec{u} = [-T, 0]$, to otrzymamy ten sam wykres.

Przykłady. Podamy wykresy przykładowych funkcji okresowych.





Jeżeli istnieje najmniejszy okres T_0 funkcji *f*, to nazywamy go *okresem zasadniczym* lub *podstawowym*.

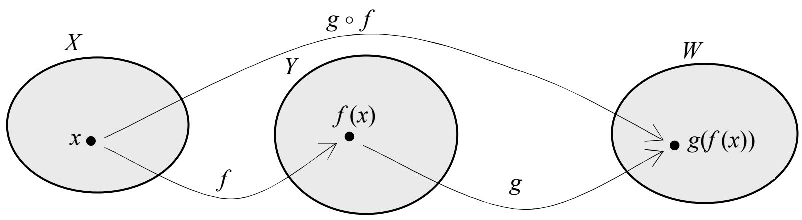
Funkcja stała określona na **R** jest funkcją okresową, ale nie ma okresu zasadniczego. Okresem tej funkcji jest każda liczba rzeczywista dodatnia. Najczęściej spotykanymi funkcjami okresowymi są funkcje trygonometryczne. Okres zasadniczy funkcji sinus i cosinus wynosi 2π, zaś dla funkcji tangens i cotangens jest on równy π.

4.4. Składanie i odwracanie funkcji

Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to W$ będą funkcjami. *Złożeniem* lub *superpozycją funkcji* *f* oraz *g* nazywamy funkcję $g \circ f : X \to W$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X .$$

Analogicznie określamy złożenie większej liczby funkcji.



Przykład. Niech $f(x)=\sin x,\ \ g(x)=x^2+1,\ \ x\in\mathbf{R}$. Wówczas

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(x^2+1\right)=\sin\left(x^2+1\right),$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sin x)=\sin^2 x+1$.

Uwaga. Powyższe przykłady wskazują, że składanie funkcji nie jest przemienne. Ponadto definicję superpozycji funkcji $g\circ f$ możemy rozszerzyć na przypadek gdy

$$f:X\to Y,\qquad g:U\to W$$

gdzie $Y\subset U$.

Mówimy, że funkcja $f:X\to Y$ odwzorowuje zbiór X na zbiór Y <u>*w sposób wzajemnie jednoznaczny*</u>, jeżeli jest to funkcja różnowartościowa i przekształca zbiór X na Y.

Niech funkcja f odwzorowuje X na Y w sposób wzajemnie jednoznaczny. <u>*Funkcją odwrotną*</u> do <u>*funkcji*</u> f nazywamy funkcję $f^{-1}:Y\to X$ zdefiniowaną warunkiem

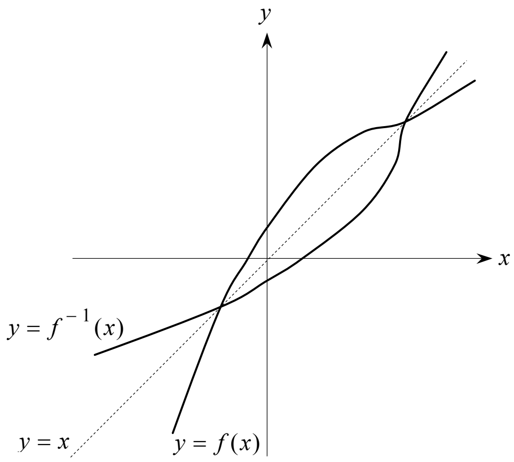
$$\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{y\in Y}{\forall}\left(f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow y=f(x)\right).$$

Dla każdej funkcji różnowartościowej f przekształcającej X na Y istnieje dokładnie jedna funkcja odwrotna i jest ona różnowartościowa.

Przykład. Niech $f(x)=x^2-6x+7$ dla $x\in[3;\infty)$. Znajdziemy funkcję odwrotną funkcji f. Funkcja f przekształca wzajemnie jednoznacznie przedział $[3;\,\infty)$ na przedział $[-2;\,\infty)$, gdyż $f(x)=(x-3)^2-2$. Kładąc $y=(x-3)^2-2$ i wyznaczając stąd x, otrzymujemy: $(x-3)^2=y+2$. Ponieważ $x\in[3;\,\infty)$ oraz $y\in[-2;\,\infty)$, więc $x=3+\sqrt{y+2}$. Zamieniając rolami zmienne x i y, otrzymujemy $y=3+\sqrt{x+2}$ i w konsekwencji $f^{-1}(x)=3+\sqrt{x+2}$. Widać przy tym, że

$$D_{f^{-1}}=[-2;\,\infty),\ \ f^{-1}\left(D_{f^{-1}}\right)=[3;\,\infty).$$

Z definicji funkcji odwrotnej wynika, że jeśli punkt (a,b) należy do wykresu funkcji odwracalnej $f:X\to Y$, to punkt (b,a) należy do wykresu funkcji $f^{-1}: Y \to X$. Gdy $X \subset \mathbf{R}$ i $Y \subset \mathbf{R}$, to krzywe o równaniach $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$, będące wykresami funkcji f i f^{-1}, są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$. Ilustruje to poniższy rysunek:

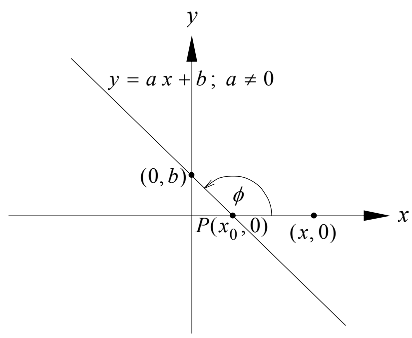


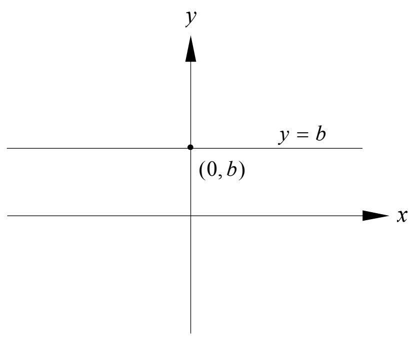
5. Funkcja liniowa

5.1. Własności podstawowe

<u>*Funkcją liniową*</u> nazywamy funkcję o dziedzinie równej zbiorowi liczb rzeczywistych, określoną wzorem $f(x) = a\,x + b$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Liczbę a nazywamy <u>*współczynnikiem kierunkowym*</u> funkcji, a liczbę b – <u>*wyrazem wolnym*</u>. W szczególnym przypadku, gdy $a = 0$, funkcja liniowa ma postać $f(x) = b$ i jest <u>*funkcją stałą*</u>.

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta przechodząca przez punkt o współrzędnych $(0, b)$. Jeżeli $a \neq 0$, to prosta ta jest nachylona do osi *OX* pod takim kątem ϕ, że $\mathrm{tg}\phi = a$; jeżeli $a = 0$, to wspomniana prosta jest równoległa do osi *OX*.





Uwaga. Kątem nachylenia prostej *l* do osi *OX*, przecinającą tę oś w punkcie *P* o współrzędnych $(x_0, 0)$, nazywamy kąt skierowany ϕ, którego ramieniem początkowym jest ta półprosta zawarta w osi *OX* wychodząca z punktu *P*, do której należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, 0)$; $x \geq x_0$, a ramieniem końcowym ta część prostej *l*, dla której miarą kąta ϕ jest liczbą z przedziału $[0; \pi)$.

Funkcja liniowa $f(x) = a\,x + b$ jest:

(i) malejąca, gdy $a < 0$;

(ii) rosnąca, gdy $a > 0$;

(iii) stała, gdy $a = 0$.

Funkcja liniowa $f(x)=ax+b$:

(i) ma jedno miejsce zerowe $x=-\frac{b}{a}$, gdy $a\neq 0$;

(ii) nie ma miejsc zerowych, gdy $a=0$ i $b\neq 0$;

(iii) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a=b=0$. W tym przypadku każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym tej funkcji.

5.2. Równania i nierówności liniowe

Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci $ax+b=0$, gdzie $a,b\in\mathbf{R}$. Jego rozwiązaniem jest miejsce zerowe funkcji $f(x)=ax+b$. Jeżeli $a\neq 0$, to równanie liniowe nazywamy *równaniem pierwszego stopnia*.

Z poprzednich rozważań wynika, że równanie liniowe z jedną niewiadomą:

- posiada jedno rozwiązanie postaci $x=-\frac{b}{a}$, gdy $a\neq 0$; nazywamy je wówczas *równaniem oznaczonym*;
- nie ma rozwiązań, jeżeli $a=0$ i $b\neq 0$; nazywamy je wówczas *równaniem sprzecznym*;
- posiada nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli $a=0$ i $b=0$. Co więcej, wówczas każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania i dlatego nazywamy je *równaniem tożsamościowym*.

Nierównością liniową nazywamy każdą z nierówności postaci

$$ax+b<0,\quad ax+b>0,\quad ax+b\leq 0,\quad ax+b\geq 0,$$

gdzie $a,\, b\in\mathbf{R}$.

W pewnych sytuacjach całą rodzinę równań lub nierówności da się opisać przy pomocy jednego równania z parametrem lub nierówności z parametrem. Dla zilustrowania zagadnienia rozważmy następującą sytuację.

W zakładzie produkującym tkaniny na dzienny koszt produkcji składają się koszty stałe wynoszące 5000 zł dziennie i oraz koszty zmienne zależne od rodzaju danej tkanin i wynagrodzeń robotników. Należy tak zaplanować produkcję, aby koszty nie przekroczyły 50 000 zł dziennie. Załóżmy, że danego dnia produkowana jest tkanina tylko jednego rodzaju. Jeżeli koszty zmienne wynoszą 10 zł za metr bieżący wyprodukowanej tkaniny, to aby zaplanować dzienną produkcję należy rozwiązać nierówność $5000+10x\leq 50000$, gdzie x oznacza ilość metrów bieżących produkowanej tkaniny. Jeżeli natomiast koszty zmienne wzrosną do 15 zł za metr bieżący wyprodukowanej tkaniny, to analogiczna nierówność ma postać $5000+15x \le 50\,000$.

Zagadnienie powyższe w przypadku ogólnym opisuje nierówność $5000+a\,x \le 50\,000$, gdzie parametr a jest kosztem zmiennym wyprodukowania metra bieżącego tkaniny. W badanym przypadku należy założyć, że $a>0$.

Przykład. Rozwiążemy równanie z parametrem m:

$$(m+1)^2\,x - m = 2\,(m+1)\,x + 1.$$

<u>*Rozwiązanie.*</u> Po przekształceniach równoważnych otrzymujemy następujące równanie liniowe:

$$\left(m^2-1\right)x = m+1.$$

Przeprowadźmy dyskusję tego równania ze względu na wartość m.

1^0 Jeżeli $m \ne 1$ i $m \ne -1$, to dzieląc obie strony równania przez m^2-1, otrzymamy, że $x=\dfrac{1}{m-1}$. W tym przypadku równanie jest oznaczone i posiada jedno rozwiązanie.

2^0 Jeżeli $m=1$, to równanie ma postać $0\cdot x=2$ i jest równaniem sprzecznym.

3^0 Jeżeli $m=-1$, to równanie ma postać $0\cdot x=0$ i jest równaniem tożsamościowym. Każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania.

<u>*Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi*</u> nazywamy każde równanie postaci

$$a\,x+b\,y+c=0,$$

a <u>*nierównością liniową z dwiema niewiadomymi*</u> – każdą z nierówności postaci

$$a\,x+b\,y+c<0,\quad a\,x+b\,y+c>0,\quad a\,x+b\,y+c\le 0,\quad a\,x+b\,y+c\ge 0,$$

gdzie przynajmniej jedna z liczb a lub b jest różna od zera.

Zastrzeżenie, że przynajmniej jeden ze współczynników a, b jest różny od 0 powoduje, że wykresem równania liniowego jest linia prosta o równaniu $a\,x+b\,y+c=0$. Wykresem nierówności liniowej jest jedna z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą o równaniu $a\,x+b\,y+c=0$, bez lub z tą prostą w zależności od znaku nierówności. Szczegóły wyjaśniają poniższe przykłady.

Przykłady*: *a) Rozwiążemy równanie

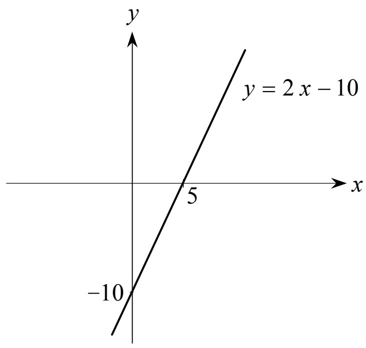
$$4x-2y=20.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zachodzi równoważność

$$4\,x-2\,y=20 \Leftrightarrow y=2\,x-10.$$

Zbiorem rozwiązań równania jest więc zbiór par liczb postaci $(x,\ 2x-10)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Aby przedstawić graficznie znaleziony zbiór rozwiązań, należy narysować wykres funkcji liniowej $f(x)=2x-10$:



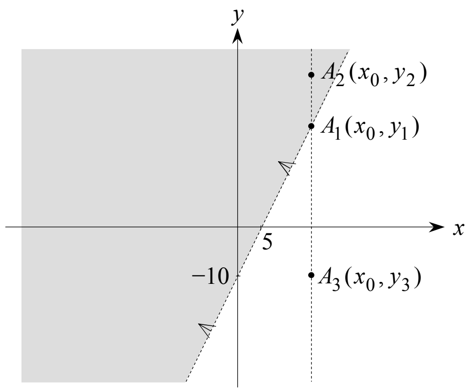
Każdy punkt leżący na tej prostej ma współrzędne, które spełniają badane równanie i odwrotnie, każde rozwiązanie równania jest parą liczb będących współrzędnymi pewnego punktu leżącego na tej prostej.

b) W ekonomii często rozważa się nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi. Zbiór rozwiązań takich nierówności przedstawia się na ogół graficznie. Rozwiążemy nierówność

$$4x-2y<20.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Podobnie jak poprzednio, mamy:

$$4x-2y<20 \Leftrightarrow y>2x-10.$$



Na przedstawionym rysunku:

punkt A_1 ma rzędną $y_1=2x_0-10$;

punkt A_2 ma rzędną $y_2>2x_0-10$;

punkt A_3 ma rzędną $y_3<2x_0-10$.

Rozwiązaniami nierówności są pary liczb, które są współrzędnymi punktów leżących w zaznaczonym obszarze (nad prostą o równaniu $y = 2x - 10$). Przykładem takiej pary jest (x_0, y_2).

c) Rozwiążemy nierówność

$$|x-2| + |x+y| < 3.$$

Rozwiązanie. Proste o równaniach $x = 2$ i $y = -x$ dzielą płaszczyznę układu współrzędnych na cztery obszary, wewnątrz których wyrażenia występujące pod znakami modułów mają stałe znaki.

$$1^0 \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

Nierówność ma postać $x - 2 + y + x < 3$, czyli $y < -2x + 5$.

$$2^0 \begin{cases} x < 2 \\ y > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+y > 0 \end{cases}$$

Nierówność ma postać $-x + 2 + x + y < 3$, czyli $y < 1$.

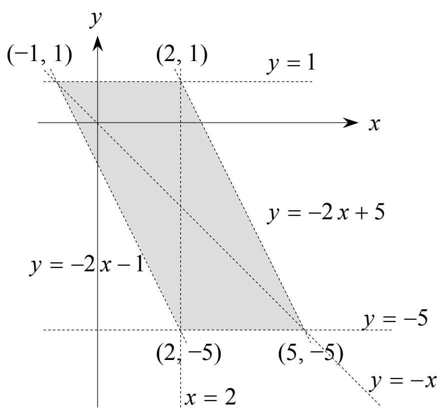
$$3^0 \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+y \leq 0 \end{cases}$$

Nierówność ma postać $-x + 2 - x - y < 3$, czyli $y > -2x - 1$.

$$4^0 \begin{cases} x > 2 \\ y < -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+y < 0 \end{cases}$$

Nierówność ma postać $x - 2 - x - y < 3$, czyli $y > -5$.

Poniższy rysunek przedstawia znaleziony zbiór rozwiązań (obszar zacieniowany):



5.3. Układy równań i nierówności liniowych

Układem dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań tego typu. Koniunkcję tę zapisujemy w postaci:

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest para liczb spełniających oba równania układu. Układ taki może posiadać jedno rozwiązanie (*układ oznaczony*), nieskończenie wiele rozwiązań (*układ nieoznaczony*) lub nie posiadać rozwiązań (*układ sprzeczny*).

Z definicji równania liniowego z dwoma niewiadomymi wynika, że $|a_1| + |b_1| \neq 0$ i $|a_2| + |b_2| \neq 0$. Jeżeli jedno z równań nie spełnia tego warunku, to staje się ono równaniem sprzecznym lub tożsamościowym i wówczas taki układ jest układem sprzecznym lub równoważnym jednemu z równań z dwiema niewiadomymi; oczywiście, jeżeli oba równania są równaniami tożsamościowymi, to rozwiązaniem układu jest dowolna para liczb rzeczywistych.

Przypomnijmy znane metody rozwiązywania układów równań liniowych.

Przykład. Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

czterema metodami.

Rozwiązania.

Metoda przez podstawienie. Polega ona na wyznaczeniu jednej niewiadomej z jednego z równań i podstawieniu jej do drugiego równania. W ten sposób drugie równanie staje się równaniem z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} 2\,x - y = 7 \\ x - 2\,y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\,x - 7 \\ x - 2\,(2\,x - 7) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\,x - 7 \\ x - 4\,x + 14 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2\,x - 7 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Metoda przeciwnych współczynników. Nazwa tej metody bierze się stąd, że na wstępie mnożymy jedno lub oba równania układu przez odpowiednio dobrane liczby po to, aby otrzymać układ równoważny, w którym współczynniki poprzedzające jedną z niewiadomych mają przeciwne znaki. Dodając następnie stronami oba równania tego układu, otrzymujemy równanie, które wraz z jednym z poprzednich równań tworzy kolejny układ, w którym jedno z równań zawiera tylko jedną niewiadomą i który jest równoważny układowi wyjściowemu.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \ \ (1) \\ x - 2y = 2 \ \ (2). \end{cases}$$

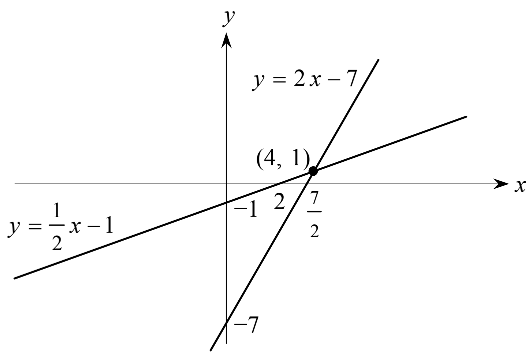
W rozważanym przypadku równanie (1) mnożymy stronami przez (-2) i dodajemy stronami do równania (2) eliminując w ten sposób niewiadomą y. Te dwa kroki możemy zrobić jednocześnie.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 7 \\ (-4x + 2y) + (x - 2y) = -14 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -3x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Metoda graficzna. Polega ona na narysowaniu linii prostych opisanych równaniami układu. Współrzędne punktu przecięcia się tych prostych są rozwiązaniami układu równań.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = \frac{1}{2}x - 1. \end{cases}$$



Z rysunku widać, że istnieje jedno rozwiązanie układu. Możemy odczytać, że jest nim para liczb (4, 1). Ponieważ jednak rysunek jest niedoskonałym odbiciem „rzeczywistości matematycznej", należy dokonać sprawdzenia, czy para liczb $(4, 1)$ rzeczywiście spełnia rozważany układ.

Metoda wyznacznikowa. Opiera się ona na następującym twierdzeniu:

Niech będzie dany układ dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi x, y postaci

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 , \end{cases}$$

którego współczynniki spełniają warunki: $|a_1| + |b_1| \neq 0$ i $|a_2| + |b_2| \neq 0$.
Oznaczmy:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 ,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2 , \; W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2 .$$

(i) Jeżeli $W \neq 0$, to układ jest oznaczony i posiada jedno rozwiązanie określone wzorami

$$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}.$$

(ii) Jeżeli $W = W_x = W_y = 0$, to układ jest nieoznaczony, tzn. posiada on nieskończenie wiele rozwiązań. Jest on równoważny każdemu ze swoich równań.
(iii) Jeżeli $W = 0$ oraz $W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$, to układ jest sprzeczny.

W rozważanym przykładzie $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -2$ i dlatego mamy:

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -3 ,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 = -12 , \; W_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = -3 ,$$

skąd

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-12}{-3} = 4 , \; y = \frac{W_y}{W} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Przykład. Spróbujemy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x + 0{,}75\, y = 1{,}5 \end{cases}$$

metodą wyznacznikową.
Rozwiązanie. Mamy

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0{,}75 - 3 = 0,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1{,}5 & 0{,}75 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0{,}75 - 1{,}5 = 0, \quad W_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Układ jest nieoznaczony, ponieważ wszystkie wyznaczniki jednocześnie znikają. W takim przypadku zacytowane poprzednio twierdzenie nie podaje wzoru na rozwiązanie ogólne układu. Mnożąc stronami drugie równanie przez $\frac{4}{3}$, zauważamy, że badany układ jest równoważny równaniu

$$4x + y = 2 \Leftrightarrow y = -4x + 2.$$

Dlatego dowolne jego rozwiązanie jest parą postaci $(x, y) = (x, -4x + 2)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Przykład. Rozwiążemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} u + v + 2w = -1 \\ 2u - v + 2w = -4 \\ 4u + v + 4w = -2. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Analiza współczynników poprzedzających zmienną v w poszczególnych równań rekomenduje metodę przeciwnych współczynników. Mamy

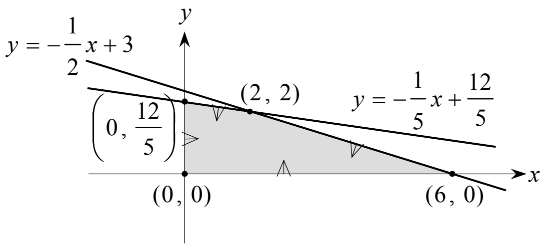
$$\begin{cases} u + v + 2w = -1 & (1) \\ 2u - v + 2w = -4 & (2) \\ 4u + v + 4w = -2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + 2w = -1 & (1) \\ 3u + 4w = -5 & (1) + (2) \\ 3u + 2w = -1 & (3) - (1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + v + 2w = -1 & (1) \\ 3u + 4w = -5 & (2) \\ 2w = -4 & (2) - (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = -2 \\ 3u - 8 = -5 \\ u + v - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \\ w = -2. \end{cases}$$

Przykład. Rozwiążemy graficznie układ nierówności:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 6 \\ x + 5y \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 3 \\ y \leq -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie tworzą te pary (x, y), które są współrzędnymi punktów należących do części wspólnej czterech półpłaszczyzn, co ilustruje rysunek:



Widać, że wspomnianym wyżej zbiorem jest czworokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(2, 2)$ oraz $\left(0, \dfrac{12}{5}\right)$.

Analogicznie do równań można rozpatrywać układy równań z parametrami. Najwygodniejszą metodą analizowania takich układów równań jest metoda wyznacznikowa.

Przykłady. a) Przedyskutujmy ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 3x + a\,y = 1 \\ 3x + 2\,y = b \end{cases}$$

z niewiadomymi *x*, *y* ze względu na parametry *a* i *b*.
<u>Rozwiązanie</u>. Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-a),\ W_x = \begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2 - ab,\ W_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & b \end{vmatrix} = 3\,(b-1).$$

Dalej rozpatrzymy przypadki.
1^0 $W \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2 \wedge b \in \mathbf{R}$.
Układ jest wtedy oznaczony i posiada jedno rozwiązanie wyznaczone przez parę liczb (x, y), gdzie

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{2-ab}{3(2-a)},\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{b-1}{2-a}.$$

2^0 Jeżeli $a = 2$ i $b \in \mathbf{R}$, to $W = 0$.
Mamy wówczas

$$W_x = 2(1-b),\ W_y = 3(b-1).$$

Stąd wynika, że dla $b \neq 1$ układ jest sprzeczny, a dla $b = 1$ − nieoznaczony. Aby w tym drugim przypadku znaleźć ogólną postać jego rozwiązania, podstawiamy podane wartości do układu. Otrzymany układ ma postać:

$$\begin{cases} 3x + 2\,y = 1 \\ 3x + 2\,y = 1. \end{cases}$$

Jest on równoważny równaniu

$$3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Dlatego dowolne jego rozwiązanie ma postać $(x,\, y) = \left(x,\, -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right);\ x \in \mathbf{R}$.

b) Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} 2mx + 3m^2 y = 5 \\ 4m^4 x + 6m^5 y = 10m^3. \end{cases}$$

Dla $m = 0$ nie możemy stosować metody wyznacznikowej, ponieważ oba równania nie spełniają założeń twierdzenia. Przedyskutujmy najpierw ten przypadek.

Jeżeli $m = 0$, to układ jest sprzeczny, gdyż przyjmuje on postać

$$\begin{cases} 0 = 5 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Jeżeli $m \neq 0$, to możemy stosować metodę wyznacznikową. Mamy

$$W = \begin{vmatrix} 2m & 3m^2 \\ 4m^4 & 6m^5 \end{vmatrix} = 12m^6 - 12m^6 = 0;$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & 3m^2 \\ 10m^3 & 6m^5 \end{vmatrix} = 30m^5 - 30m^5 = 0;$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2m & 5 \\ 4m^4 & 10m^3 \end{vmatrix} = 20m^4 - 20m^4 = 0.$$

Ponieważ $W = W_x = W_y = 0$, to układ jest nieoznaczony. Zauważmy, że jeżeli nie rozważylibyśmy osobno przypadku $m = 0$, to otrzymana odpowiedź byłaby fałszywa! Dla $m \neq 0$ rozważany układ jest równoważny równaniu

$$2mx + 3m^2 y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5 - 2mx}{3m^2}$$

i dlatego posiada on nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\left(x,\, \frac{5 - 2mx}{3m^2}\right),\ x \in \mathbf{R}$.

c) Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} (m+1)^2 x + \left(m^2 - 1\right) y = m + 1 \\ (m-1)^2 x + \left(m^2 - 1\right) y = (m-1)^2. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Dla $m = 1$ oraz $m = -1$ skorzystanie z metody wyznacznikowej jest wykluczone, gdyż drugie równanie dla $m = 1$ oraz pierwsze równanie dla

$m = -1$ nie spełniają założeń twierdzenia. Rozpatrzmy te przypadki w pierwszej kolejności.

Jeżeli $m = 1$, to układ ma postać

$$\begin{cases} 4x = 2 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Jest to układ nieoznaczony spełniony przez wszystkie pary liczb postaci $\left(\frac{1}{2}, y\right)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$.

Jeżeli $m = -1$, to układ ma postać

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 4x = 4. \end{cases}$$

Jest to układ nieoznaczony spełniony przez wszystkie pary liczb postaci $(1, y)$, gdzie $y \in \mathbf{R}$.

Jeżeli $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, to możemy stosować metodę wyznacznikową. Wtedy

$$W = \begin{vmatrix} (m+1)^2 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix} = \left(m^2-1\right)\left[(m+1)^2-(m-1)^2\right] = 4m\left(m^2-1\right);$$

$$W_x = \begin{vmatrix} m+1 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix} = \left(m^2-1\right)\left((m+1)-(m-1)^2\right) =$$

$$\left(m^2-1\right)\left(-m^2+3m\right) = m(3-m)\left(m^2-1\right);$$

$$W_y = \begin{vmatrix} (m+1)^2 & m+1 \\ (m-1)^2 & (m-1)^2 \end{vmatrix} = (m-1)^2 (m+1) \left[(m+1)-1\right] = m(m+1)(m-1)^2.$$

Jeżeli $m = 0$, to $W = W_x = W_y = 0$. Układ jest nieoznaczony i ma postać

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Posiada on nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x, x-1)$; $x \in \mathbf{R}$.

Jeżeli $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, to $W \neq 0$. Układ jest oznaczony i ma jedno rozwiązanie postaci

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{3-m}{4}, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{m-1}{4}.$$

6. Funkcja kwadratowa

6.1. Własności podstawowe

<u>*Funkcją kwadratową*</u> lub <u>*trójmianem kwadratowym*</u> nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c;\ x \in \mathbf{R},$$

gdzie a, b, c są współczynnikami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$. Powyższy wzór definiujący f nazywa się <u>*postacią ogólną funkcji kwadratowej*</u>.

Wykonajmy następujące przekształcenie:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4a\,c}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4a\,c$. Liczba Δ nazywa się <u>*wyróżnikiem trójmianu kwadratowego*</u>, a wzór

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

<u>*postacią kanoniczną*</u> tego trójmianu.

Powyższa postać kanoniczna funkcji kwadratowej pozwala na otrzymanie w prosty sposób jej wykresu poprzez przesunięcie równoległe wykresu jednomianu kwadratowego postaci $g(x) = a\,x^2$, $a \neq 0$ o wektor $\left[-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right]$. Ponieważ wykresem jednomianu kwadratowego jest krzywa zwana <u>*parabolą*</u> o wierzchołku w początku układu współrzędnych, to wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $(x_w, y_w) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ramiona tej paraboli są skierowane do góry, jeśli $a > 0$, i skierowane ku dołowi, gdy $a < 0$. Rozchylenie gałęzi paraboli zależy od wartości $|a|$. Im wartość bezwzględna a jest mniejsza, tym bardziej gałęzie paraboli są odchylone od osi *OY*.

Z powyższych faktów wynika, że:

Jeżeli $a > 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ przyjmuje dowolnie duże wartości, a w punkcie $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ osiąga wartość najmniejszą (minimum) równą $\dfrac{-\Delta}{4\,a}$.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ przyjmuje dowolnie małe wartości, a w punkcie $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ osiąga wartość największą (maksimum) równą $\dfrac{-\Delta}{4\,a}$.

Przykład. Rozwiążemy równanie

$$x^2 - x - \sin(\pi\,x) + \frac{5}{4} = 0\,.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Aby skorzystać z posiadanych wiadomości o funkcji kwadratowej, przekształćmy dyskutowane równanie do postaci

$$x^2 - x + \frac{5}{4} = \sin(\pi\,x).$$

Funkcja $f(x) = x^2 - x + \dfrac{5}{4}$ posiada minimum $y = 1$ w punkcie $x = \dfrac{1}{2}$, gdyż

$$\Delta = -4 < 0,\ \ x_w = \frac{-b}{2\,a} = \frac{1}{2},\ \ y_w = \frac{-\Delta}{4\,a} = 1;$$

w pozostałych punktach jej wartości są większe od 1. Natomiast wartości funkcji $g(x) = \sin(\pi\,x)$ są zawsze niewiększe niż 1, przy czym $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. W konsekwencji jedynym rozwiązaniem naszego równania jest liczba $x = \dfrac{1}{2}$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to postać kanoniczną funkcji kwadratowej można przekształcić do <u>*postaci iloczynowej*</u>:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\,a}\right)^2\right] =$$

$$a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}\right) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,,$$

gdzie $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

W przypadku, gdy $\Delta = 0$, postać iloczynowa ma kształt:

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = a\,(x - x_w)^2,$$

a gdy $\Delta < 0$ rozkład funkcji kwadratowej na iloczyn czynników liniowych nie jest możliwy.

Przykład. Doprowadzimy ułamek

$$w = \frac{2x(x+2) + 2(x-10)}{\dfrac{x(x+3)+3x+5}{2}}$$

do najprostszej postaci.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$w = \frac{2x^2 + 4x + 2x - 20}{\dfrac{x^2+3x+3x+5}{2}} = \frac{4x^2 + 12x - 40}{x^2 + 6x + 5} = \frac{4\left(x^2 + 3x - 10\right)}{x^2 + 6x + 5}.$$

Aby skorzystać z podanych wyżej wzorów na rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki, obliczmy wyróżniki trójmianów: licznika Δ_l i mianownika Δ_m oraz wykonajmy stosowne obliczenia:

$$\Delta_l = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 9 + 40 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta_l} = 7 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \wedge x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2);$$

$$\Delta_m = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta_m} = 4 \Rightarrow$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{-6-4}{2} = -5 \wedge \tilde{x}_2 = \frac{-6+4}{2} = -1 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x+1).$$

Stąd:

$$w = \frac{4(x+5)(x-2)}{(x+5)(x+1)} = \frac{4(x-2)}{x+1};\quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-5, -1\}.$$

Konsekwencją postaci iloczynowej trójmianu kwadratowego jest następujące twierdzenie:

Niech

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c;\ x \in \mathbf{R},$$

gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, będzie funkcją kwadratową. Wtedy

(i) jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych;

(ii) jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja f ma jedno miejsce zerowe równe $x_w = -\dfrac{b}{2a}$;

(iii) jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe wyrażone wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej nazywamy także <u>*pierwiastkami*</u> tej funkcji.

W uzupełnieniu poprzedniego twierdzenia, zanotujmy ważną własność:

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje:

(i) tylko wartości dodatnie, gdy $a > 0$;

(ii) tylko wartości ujemne, gdy $a < 0$.

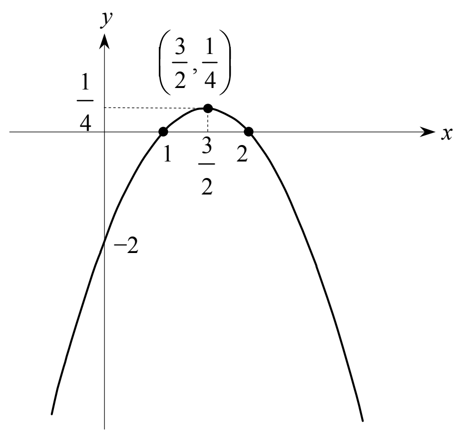
Przykłady. Naszkicujemy wykresy trzech funkcji kwadratowych.

a) $y = -x^2 + 3x - 2$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$\Delta = 3^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-2) = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1;$$

$$x_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2, \; x_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1; \; x_w = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \; y_w = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$



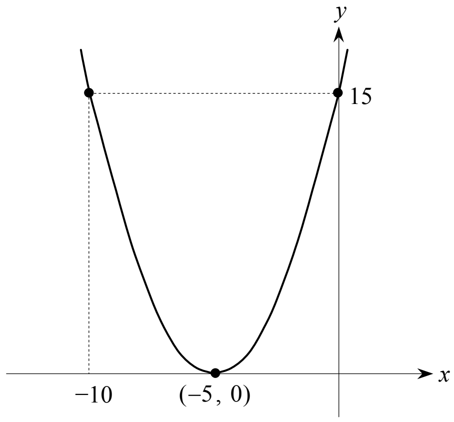
b) $y = \frac{3}{5}x^2 + 6x + 15$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot 15 = 36 - 36 = 0;\ x_w = \frac{-6}{\frac{6}{5}} = -5,\ y_w = 0;$$

$$f(0) = 15 = f(-10).$$

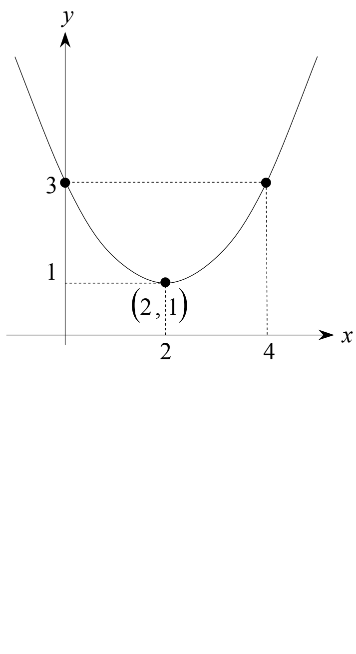
Ponieważ funkcja posiada tylko jedno miejsce zerowe, dla dokładniejszego naszkicowania jej wykresu obliczyliśmy wartości tej funkcji dla dwóch dodatkowych argumentów; wybraliśmy punkty symetryczne względem punktu $x_w = -5$. Stąd wykres rozważanego trójmianu wygląda następująco:



c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Postąpimy analogicznie, jak w poprzednim podpunkcie.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 4 - 6 = -2 < 0;\ x_w = \frac{2}{1} = 2,\ y_w = \frac{2}{2} = 1;\ f(0) = f(4) = 3.$$



Przykład. Przedyskutujemy ilość rozwiązań równania $|x|x = 2x + c$ w zależności od wartości parametru *c*.

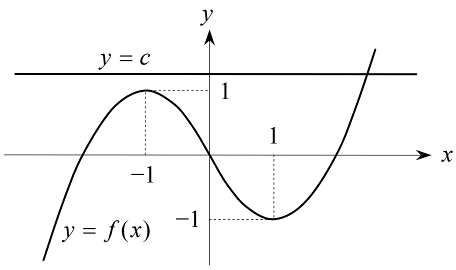
<u>Rozwiązanie</u>. Równanie można przekształcić do postaci

$$|x|x - 2x = c.$$

Ilość jego rozwiązań jest równa ilości punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x) = |x|x - 2x$ i funkcji stałej $g(x) = c$. Zauważamy, że

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & \text{dla } x \geq 0 \\ -x(x+2) & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Funkcja *f* obcięta do przedziału $[0; \infty)$ na dwa miejsca zerowe równe 0 i 2 oraz przyjmuje wartość najmniejszą równą -1 w punkcie $x = 1$. Funkcja *f* jest funkcją nieparzystą, więc jej wykres na przedziale $(-\infty; 0)$ jest obrazem symetrycznym wykresu funkcji $f\,|\,(0; \infty)$ w symetrii środkowej o środku $(0, 0)$. Kompletny rysunek wygląda więc następująco:



Stąd wynikają następujące wnioski:

dla $c \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ równanie posiada jedno rozwiązanie;

dla $c \in \{-1, 1\}$ równanie posiada 2 rozwiązania;

dla $c \in (-1; 1)$ równanie posiada 3 rozwiązania.

6.2. Wzory Viete'a i ich zastosowania

Wśród własności funkcji kwadratowej ważne miejsce zajmują tzw. <u>wzory Viete'a</u>. O najważniejszych z nich mówi poniższe twierdzenie:

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami funkcji kwadratowej

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c;\; x \in \mathbf{R},$$

gdzie a, b, $c \in \mathbf{R}$ oraz $a \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości:

(i) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

(ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Wzory Viete'a pozwalają na wyciąganie różnorodnych wniosków dotyczących trójmianu kwadratowego bez konieczności wyliczania jego pierwiastków, a nawet mogą być pomocne w szybkim odgadywaniu tychże pierwiastków. Ważnym zagadnieniem, w którym znajdują zastosowanie wzory Viete'a jest analiza znaków pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Aby funkcja kwadratowa $f(x) = a x^2 + b x + c$ posiadała dwa różne pierwiastki x_1, x_2

(i) dodatnie potrzeba i wystarcza, by

$$\Delta > 0 \wedge \frac{c}{a} > 0 \wedge \frac{b}{a} < 0;$$

(ii) ujemne potrzeba i wystarcza, by

$$\Delta > 0 \wedge \frac{c}{a} > 0 \wedge \frac{b}{a} > 0;$$

(iii) różnych znaków potrzeba i wystarcza, by

$$\Delta > 0 \wedge \frac{c}{a} < 0.$$

Przykład. Zbadamy, dla jakich wartości parametru k równanie

$$k x = (x+1)^2$$

posiada pierwiastek należący do przedziału $(-1;\, 0)$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$k x = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (2-k)^2 - 4 = k(k-4).$$

Zauważmy, że

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow k \in (-\infty;\, 0] \cup [4;\, \infty).$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy równanie $(x+1)^2 = 0$, którego jedynym pierwiastkiem jest liczba -1 nie należąca do przedziału $(-1;\, 0)$. Analogicznie dla $k = 4$ powstaje równanie $x^2 - 2x + 1 = 0$ o pierwiastku 1 spoza przedziału $(-1;\, 0)$. Zakładamy dalej, że $k \in (-\infty;\, 0) \cup (4;\, \infty)$. Zauważmy, że

$$x_1 x_2 = 1,$$

skąd $x_1, x_2 \neq 0$ oraz $x_1 = \frac{1}{x_2}$. Zatem, jeżeli $|x_1| < 1$, to $|x_2| > 1$ i odwrotnie. W konsekwencji rozważane równanie posiada pierwiastek w przedziale $(-1;\, 0)$ wtedy, gdy posiada ono dwa pierwiastki ujemne. Wówczas jeden z tych pierwiastków należy do przedziału $(-1;\, 0)$ a drugi do przedziału $(-\infty;\, -1)$ (pierwiastki są różne, bo $\Delta > 0$). Na mocy ostatniej własności równanie posiada dwa pierwiastki ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in (-\infty;\, 0) \cup (4;\, \infty) \\ k \in \mathbf{R} \\ k - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-\infty,\, 0).$$

A więc żądana własność spełniona jest przez wszystkie parametry k będące liczbami ujemnymi.

Rozwiązaniem równania kwadratowego $a x^2 + b x + c = 0$ jest każde miejsce zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = a x^2 + b x + c$. Wiele równań innych typów daje się doprowadzić do równania kwadratowego przy pomocy różnych podstawień. Do takich równań należą tzw. *równania dwukwadratowe*, tj. równania postaci

$$a x^4 + b x^2 + c = 0,$$

gdzie x jest niewiadomą oraz a, b, c współczynnikami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$.

Przykład. Rozwiążemy wybrane równania sprowadzając je poprzez stosowne podstawienia do równań kwadratowych.

a) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$.

Rozwiązanie. Podstawiając $x^2 = t$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$t^2 - 8t + 15 = 0.$$

Ze wzorów Viete'a wynika, że jego pierwiastki t_1, t_2 spełniają równości: $t_1 \cdot t_2 = 15$, $t_1 + t_2 = 8$, dzięki którym odgadujemy, że $t_1 = 3$, $t_2 = 5$. Wracając do podstawienia, stwierdzamy, że $x^2 = 3$ lub $x^2 = 5$. Stąd wnioskujemy, że równanie ma 4 rozwiązania: $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = \sqrt{5}$.

b) $\sqrt{x-2} + x = 4$.

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 2\}$. Postawiamy $\sqrt{x-2} = t$; wówczas $x - 2 = t^2$, czyli $x = t^2 + 2$. Rozwiązywane równanie przyjmuje postać

$$t + t^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 .$$

Stosując wzory Viete'a, odgadujemy pierwiastki: $t_1 = -2,\ t_2 = 1$. Stąd $\sqrt{x-2} = -2$ lub $\sqrt{x-2} = 1$. Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a drugie posiada rozwiązanie $x = 3$, które należy do dziedziny równania.

6.3. Nierówności kwadratowe

Nierównościami kwadratowymi nazywamy nierówności postaci:

$$a x^2 + b x + c < 0,\ a x^2 + b x + c > 0,\ a x^2 + b x + c \le 0,\ a x^2 + b x + c \ge 0,$$

gdzie x jest niewiadomą oraz a, b, c współczynnikami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$. Rozwiązujemy je najczęściej metodą graficzną szkicując schematycznie wykres odpowiedniej funkcji kwadratowej (przy pewnej wprawie wystarczy go sobie tylko wyobrazić).

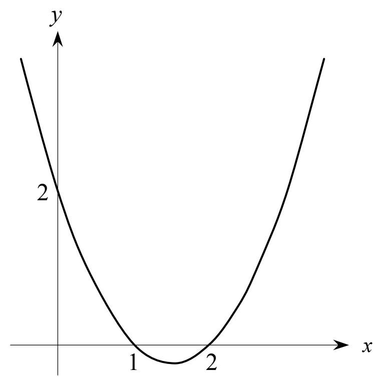
Przykład. Rozwiążemy trzy nierówności.

a) $-x^2 + 6x - 5 < 3x - 3$.

Rozwiązanie. Mamy

$$-x^2 + 6x - 5 < 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0.$$

Pierwiastkami ostatniego trójmianu kwadratowego $f(x) = x^2 - 3x + 2$ są liczby $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Szkicujemy wykres funkcji *f*:



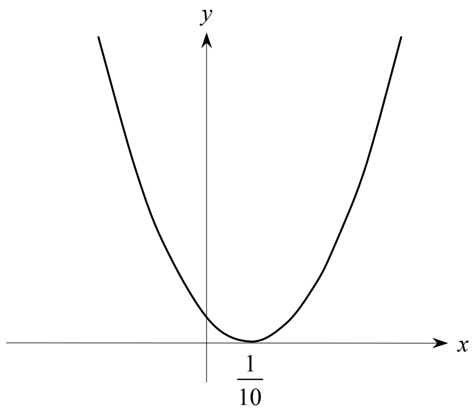
Widać, że zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$.

b) $x^2 - 0{,}2\,x + 0{,}01 > 0$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zauważamy, że

$$\Delta = 0{,}04 - 0{,}04 = 0 \Rightarrow x_w = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1.$$

Uproszczony wykres wygląda więc następująco:



Zatem rozwiązaniami nierówności są liczby należące do zbioru $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$.

c) $(2x-4)^2 \le -x^2 + 1$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Ponieważ

$$4x^2 - 16x + 16 \le -x^2 + 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 15 \le 0,$$

więc $\Delta = 256 - 300 = -44$. Stąd wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = 5x^2 - 16x + 15$$

jest parabola leżąca nad osią OX o ramionach skierowanych ku górze. W konsekwencji funkcja ta przyjmuje tylko wartości dodatnie i dlatego dyskutowana nierówność nie ma rozwiązań.

Często spotykanymi problemami dotyczącymi funkcji kwadratowej oraz równań kwadratowych są zagadnienia z jednym lub większą liczbą parametrów. Oto kilka przykładów takich zadań.

Przykład. a) Przedyskutujemy liczbę rozwiązań równania

$$(m+1)x^2 - 2\sqrt{2}\,mx + m^2 - m + 1 = 0$$

z niewiadomą x w zależności od wartości parametru m.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Dla $m = -1$ mamy do czynienia z równaniem liniowym $2\sqrt{2}\,x + 3 = 0$, które posiada jedno rozwiązanie.

Zakładamy więc dalej, że $m \ne -1$. Wówczas

$$\Delta = 8m^2 - 4(m+1)\left(m^2 - m + 1\right) = 4\left(2m^2 - m^3 - 1\right) = 4\left(-m^3 + 2m^2 - 1\right) =$$
$$4\left(-m^2(m-1) + (m-1)(m+1)\right) = 4(m-1)\left(-m^2 + m + 1\right) =$$
$$-4(m-1)(m-m_1)(m-m_2),$$

gdzie $m_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $m_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ są pierwiastkami równania $-m^2 + m + 1 = 0$.

Wiemy, że równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$. Mamy

$$\Delta > 0 \wedge m < 1 \wedge m \neq -1 \Leftrightarrow (m-m_1)(m-m_2) > 0 \wedge m < 1 \wedge m \neq -1 \Leftrightarrow$$
$$m < -1 \vee -1 < m < m_1;$$

$$\Delta > 0 \wedge m > 1 \Leftrightarrow (m-m_1)(m-m_2) < 0 \wedge m > 1 \Leftrightarrow 1 < m < m_2.$$

Zatem

$$\Delta > 0 \wedge m \neq -1 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (-1; m_1) \cup (1; m_2)$$

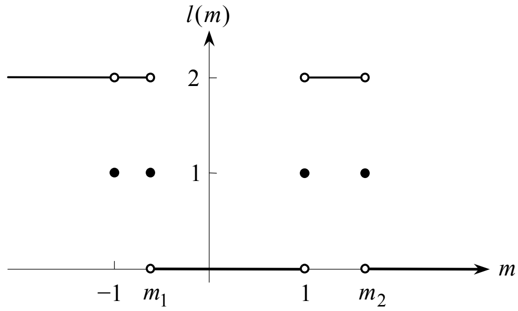
i dla takich m badane równanie posiada dwa pierwiastki.

Z poprzedniego rozumowania wynika, że

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = m_1 \vee m = 1 \vee m = m_2$$

i wtedy rozpatrywane równie ma jeden pierwiastek (oraz dla $m = -1$). W pozostałych przypadkach, tj. dla $m \in (m_1; 1) \cup (m_2; \infty)$, rozwiązań brak.

Uzyskane wyniki możemy przedstawić w czytelny sposób rysując wykres funkcji $l(m)$, która parametrowi m przyporządkowuje liczbę rozwiązań badanego równania.



b) Zbadamy, czy równanie

$$(m-2)x^4 + 2(-1)^n (m+3)x^2 + (m+1) = 0$$

z niewiadomą x oraz parametrami $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$ może posiadać 3 rozwiązania.

<u>Rozwiązanie</u>. Jeżeli $m = 2$, to równanie staje się równaniem kwadratowym

$$10(-1)^n x^2 + 3 = 0,$$

które ma 0 lub 2 rozwiązania w zależności od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy nieparzystą. Załóżmy więc, że $m \neq 2$. Mamy wtedy do czynienia z równaniem dwukwadratowym, które rozwiązujemy przez podstawienie $x^2 = t$. Daje to równanie kwadratowe

$$(m-2)\,t^2 + 2(-1)^n (m+3)\,t + (m+1) = 0.$$

Aby równanie dwukwadratowe posiadało trzy rozwiązania, odpowiednie równanie kwadratowe musi posiadać jedno rozwiązanie dodatnie i jedno równe 0. Czyli musi być spełniony układ warunków:

$$\Delta > 0 \wedge t_1 \cdot t_2 = 0 \wedge t_1 + t_2 > 0 \wedge m \neq 2.$$

Mamy

$$\Delta = 4(m+3)^2 - 4(m-2)(m+1) = 4(7m+11) \Rightarrow \left(\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{7}\right);$$

$$t_1 \cdot t_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} = 0 \Leftrightarrow m = -1;$$

$$t_1 + t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(-1)^{n+1}(m+3)}{m-2} > 0.$$

Podstawiając $m = -1$ do ostatniej nierówności, otrzymujemy

$$\frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{-3} > 0 \Leftrightarrow (-1)^n > 0,$$

tzn. n musi być dowolną liczbą parzystą.

Reasumując, dane równanie dwukwadratowe ma 3 rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m = -1$ oraz n jest jakąkolwiek liczbą parzystą.

c) Rozstrzygniemy, dla jakich wartości parametru a nierówność

$$(a^2-1)\,x^2 + 2(a-1)\,x + 2 > 0$$

jest spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $a = 1$ otrzymujemy nierówność spełnioną dla wszystkich liczb rzeczywistych, a dla $a = -1$ nierówność, którego zbiorem rozwiązań jest przedział $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ Zatem $a = 1$ spełnia warunki zadania. Jeżeli $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, to mamy do czynienia z nierównością kwadratową, przy czym

$$\Delta = 4(a-1)^2 - 8\left(a^2-1\right) = 4(a-1)\left(-a-3\right).$$

Aby funkcja kwadratowa stojąca po lewej stronie nierówności była stale dodatnia wystarcza, aby

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a+3) > 0 \\ (a-1)(a+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > 1 \\ a < -1 \vee a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3 \vee a > 1.$$

W konsekwencji, jeżeli $a \in (-\infty; -3) \cup [1; \infty)$, to wyjściowa nierówność jest spełniona dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$.

d) Znajdziemy te wartości parametru a, dla których zbiór rozwiązań nierówności

$$x^2 - a\left(1 + a^2\right)x + a^4 < 0$$

zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności

$$x^2 + 4x + 3 < 0.$$

Rozwiązanie. Nierówność $x^2 + 4x + 3 < 0$ jest prawdziwa dla $x \in (-3; -1)$. Pierwiastkami funkcji kwadratowej

$$f(x) = x^2 - a\left(1 + a^2\right)x + a^4$$

są liczby $x_1 = a$, $x_2 = a^3$, co łatwo wynika ze wzorów Viete'a lub wzorów na x_1 i x_2. Dla $a \in \{-1, 0, 1\}$ zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ jest pusty, więc jest podzbiorem przedziału $(-3; -1)$. Gdy natomiast $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, to ten zbiór rozwiązań jest przedziałem otwartym o końcach a oraz a^3. Aby taki przedział zawierał się w przedziale $(-3; -1)$, musi być

$$\begin{cases} -3 < a < -1 \\ -3 < a^3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\sqrt[3]{3}; -1\right).$$

Reasumując, warunki zadania są spełnione, gdy $a \in \left(-\sqrt[3]{3}\,;\, -1\right] \cup \{0, 1\}$.

Zauważmy, że rozwiązując ostatnie zadanie, można skorzystać z twierdzenia:

Niech $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ będzie funkcją kwadratową posiadającą dwa różne pierwiastki x_1, x_2 oraz $(\gamma\,;\,\delta)$ będzie przedziałem skończonym w $\mathbf{R}$. Wówczas

$$x_1,\, x_2 \in (\gamma\,;\,\delta) \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(\gamma) > 0 \\ a \cdot f(\delta) > 0 \\ x_w \in (\gamma\,;\,\delta). \end{cases}$$

6.4. Funkcja kwadratowa w układach równań

Ostatnim zagadnieniem, które poruszymy, jest kwestia rozwiązywania układów równań, w których niewiadome występują w potędze nie wyższej niż 2 bądź w postaci iloczynów. Stosujemy tu podobne metody, jak w przypadku układów równań liniowych, choć niekiedy jest to trudniejsze i wymaga pewnej pomysłowości. Dla takich układów nie możemy stosować bezpośrednio metody wyznacznikowej.

Przykłady. Rozwiążemy trzy układy równań.

a) $\begin{cases} x+xy+y=13 \\ 2(x+y)^2+x^2y+xy^2+30=0. \end{cases}$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zauważamy, że

$$\begin{cases} x+xy+y=13 \\ 2(x+y)^2+x^2y+xy^2+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=13 \\ 2(x+y)^2+xy(x+y)+30=0, \end{cases}.$$

co sugeruje podstawienie: $x+y=t,\ xy=u$. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} t+u=13 \\ 2t^2+tu+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=13-t \\ 2t^2+t(13-t)+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=13-t \\ t^2+13t+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u=13-t \\ t=-10 \vee t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-10 \\ u=23 \end{cases} \vee \begin{cases} t=-3 \\ u=16 \end{cases}.$$

Wracając do niewiadomych *x* i *y*, otrzymujemy:

$$\begin{cases} t=-10 \\ u=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-10-x \\ x(-10-x)=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-10-x \\ x^2+10x+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-5-\sqrt{2} \\ y=-5+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5+\sqrt{2} \\ y=-5-\sqrt{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} t=-3 \\ u=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-x \\ x(-3-x)=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-x \\ x^2+3x+16=0 \end{cases}.$$

Ostatni układ nie ma rozwiązań, bo wyróżnik równania kwadratowego wchodzącego w jego skład jest ujemny. Dlatego rozwiązaniami wyjściowego układu są dwie wcześniej znalezione pary.

b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ 2x^2-xy-y^2=5. \end{cases}$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Oznaczmy wyjściowy układ symbolem $(*)$ i zastosujmy metodę przeciwnych współczynników:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ 3x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x=-2. \end{cases}$$

Dalej rozpatrzymy dwa przypadki.

$$1^0 \begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+2y+y^2=7 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2y-3=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$$

$$2^0 \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2y + y^2 = 7 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Stąd

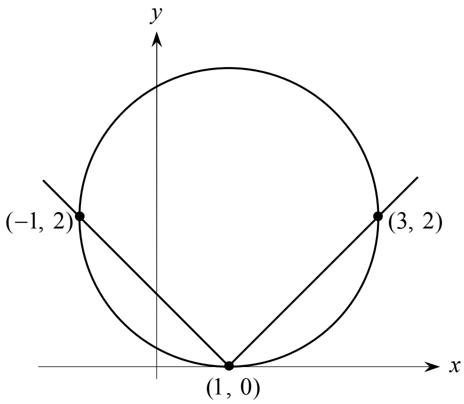
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

c) $\begin{cases} y = |x-1| \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie. Analogicznie, jak poprzednio, oznaczmy symbolem $(*)$ układ wyjściowy i rozwiążmy go metodą graficzną. Zauważamy, że

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x-1| \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4, \end{cases}$$

wobec czego należy naszkicować wykres funkcji $f(x) = |x-1|$ oraz okrąg o środku $(1, 2)$ i promieniu 2:



Widzimy, że obie linie przecinają się w punktach o współrzędnych: $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(-1, 2)$. Stąd już dokonując sprawdzenia, stwierdzamy, że układ posiada trzy rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

7. Wielomiany

7.1. Własności podstawowe

Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną oraz a_n − liczbą rzeczywistą różną od zera. Jednomianem stopnia n zmiennej x nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a_n x^n \; ; \; x \in \mathbf{R}.$$

Przyjmujemy dodatkowo, że funkcja stała $f(x) = a$, gdzie $a \neq 0$, jest jednomianem zmiennej x stopnia 0, zaś funkcja tożsamościowo równą 0 − jednomianem zerowym. Jednomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Uwaga. Potrzeba osobnego definiowania jednomianu stopnia 0 wynika z faktu, że symbol 0^0 jest symbolem nieoznaczonym, w konsekwencji czego funkcja $f(x) = x^0$ nie jest określona w zerze.

Iloczynem dwóch niezerowych jednomianów $f(x) = a_n\, x^n$ stopnia n i $g(x) = b_m\, x^m$ stopnia m jest jednomian $(f \cdot g)(x) = a_n\, b_m\, x^{n+m}$ stopnia $n+m$. Iloczyn dowolnego jednomianu i jednomianu zerowego jest jednomianem zerowym. Suma dwóch jednomianów niezerowych na ogół nie jest jednomianem. W przypadku, gdy są to jednomiany podobne, tj. o tym samym stopniu, to suma $a\,x^n + b\,x^n = (a+b)\,x^n$ jest jednomianem. W ogólnym przypadku sumę jednomianów tej samej zmiennej nazywamy wielomianem tej zmiennej.

Wielomianem stopnia n, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję W określoną wzorem

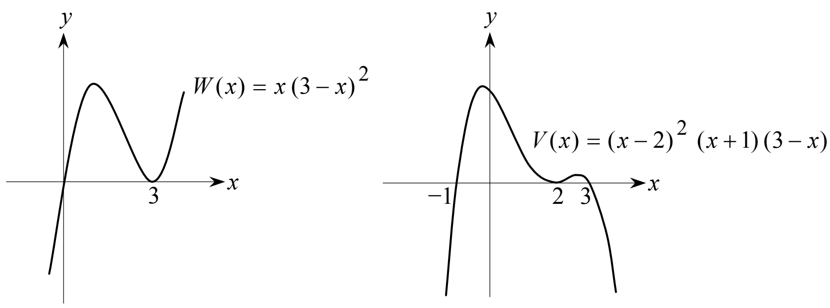
$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \; ; \; x \in \mathbf{R},$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby a_0, a_1, ... , a_n nazywamy współczynnikami definiowanego wielomianu W. Ponieważ każdy jednomian jest wielomianem, to jednomian stopnia 0 nazywa się także wielomianem stopnia 0, a jednomian zerowy – wielomianem zerowym. Stopień wielomianu W oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{st}(W)$.

Przykład. Funkcja $W(x) = x^5 + 2x^2 + 7$ jest wielomianem stopnia 5. Jest ona sumą trzech jednomianów: jednomianu piątego stopnia x^5, jednomianu drugiego stopnia $2\,x^2$ oraz jednomianu 7 stopnia 0.

Wykresami wielomianów są linie ciągłe, których otrzymanie wymaga pewnych wiadomości. W tym momencie ograniczymy się do podania dwóch przykładów bez wnikania, jak zaprezentowane wykresy powstały.

Przykład. Oto wykresy konkretnych wielomianów $W(x) = x(3-x)^2$ i $V(x) = (x-2)^2(x+1)(3-x)$:



Nasuwa się pytanie, czy współczynniki wielomianu wyznaczają ten wielomian jednoznacznie. Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie:

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

Można udowodnić mocniejszy fakt:

Dwa wielomiany stopnia n, które przyjmują te same wartości w $(n+1)$ różnych punktach, są równe.

W zbiorze wszystkich wielomianów możemy wykonywać działania dodawania, odejmowania i mnożenia wielomianów.

Aby dodać (odjąć) wielomiany P i Q należy dodać (odjąć) ich wyrazy podobne, a następnie uporządkować otrzymany wielomian.

Aby pomnożyć wielomian przez wielomian, należy pomnożyć każdy składnik jednego wielomianu przez każdy składnik drugiego wielomianu, a następnie wykonać redukcję wyrazów podobnych i uporządkować otrzymany wielomian.

Uwaga. Stopień sumy wielomianów nie przekracza stopni poszczególnych składników, natomiast stopień iloczynu wielomianów równa się sumie stopni jego czynników. Iloraz dwóch wielomianów na ogół nie jest wielomianem (jest to tzw. *funkcja wymierna*).

Mówimy, że *wielomian W jest podzielny przez wielomian P*, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian Q, że $W = P \cdot Q$. Wielomian P nazywamy *dzielnikiem* wielomianu W, a wielomian Q – *ilorazem wielomianów* W oraz P.

Dla dowolnych dwóch wielomianów W i P zdefiniowana powyżej podzielność na ogół nie zachodzi. Zagadnienie to jest analogiczne do kwestii podzielności liczb całkowitych, o czym świadczy następujące *twierdzenie o rozkładzie wielomianów*:

Dla każdej pary wielomianów W i P, gdzie P jest wielomianem niezerowym, istnieje dokładnie jedna para wielomianów Q i R taka, że $W = Q \cdot P + R$, przy czym $\mathrm{st}(R) < \mathrm{st}(P)$ lub $R \equiv 0$.

W tym twierdzeniu wielomian W jest analogonem dzielnej, P – dzielnika, Q – ilorazu, R – reszty z dzielenia całkowitego liczb.

Uwaga. Dla liczb całkowitych mamy: $13 : 4 = 3 + \frac{1}{4}$, co zapisujemy $13 : 4 = 3 \ r1$. Zatem

$$\underbrace{13}_{\text{dzielna}} = \underbrace{3}_{\text{iloraz}} \cdot \underbrace{4}_{\text{dzielnik}} + \underbrace{1}_{\text{reszta}} .$$

Przez analogię, jeżeli $\frac{W}{P} = Q + \frac{R}{P}$, gdzie W, P, Q, R są wielomianami i $P \not\equiv 0$, to

$$\underbrace{W}_{\text{dzielna}} = \underbrace{Q}_{\text{iloraz}} \cdot \underbrace{P}_{\text{dzielnik}} + \underbrace{R}_{\text{reszta}} .$$

Istnieje algorytm pozwalający na efektywne dzielenie wielomianów przez siebie. Zgodnie z nim należy wykonać następujące czynności:

1. Porządkujemy dzielną i dzielnik malejąco.
2. Pierwszy wyraz dzielnej W dzielimy przez pierwszy wyraz dzielnika P. Otrzymany jednomian Q_1 jest pierwszym składnikiem ilorazu Q.
3. Jednomian Q_1 mnożymy przez każdy wyraz dzielnika.
4. Otrzymany iloczyn ze zmienionymi współczynnikami na przeciwne zapisujemy pod dzielną i dodajemy go do niej. Otrzymany wielomian R_1 nazywamy pierwszą resztą z dzielenia.
5. Wielomian R_1 przejmuje rolę dzielnej i dalej postępujemy zgodnie z opisanym schematem w punktach 2 − 4. Otrzymany jednomian Q_2 jest drugim składnikiem wielomianu Q.

6. Kończymy dzielenie, gdy otrzymana reszta ma stopień niższy od stopnia dzielnika P lub jest wielomianem zerowym.

Przykład. Wykonamy dzielenie wielomianu W przez wielomian P dla przykładowych W i P.

a) $W(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1,\ P(x) = x^2 + 3$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Budujemy jednomian $Q_1(x) = \dfrac{3x^4}{x^2} = 3x^2$. Powstaje on z podzielenia pierwszego składnika dzielnej przez pierwszy składnik dzielnika. Następnie mnożymy otrzymany wynik Q_1 przez dzielnik P i otrzymany iloczyn odejmujemy od wielomianu W; otrzymujemy pierwszą resztę R_1:

$$R_1(x) = W(x) - Q_1(x) \cdot P(x) = \left(3x^4 + 2x^2 + 1\right) - 3x^2(x^2 + 3) = -7x^2 + 1.$$

Rozumowanie to powtarzamy dla wielomianu R_1. Dzieląc pierwszy składnik wielomianu R_1 przez pierwszy składnik P otrzymujemy jednomian $Q_2(x) = \dfrac{-7x^2}{x^2} = -7$. Od wielomianu R_1 odejmujemy iloczyn $Q_2 \cdot P$ i otrzymujemy drugą resztę R_2:

$$R_2(x) = R_1(x) - Q_2(x) \cdot P(x) = \left(-7x^2 + 1\right) - (-7)\left(x^2 + 3\right) = 22.$$

Ponieważ stopień otrzymanego wielomianu jest niższy niż stopień wielomianu P, więc ten pierwszy wielomian jest resztą z wykonywanego dzielenia. Mamy więc

$$W = R_1 + Q_1 P = R_2 + Q_2 P + Q_1 P = \left(\underbrace{Q_1 + Q_2}_{Q}\right) \cdot P + \underbrace{R_2}_{R} = Q \cdot P + R.$$

W praktyce powyższe operacje wykonujemy stosując skrócony umowny zapis podobny do analogicznego zapisu dzielenia pisemnego:

$$\begin{array}{l}
\underline{\quad Q_1(x) + Q_2(x)\quad} \\
\quad W(x) \qquad\qquad : P(x) \\
\underline{-\left(Q_1(x) \cdot P(x)\right)} \\
\qquad\qquad R_1(x) \\
\qquad\qquad \underline{-\left(Q_2(x) \cdot P(x)\right)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad R(x)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\qquad \underline{3x^2 + (-7)} \\
\qquad \left(3x^4 + 2x^2 + 1\right) : \left(x^2 + 3\right) \\
\quad \underline{-\left(3x^4 + 9x^2\right)} \\
\qquad\qquad\qquad -7x^2 + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\left(-7x^2 - 21\right)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 22
\end{array}$$

b) $W(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1,\ \ P(x) = x - 2.$

Rozwiązanie. Mamy

$$
\begin{array}{l}
\underline{x^2 + x - 3} \\
\left(x^3 - x^2 - 5x + 1\right) : (x - 2) \\
\underline{-x^3 + 2x^2} \\
\qquad x^2 - 5x \\
\qquad \underline{-x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad -3x + 1 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad -5
\end{array}
$$

A więc

$$\frac{x^3 - x^2 - 5x + 1}{x - 2} = x^2 + x - 3 + \frac{-5}{x - 2}; \quad x \neq 2.$$

c) $W(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15,\ \ P(x) = x^2 + x + 1.$

Rozwiązanie. Mamy

$$
\begin{array}{l}
\underline{x^2 + 2x - 15} \\
\left(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15\right) : \left(x^2 + x + 1\right) \\
\underline{-x^4 - x^3 - x^2} \\
\qquad 2x^3 - 13x^2 - 13x \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad -15x^2 - 15x - 15 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{15x^2 + 15x + 15} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Tym razem wielomian *W* dzieli się bez reszty przez wielomian *P*:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15}{x^2 + x + 1} = x^2 + 2x - 15,$$

skąd

$$x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 2x - 15\right).$$

Dla ułatwienia dzielenia wielomianu przez dwumian $x - x_0$ stosuje się czasami tzw. <u>schemat Hornera</u>. Jego poprawność opiera się na następującym rozumowaniu. Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Wówczas

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)\left(b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) + R .$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach x, otrzymujemy:

$$\begin{array}{lcl} a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\ a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2} & \Rightarrow & b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 = R - x_0 b_0 & \Rightarrow & R = a_0 + x_0 b_0 \end{array}$$

Ciąg (b_n) jest więc zdefiniowany w sposób rekurencyjny w sposób opisany tabelą:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
	0	$x_0 b_{n-1}$	$x_0 b_{n-2}$	...	$x_0 b_1$	$x_0 b_0$
+	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	R

Przykład. Zademonstrujemy schemat Hornera na dwóch przykładach.

a) $(3x^4 + 2x^2 + 1) : (x - 2)$.

<u>Rozwiązanie.</u> Zauważamy, że

$$a_4 = 3,\ a_3 = 0,\ a_2 = 2,\ a_1 = 0,\ a_0 = 1,\ x_0 = 2.$$

Stąd

	3	0	2	0	1
	0	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 14$	$2 \cdot 28$
+	3	6	14	28	57

i w konsekwencji

$$Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 14x + 28;\ \ R = 57 .$$

b) $\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 8\right) : (x - 2)$

<u>Rozwiązanie</u>. Mamy

$$a_3 = 1,\ a_2 = -2,\ a_1 = 4,\ a_0 = -8,\ a = 2,$$

skąd

	1	-2	4	-8
	0	$2\cdot 1$	$2\cdot 0$	$2\cdot 4$
+	1	0	4	0

A więc

$$Q(x) = x^2 + 4;\ \ R = 0.$$

Szczególnie ważnym jest przypadek dzielenia dowolnego wielomianu W zmiennej x przez dwumian postaci $x - x_0$, gdzie x_0 jest daną liczbą. Z twierdzenie o rozkładzie wynika, że zachodzi wtedy równość

$$W(x) = Q(x)(x - x_0) + R;\ \ x \in \mathbf{R}.$$

Podstawiając w szczególności $x = x_0$, stwierdzamy, że

$$W(x_0) = R.$$

Zachodzi więc twierdzenie:

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - x_0$ jest równa $W(x_0)$.

Jeżeli w szczególności x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W, to

$$W(x_0) = 0 \Leftrightarrow Q(x_0)(x_0 - x_0) + R = 0 \Leftrightarrow R = 0.$$

Powyższa równoważność jest treścią *twierdzenia Bezout*:

Wielomian $W(x)$ jest podzielny bez reszty przez dwumian $x - x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x_0) = 0$.

7.2. Pierwiastki wielomianu

Znajdowanie miejsc zerowych (tzw. *pierwiastków*) wielomianu stopnia wyższego niż drugi na ogół nie jest sprawą łatwą i wykracza poza ramy tego opracowania. Znane są schematy rozwiązywania równań stopnia trzeciego i czwartego za pomocą wyrażeń pierwiastkowych, ale wymagają one znajomości liczb zespolonych. Młody Norweg Niels Abel (1802-1829) udowodnił jako 19-latek, że nie jest możliwe opracowanie takiego schematu dla równań stopnia piątego, a Evariste Galois (1811-1832) stosując swoją teorię grup pokazał, że nie jest to możliwe dla równań stopnia wyższego niż czwarty.

Pewnym ułatwieniem w znajdowaniu tych pierwiastków jest następujące twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych:

Niech $W(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie takim wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, że $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, jest pierwiastkiem wymiernym wielomianu $W(x)$, to p jest podzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest podzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze a_n.

Uwaga. Jeżeli $a_n = 1$, to jedynymi pierwiastkami wymiernymi wielomianu o współczynnikach całkowitych mogą być liczby całkowite. Należy ich poszukać wśród podzielników wyrazu wolnego.

Przykład. Niech $W(x) = -4x^3 - 12x^2 - 5x + 6$. W tym przypadku $a_0 = 6,\ a_3 = -4$. Szukamy pierwiastków wymiernych tego wielomianu wśród liczb postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$, a $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Takimi ułamkami są liczby ze zbioru $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}\right\}$. Tylko trzy z nich są pierwiastkami tego wielomianu, a mianowicie $-2,\ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, ponieważ spełniają równości $W(-2)=0$, $W\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $W\left(-\frac{3}{2}\right)=0$.

Wyszukiwanie wymiernych pierwiastków wielomianu o współczynnikach całkowitych nie jest jedynym zastosowaniem poprzedniego twierdzenia.

Przykład. Udowodnimy, że $\sqrt[3]{7}$ jest liczbą niewymierną.
Rozwiązanie. Rozważmy równanie $x^3 - 7 = 0$. Analizowana liczba jest rozwiązaniem tego równania. Nie może jednak ona być liczbą wymierną, ponieważ na podstawie ostatniego *twierdzenia* lub wynikającej z niego *uwagi* pierwiastkami wymiernymi tego równania mogą być tylko liczby ze zbioru $\{-1, 1, -7, 7\}$. Widać natychmiast, że żadna z tych liczb nie spełnia wspomnianego równania, wobec czego $\sqrt[3]{7}$ nie może być liczbą wymierną.

Duże znaczenie w teorii wielomianów mają pierwiastko wielokrotne.

Liczbę x_0 nazywamy <u>*k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W*</u>, gdzie $k \in \mathbf{N}^+$, jeżeli wielomian ten jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie jest on podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$. Zatem liczba x_0 jest *k*-krotnym pierwiastkiem wielomianu *W* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian *Q*, że $W(x) = (x - x_0)^k Q(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$, przy czym $Q(x_0) \neq 0$.

Przykład. Niech

$$W(x) = 2x^8 - 24x^7 + 54x^6 + 240x^5 - 546x^4 - 1632x^3 + 130x^2 + 6600x + 9000 == 2(x-3)(x+2)^2(x-5)^3(x^2+2x+3).$$

Pierwiastkami wielomianu *W* są liczby:

3 − pierwiastek jednokrotny;
−2 − pierwiastek dwukrotny;
5 − pierwiastek trzykrotny.

Poniższe twierdzenie zawiera istotną informację dotyczącą liczby pierwiastków wielomianu:

Wielomian stopnia *n*-tego ma co najwyżej *n* pierwiastków. Pierwiastek *k*-krotny jest tu liczony jako *k* pierwiastków.

7.3. Równania i nierówności wielomianowe

Ważną operacją często wykonywaną w trakcie rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych jest rozkładanie wielomianu na czynniki. Powstaje tu pytanie, czy każdy wielomian daje się rozłożyć na czynniki liniowe. Odpowiedź daje następujące twierdzenie:

Każdy wielomian *W* stopnia nie mniejszego niż 2 o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego i nierozkładalne czynniki stopnia drugiego. Rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników.

Uwaga. W opisanym rozkładzie mogą wystąpić tylko czynniki stopnia pierwszego lub tylko nierozkładalne czynniki stopnia drugiego lub oba rodzaje czynników.

<u>*Równaniem wielomianowym*</u> nazywamy równanie postaci

$$W(x) = 0,$$

gdzie *W* jest wielomianem stopnia dodatniego.

Najczęściej rozwiązujemy równania sprowadzalne do równań wielomianowych w czterech krokach:

1. Doprowadzamy równanie przy pomocy elementarnych przekształceń algebraicznych do postaci $W(x)=0$.
2. Rozkładamy wielomian $W(x)$ na czynniki.
3. Każdy z czynników przyrównujemy do zera.
4. Rozwiązujemy wszystkie otrzymane w ten sposób równania.

Przykład. Rozwiążemy wybrane równania.

a) (*) $2x^5-3x^4-5x^3=8x-14x^2$.

Rozwiązanie. Mamy

$$(*)\Leftrightarrow 2x^5-3x^4-5x^3+14x^2-8x=0\Leftrightarrow$$
$$x\underbrace{\left(2x^4-3x^3-5x^2+14x-8)\right)}_{W_1(x)}=0.$$

Zauważmy, że $W_1(1)=0$. Dzieląc $W_1(x)$ przez $(x-1)$, otrzymujemy:

$$W_1(x)=(x-1)\underbrace{\left(2x^3-x^2-6x+8\right)}_{W_2(x)}.$$

Stąd nasze równanie ma postać:

$$x(x-1)\left(2x^3-x^2-6x+8\right)=0.$$

Postępując dalej analogicznie, stwierdzamy, że $W_2(-2)=0$, skąd

$$W_2(x)=(x+2)\left(2x^2-5x+4\right).$$

Dalszy rozkład na czynniki $W_2(x)$ nie jest możliwy, gdyż wyróżnik trójmianu $y=2x^2-5x+4$ jest ujemny. Zatem równanie (*) sprowadza się ostatecznie do postaci

$$x(x+2)(x-1)\left(2x^2-5x+4\right)=0,$$

skąd wynika, że jego rozwiązaniami są liczby $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$.

b) (*) $4x^3+12x^2-x-3=0$.

Rozwiązanie. Rozkładamy na czynniki lewą stronę równania:

$$(*)\Leftrightarrow 4x^2(x+3)-(x+3)=0\Leftrightarrow(x+3)\left(4x^2-1\right)=0\Leftrightarrow$$
$$(x+3)(2x-1)(2x+1)=0.$$

Stąd równanie posiada trzy rozwiązania: $x_1=-3,\ x_2=\dfrac{1}{2},\ x_3=-\dfrac{1}{2}$.

c) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9 = 0.$

Rozwiązanie. Przyjmując $W(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9 = 0$, stwierdzamy, że $W(-3) = 0$ oraz $W(3) = 0$. Zatem wielomian dzieli się zarówno przez dwumian $(x+3)$ jak i przez dwumian $(x-3)$. W konsekwencji dzieli się on przez iloczyn tych dwumianów, tj. przez $x^2 - 9$:

$$\begin{array}{l}
\underline{x^2 - 4x + 1\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\left(x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9\right) : \left(x^2 - 9\right) \\
\underline{-x^4 \qquad\quad + 9x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad -4x^3 + x^2 + 36x \\
\qquad\quad \underline{\ \ 4x^3 \qquad\ \ - 36x} \\
\qquad\qquad\qquad x^2 \qquad - 9 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x^2 \qquad + 9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 0
\end{array}$$

Stąd rozwiązywane równanie możemy zapisać w postaci

$$(x-3)(x+3)\left(x^2 - 4x + 1\right) = 0.$$

Znajdźmy pierwiastki nie rozłożonego czynnika:

$$\Delta = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{3},\ \ x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Łącznie równanie posiada wiec cztery rozwiązania:

$$x_1 = 2 - \sqrt{3},\ x_2 = 2 + \sqrt{3},\ x_3 = -3,\ x_4 = 3.$$

Nierównością wielomianową nazywamy nierówność postaci:

$$W(x) < 0,\quad W(x) > 0,\quad W(x) \le 0,\quad W(x) \ge 0,$$

gdzie W jest wielomianem stopnia dodatniego.

Aby rozwiązać nierówność sprowadzalną do nierówności wielomianowej, najczęściej postępujemy w następujący sposób:

1. Doprowadzamy nierówność do jednej z postaci wymienionych w poprzedniej definicji.

2. Rozkładamy wielomian $W(x)$ na czynniki.

3. Dzielimy obie strony nierówności przez czynniki stale dodatnie lub stale ujemne; jeżeli trzeba, zmieniamy stosownie kierunek nierówności.

4. Wykonujemy jedną z poniższych czynności:

(a) Ustalamy znak pozostałych czynników w poszczególnych przedziałach i na tej podstawie budujemy tzw. siatkę znaków dającą informację o znaku i miejscach zerowych wielomianu.

(b) Rysujemy wykresy poszczególnych czynników, a następnie z wykresów odczytujemy znaki czynników w poszczególnych przedziałach.

(c) Szkicujemy uproszczony wykres wielomianu tak, aby uzyskać te same informacje, co przy poprzedniej metodzie.

5. Przy pomocy siatki znaków, wykresów lub wykresu znajdujemy zbiór rozwiązań nierówności.

Przykład. Rozwiążmy wybrane nierówności.

a) $\left(3x^2+2x-8\right)\left(-x^2+2x-5\right)\left(x-1\right)^2(x+3)^3 \le 0.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Dzielimy obie strony nierówności przez czynnik $\left(-x^2+2x-5\right)$, gdyż jest on stale ujemny. Po koniecznej zmianie kierunku nierówności na przeciwny, przyjmuje ona postać

$$(3x^2+2x-8)(x-1)^2(x+3)^3 \ge 0.$$

Znajdźmy rozkład na czynniki liniowe wyrażenia kwadratowego:

$$\Delta = 4-4\cdot 3\cdot(-8) = 100 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-2-10}{6} = -2 \wedge x_2 = \frac{-2+10}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x^2+2x-8 = 3(x+2)\left(x-\frac{4}{3}\right).$$

Rozwiązywana nierówność po obustronnym podzieleniu przez 3 i uporządkowaniu czynników przyjmuje postać:

$$(x+3)^3\,(x+2)\,(x-1)^2\left(x-\frac{4}{3}\right) \ge 0.$$

Oznaczamy przez $W(x)$ lewą stronę ostatniej nierówności . Dalsze postępowanie zależy od wyboru metody.

<u>*Metoda siatki znaków*</u>

Tworzymy następującą tabelę:

x	...	-3	...	-2	...	1	...	$\frac{4}{3}$	...
$(x+3)^3$	$-$	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$x-\frac{4}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
$W(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	$-$	0	+

Zatem rozwiązaniem nierówności jest zbiór $\left[-3;\,-2\right]\cup\{1\}\cup\left[\frac{4}{3};\,\infty\right)$.

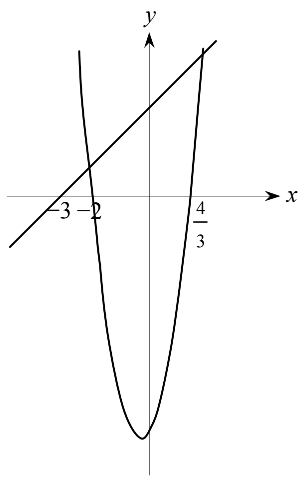
<u>*Metoda wykresów poszczególnych czynników.*</u>
Wyjdźmy od nierówności postaci

$$(3x^2+2x-8)(x-1)^2(x+3)^3 \geq 0\,.$$

Funkcja $y=(x-1)^2$ jest równa 0 dla x = 1, a dla $x \neq 1$ jest stale dodatnia. Analogicznie funkcja $y=(x+3)^2$ jest równa 0 dla $x=-3$, a dla $x\neq -3$ jest stale dodatnia. Przez bezpośrednie podstawienie sprawdzamy, że liczby 1 i -3 są rozwiązaniami nierówności. Dla $x\in \mathbf{R}\setminus\{-3,1\}$ dzielimy obie strony nierówności przez $(x-1)^2(x+3)^2$, co daje nierówność

$$(3x^2+2x-8)(x+3)\geq 0\,.$$

Rysujemy wykresy trójmianu $f_1(x)=3x^2+2x-8$, którego pierwiastkami są liczby $x_1=-2,\ x_2=\frac{4}{3}$ oraz funkcji liniowej $f_2(x)=x+3$:



W oparciu o nie tworzymy tabelę:

x	...	-3	...	-2	...	$\frac{4}{3}$	...
$f_1(x)$	+	+	+	0	−	0	+
$f_2(x)$	−	0	+	+	+	+	+
$f_1(x)\cdot f_2(x)$	−	0	+	0	−	0	+

i, podobnie jak poprzednio, wnioskujemy, że rozwiązaniem nierówności jest zbiór $\left[-3;\,-2\right]\cup\{1\}\cup\left[\frac{4}{3};\,\infty\right)$.

<u>Metoda uproszczonego wykresu</u>

W istotny sposób wykorzystamy tu następujące własności funkcji wielomianowej:

i) Wykres wielomianu jest linią ciągłą.

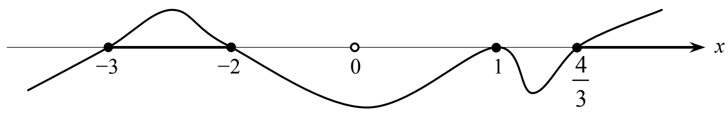
ii) Wielomian w każdym przedziale nie zawierającym jego pierwiastków ma stały znak.

iii) Niech x_0 będzie jedynym pierwiastkiem wielomian należącym do przedziału $(a;\,b)$. W zależności od tego, czy krotność pierwiastka x_0 jest liczbą parzystą, czy nieparzystą, wielomian ma ten sam albo przeciwny znak na przedziałach $(a;\,x_0)$ i $(x_0;\,b)$.

Po ustaleniu miejsc zerowych oraz ich krotności ustalamy znak wielomianu w jednym z wyznaczonych przez miejsca zerowe przedziałów. Np.

$$0\in(-2;\,1);\; W(0)=3^3\cdot 2\cdot(-1)^2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)<0.$$

Z powyższego wynika, że przybliżony wykres wielomianu $W(x)$ dostarczający informacji o jego znaku i miejscach zerowych wygląda następująco:



Odczytujemy z niego, że rozwiązaniem nierówności jest zbiór

$$\left[-3;\,-2\right]\cup\{1\}\cup\left[\frac{4}{3};\,\infty\right).$$

b) $(*)\quad -x^3+3x^2-3x+2\le 0.$

<u>Rozwiązanie</u>. Niech $W(x)=-x^3+3x^2-3x+2$. Ponieważ $W(2)=0$, więc można by podzielić $W(x)$ przez $(x-2)$. Efektywniejszą i szybszą jest jednak metoda grupowania, w której wykorzystujemy posiadaną informację o podzielności:

$$-x^3+3x^2-3x+2=\left(-x^3+2x^2\right)+\left(x^2-2x\right)-x+2=$$
$$-x^2(x-2)+x(x-2)-(x-2)=(x-2)\left(-x^2+x-1\right).$$

Wyrażenie $-x^2+x-1$ jest stale ujemne, więc

$$(*) \Leftrightarrow (x-2)\left(-x^2+x-1)\right)\leq 0 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x>2.$$

Rozwiązaniami nierówności $(*)$ są więc wszystkie liczby z przedziału $(2;\,\infty)$.

Powstaje pytanie, czy istnieje możliwość rozwiązania równania lub nierówności wielomianowej, jeżeli odpowiadający jej wielomian nie posiada pierwiastków wymiernych. Okazuje się, że taka szansa istnieje w przypadku, gdy współczynniki wielomianu mają pewną własność typu symetrii.

Niech $W(x)=a_n\,x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\;\ldots\;+a_1\,x+a_0$ będzie wielomianem stopnia *n*. Mówimy, że <u>*wielomian* W jest *symetryczny*</u>, jeżeli jego współczynniki spełniają równości

$$a_i = a_{n-i}$$

dla $i=0,\,1,\,\ldots\,,\,n$.

Powyższy warunek definicyjny oznacza, że zachodzą równości

$$a_0=a_n\,,\; a_1=a_{n-1}\,,\; \text{itd.}$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu symetrycznego. Wówczas $W(x)=(x+1)\,W_1(x)$. Co więcej, okazuje się, że wielomian W_1 jest także wielomianem symetrycznym. Możemy więc ograniczyć się do rozważenia problemu poszukiwania pierwiastków takich wielomianów, gdy ich stopień jest liczbą parzystą, tj., gdy $n=2\,m$. Rozważmy więc równanie

$$(1)\quad W(x)=0\,.$$

Ponieważ $a_n=a_0\neq 0$, więc zero nie jest rozwiązaniem równania (1). Podzielmy równanie (1) stronami przez x^m. Otrzymujemy wówczas równanie równoważne:

$$(2)\quad a_0\left(x^m+x^{-m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+x^{-(m-1)}\right)+\;\ldots\;+a_{m-1}\left(x+x^{-1}\right)+a_m=0\,.$$

Można wykazać, że wyrażenie $x^k+\dfrac{1}{x^k}$ daje się przedstawić w postaci $W_k\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, gdzie W_k jest pewnym wielomianem stopnia *k*. Wobec tego równanie (2) można rozwiązać stosując podstawienie $x+\dfrac{1}{x}=t$.

Przykład. Rozwiążemy równanie symetryczne

$$(*)\quad x^5-7x^4+14x^3-7x^2+x=0.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow x\left(x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1\right) = 0.$$

Jednym z pierwiastków równania jest liczba 0. Zakładając, że $x \neq 0$, otrzymujemy dalej:

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0 \Big| : x^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0\ .$$

Podstawiając $x + \dfrac{1}{x} = t$ i uwzględniając równość $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, mamy

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 4.$$

Wracając do niewiadomej *x*, rozważymy dwa przypadki.

1^0 $t = 3$. Wtedy

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

2^0 $t = 4$. Wtedy

$$x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \wedge$$

$$x_4 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Rozwiązaniami równania $(*)$ są zatem liczby 0, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

7.4. Wzory Viete'a

W wielu zagadnieniach dotyczących wielomianów, równań i nierówności wielomianowych pomocne są tzw. wzory Viete'a. Są one uogólnieniem analogicznych wzorów dla trójmianu kwadratowego. Przypadku wielomianu trzeciego stopnia dotyczy poniższe twierdzenie:

Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 ,$$

gdzie $a_3 \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości:

i) $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}$;

ii) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \dfrac{a_1}{a_3}$;

iii) $x_1 x_2 x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$.

Przykład. Rozwiążemy równanie

$$(*)\qquad x^3-2x^2-5x+6=0.$$

<u>Rozwiązanie</u>. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-6 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-5. \end{cases}$$

Ponieważ wymiernych pierwiastków równania $(*)$ poszukujemy wśród całkowitych podzielników liczby 6, tzn. liczb $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, to z pierwszego i drugiego równania łatwo widać, że muszą to być dwie liczby dodatnie i jedna ujemna, których suma wynosi 2, czyli liczby 1, -2 i 3. Liczby te spełniają także trzecie równanie. W tym przypadku wzory Viete'a pozwoliły łatwo odgadnąć rozwiązania równania $(*)$.

Przykład. Udowodnimy, że jeżeli a i b są liczbami całkowitymi, przy czym $a\neq 0$, to równanie

$$(*)\qquad x^3-3ax^2-bx+a=0$$

ma co najwyżej jeden pierwiastek wymierny.

<u>Rozwiązanie</u>. Dowód tego faktu przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że liczby q_1, q_2 są wymiernymi pierwiastkami równania $(*)$. Wówczas lewa strona równania $(*)$ rozkłada się na czynniki liniowe:

$$x^3-3ax^2-bx+a=(x-q_1)(x-q_2)(x-q_3).$$

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy układ równości:

$$\begin{cases} q_1+q_2+q_3=3a \\ q_1\cdot q_2+q_1\cdot q_3+q_2\cdot q_3=-b \\ q_1\cdot q_2\cdot q_3=-a. \end{cases}$$

Ponieważ q_1, q_2 są liczbami wymiernymi oraz a jest liczbą całkowitą, różną od 0, więc z uwagi na trzecie równanie stwierdzamy, że q_3 jest także liczbą wymierną. Zatem z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych wynika, że q_1, q_2 i q_3 są podzielnikami liczby a; stąd ich wartości bezwzględne nie przekraczają wartości bezwzględnej liczby a. W konsekwencji z uwagi na pierwsze równanie $q_1=q_2=q_3=a$. Ale to stoi w sprzeczności z równaniem trzecim, gdyż

$$a^3=-a \Leftrightarrow a=0.$$

8. Funkcje wymierne

8.1. Dowolne i szczególne funkcje wymierne

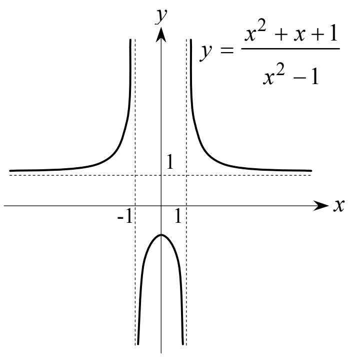
Funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów
$$f(x)=\frac{W_1(x)}{W_2(x)},$$
określoną na zbiorze $D_f=\{x\in\mathbf{R}:\ W_2(x)\neq 0\}$, nazywamy *funkcją wymierną*.

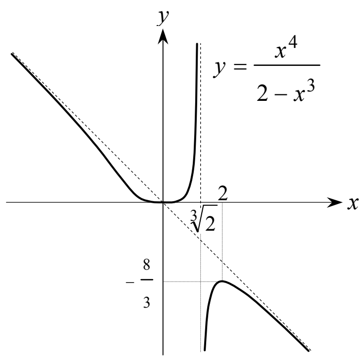
Ważnym przykładem funkcji wymiernej jest *funkcja homograficzna*, tzn. funkcja postaci
$$f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+d},$$
gdzie $c\neq 0$ i $W=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$.

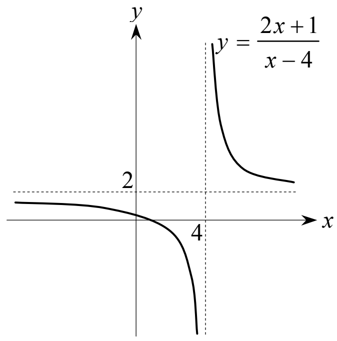
Jeżeli $c=0$, to funkcja f określona powyższym wzorem jest funkcją liniową, a gdy $W=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$, f jest funkcją stałą (pomijamy tu „patologiczny" przypadek, gdy $c=d=0$). Obie te funkcje nie są funkcjami homograficznymi.

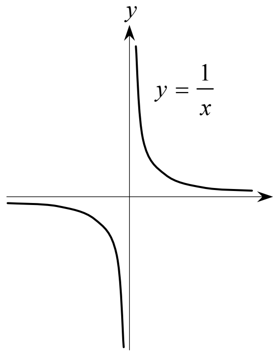
Szczególnym przypadkiem funkcji homograficznej jest *proporcjonalność odwrotna* $f(x)=\dfrac{a}{x}$, gdzie $a\neq 0$.

Przykład. Podamy wykresy niektórych funkcji wymiernych. Uzyskanie dwóch pierwszych wymaga odpowiednich wiadomości z rachunku różniczkowego, w przypadku następnych dwóch nie jest to konieczne.









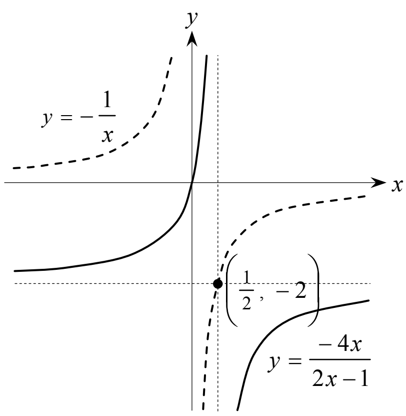
Widzimy, że wykresy funkcji wymiernych mogą przybierać różne kształty. Wykresem funkcji homograficznej jest jednak zawsze hiperbola. Otrzymujemy ją z wykresu funkcji $g(x)=\frac{a}{x}$ stosując odpowiednie przesunięcia.

Przykład. Naszkicujemy wykres funkcji $f(x)=\frac{-4x}{2x-1}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zauważmy, że

$$f(x)=\frac{-4x}{2x-1}=\frac{-2(2x-1)-2}{2x-1}=-2+\frac{-2}{2x-1}=-2+\frac{-1}{x-\frac{1}{2}},\quad D_f=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Zatem, aby otrzymać wykres badanej funkcji, należy przesunąć wykres funkcji $g(x)=-\frac{1}{x}$ o wektor $\vec{v}=\left[\frac{1}{2},\,-2\right]$ lub, co łatwiejsze, układ współrzędnych o wektor $-\vec{v}=\left[-\frac{1}{2},\,2\right]$:



W ogólnym przypadku funkcji homograficznej mamy

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d\right)-\frac{ad-bc}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Dlatego jej wykres otrzymujemy przesuwając wykres funkcji $g(x)=\frac{k}{x}$, gdzie $k=\frac{bc-ad}{c^2}$, o wektor $\vec{v}=\left[-\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}\right]$. Stąd wynika wniosek:

Wykresem funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$; $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, jest hiperbola. Asymptotami tej funkcji są proste o równaniach $x=-\frac{d}{c}$ i $y=\frac{a}{c}$.

8.2. Równania i nierówności wymierne

<u>*Równaniem wymiernym*</u> nazywamy równanie postaci

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)}=0,$$

a <u>*nierównościami wymiernymi*</u> każdą z nierówności postaci

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)}>0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\geq 0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}<0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\leq 0,$$

gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomianami, przy czym $W_2(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Mówiąc krótko, są to równania lub nierówności, w których występują ułamki algebraiczne.

W typowym przypadku, aby rozwiązać równanie sprowadzalne do równania wymiernego, należy:

1. Ustalić dziedzinę równania.
2. Pomnożyć obie strony równania przez wspólny mianownik występujących tam ułamków algebraicznych, w konsekwencji czego otrzymamy równanie wielomianowe.
3. Rozwiązać to równanie wielomianowe.
4. Wybrać te rozwiązania równania wielomianowego, które należą do dziedziny równania wymiernego.

Oczywiście w szczególnych przypadkach może istnieć inna, szybsza metoda rozwiązania danego równania.

Przykład. Rozwiążemy równanie

$$\frac{x-1}{x+2}=1+\frac{x+3}{x^2-4}.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Rozpoczynamy od zastrzeżeń: $x\neq 2,\ \ x\neq -2$. Mamy dalej

$$\frac{x-1}{x+2}=1+\frac{x+3}{(x-2)(x+2)}\ \Bigg|\cdot(x-2)(x+2)\Rightarrow$$

$$(x-1)(x-2)=(x-2)(x+2)+x+3\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2=x^2-4+x+3\Leftrightarrow 4x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Ponieważ liczba $\frac{3}{4}$ należy do dziedziny równania, więc jest ona jego rozwiązaniem.

Aby rozwiązać nierówność sprowadzalną do nierówności wymiernej, należy:

1. Ustalić dziedzinę nierówności.
2. Uporządkować nierówność, tzn. przenieść wszystkie wyrażenia na jedną stronę, doprowadzić je do wspólnego mianownika i wykonać redukcję wyrazów podobnych po to, aby przekształcić nierówność do jednej z postaci:
$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)}>0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\geq 0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}<0,\ \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\leq 0.$$
3. Pomnożyć obie strony nierówności przez kwadrat mianownika $\left((W_2(x))^2\right)$, co sprowadzi ją do nierówności wielomianowej.
4. Rozwiązać otrzymaną nierówność.
5. Porównać rozwiązania nierówności wielomianowej z dziedziną nierówności wymiernej i ewentualnie usunąć ze zbioru rozwiązań punkty spoza dziedziny nierówności.

Powyższą „instrukcję” można modyfikować wykorzystując dodatkowe informacje dotyczące własności poszczególnych mianowników. Można również zastąpić kroki 2 i 3 pomnożeniem obu stron nierówności przez kwadrat wspólnego mianownika poszczególnych ułamków algebraicznych występujących w tej nierówności, a w konkretnych przypadkach zastosować nawet zupełnie inne postępowanie.

Przykład. Rozwiążemy nierówności.

a) (*) $\quad \frac{x+5}{x-3}+2\leq\frac{x+2}{x+3}-\frac{1}{x^2-9}.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Oczywiście musi być spełnione zastrzeżenie: $x\neq 3,\ \ x\neq -3$.

Mamy

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x+5}{x-3} + 2 - \frac{x+2}{x+3} + \frac{1}{x^2-9} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+5)(x+3) + 2(x+3)(x-3) - (x+2)(x-3) + 1}{(x-3)(x+3)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 8x + 15 + 2x^2 - 18 - x^2 + x + 6 + 1}{x^2-9} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2+9x+4}{x^2-9} \le 0 \Big| \cdot \left(x^2-9\right)^2 \Rightarrow (2x^2+9x+4)(x^2-9) \le 0.$$

Rozkładamy na czynniki otrzymane trójmiany kwadratowe:

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-9-7}{4} = -4 \wedge x_2 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

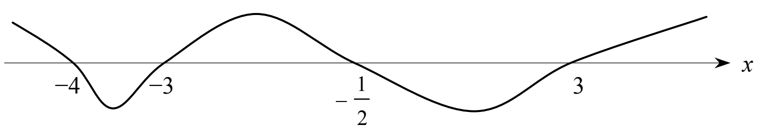
$$2x^2 + 9x + 4 = 2(x+4)\left(x + \frac{1}{2}\right);$$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3).$$

Szkicujemy uproszczony wykres wielomianu

$$w(x) = 2(x+4)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$$

i odczytujemy z niego rozwiązanie nierówności wielomianowej:



Stąd

$$x \in [-4; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; 3\right].$$

Po uwzględnieniu zastrzeżeń ostatecznie stwierdzamy, że nierówność $(*)$ spełniają punkty

$$x \in [-4; -3) \cup \left[-\frac{1}{2}; 3\right).$$

b) $(*)$ $\dfrac{x^3}{8 - 2x(4-x)} \ge \dfrac{2x^3}{7x(x-1)+4}.$

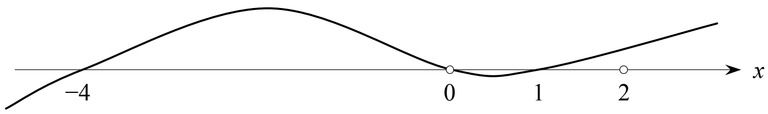
<u>*Rozwiązanie*</u>. Ponieważ

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^3}{2x^2-8x+8} \ge \frac{2x^3}{7x^2-7x+4} \Leftrightarrow \frac{x^3}{(x-2)^2} \ge \frac{4x^3}{7x^2-7x+4},$$

więc dziedziną nierówności jest zbiór $\mathbf{R}\setminus\{2\}$. Widać ponadto bezpośrednio, że rozwiązaniem nierówności jest liczba $x=0$. Mnożąc dla $x\in\mathbf{R}\setminus\{0,\,2\}$ obie strony ostatniej nierówności przez $\dfrac{\left(7x^2-7x+4\right)(x-2)^2}{x^2}$, otrzymujemy:

$$7x^3-7x^2+4x \ge 4x(x^2-4x+4) \Leftrightarrow 3x^3+9x^2-12x \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2+3x-4\right) \ge 0 \Leftrightarrow x(x+4)(x-1) \ge 0.$$

Uproszczony szkic wielomianu $W(x)=x(x+4)(x-1)$ ma postać:

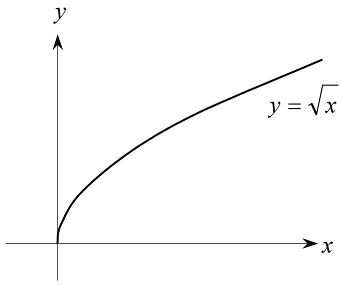


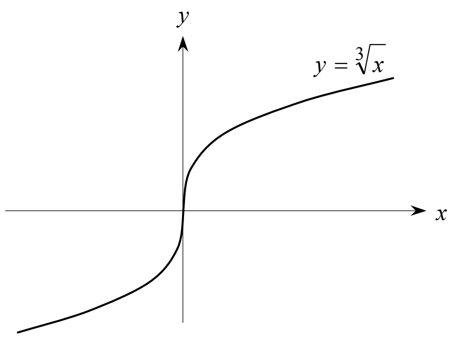
Wynika z niego, że zbiorem rozwiązań nierówności w rozważanym przypadku jest suma przedziałów $[-4;\,0)\cup[1;\,2)\cup(2;\,\infty)$. Dodając do niego rozwiązanie $x=0$, otrzymujemy ostatecznie zbiór wszystkich rozwiązań, którym jest suma $[-4;\,0]\cup[1;\,2)\cup(2;\,\infty)$.

9. Funkcje pierwiastkowe i potęgowe

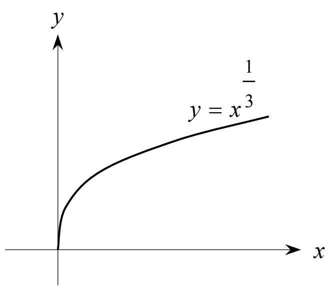
9.1. Funkcje pierwiastkowe i potęgowe oraz ich wykresy

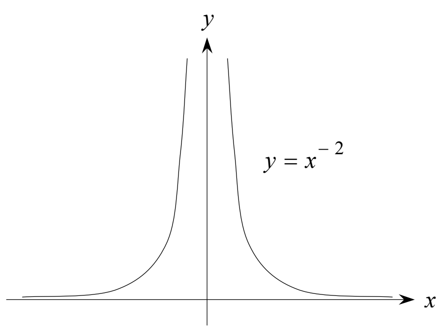
Funkcją pierwiastkową nazywamy funkcję postaci $f(x)=\sqrt[n]{x}$, gdzie $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 2$. Dziedzina tej funkcji zależy od wartości n. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to dziedziną jest zbiór $[0;\ \infty)$; dla n nieparzystych funkcja określona jest dla wszystkich liczb rzeczywistych.





Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci $f(x)=x^{\alpha}$, gdzie $\alpha \in \mathbf{R}$. Dziedzina tej funkcji zależy od wartości α. Jeżeli α jest liczbą naturalną dodatnią, to $D_f = \mathbf{R}$; w przypadku gdy α jest liczbą całkowitą niedodatnią, to otrzymujemy funkcję wymierną określoną dla $x \neq 0$. Gdy α jest liczbą niecałkowitą (ułamkową lub niewymierną), to dziedziną funkcji jest przedział $(0;\infty)$. W szczególnych przypadkach funkcja potęgowa jest obcięciem funkcji pierwiastkowej do przedziału $(0;\ \infty)$.





9.2. Równania i nierówności pierwiastkowe

Przykłady. Rozwiążemy równania pierwiastkowe.

a) $(*)\qquad \sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Rozwiązanie. Możemy zastosować dwie metody.
Metoda analizy starożytnych. Przypuśćmy, że x jest rozwiązaniem nierówności $(*)$. Wówczas

$$(*)\Rightarrow 1-x-2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}+x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{(1-x)\,x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x-x^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow$$
$$9x^2-9x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{6}\vee x=\frac{3+\sqrt{5}}{6}.$$

Ponieważ w pierwszym kroku rozwiązania wystąpiła implikacja, więc istnieje możliwość pojawienia się tzw. pierwiastków obcych. Dlatego konieczne jest wykonanie sprawdzenia, czy rzeczywiście znalezione liczby są rozwiązaniami równania $(*)$. Niech symbol $L(x)$ oznacza wartość lewej strony nierówności $(*)$ w punkcie x oraz P – jej prawą stronę. Mamy

$$L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)=\sqrt{1-\frac{3-\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}=$$
$$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+1}{12}}-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{12}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4\cdot 3}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4\cdot 3}}=$$
$$\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=P;$$

$$L\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)=\sqrt{1-\frac{3+\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}=$$
$$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{12}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+1}{12}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4\cdot 3}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4\cdot 3}}=$$
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\neq P.$$

Zatem tylko liczba $\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$ jest rozwiązaniem równania $(*)$. Zauważmy, że liczba $\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$ należy do zbioru tych x, dla których to równanie ma sens.

<u>Metoda równań równoważnych</u>. Zaczynamy od zastrzeżeń:

$$1-x\ge 0 \wedge x\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;\,1].$$

Istota metody polega na utworzeniu ciągu równań równoważnych. Będziemy zmuszeni podnosić obie strony danego równania do kwadratu i tu trzeba zadbać o to, aby obie jego strony były wyrażeniami tego samego znaku (wtedy funkcja $f(x)=x^2$ obcięta do przedziału $[0;\,\infty)$ lub $(-\infty;\,0]$ jest różnowartościowa). Mamy

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{x}\,\Big|\,()^2 \Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}=-2x+\frac{2}{3}.$$

Ponieważ lewa strona ostatniego równania jest wyrażeniem nieujemnym, więc przed podniesieniem obu jego stron do kwadratu, musimy zastrzec, że

$$-2x+\frac{2}{3}\ge 0 \Leftrightarrow x\le\frac{1}{3}.$$

Pod takim warunkiem możemy kontynuować kroki równoważne:

$$\ldots \Leftrightarrow \frac{4}{3}x=4x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{9} \Leftrightarrow 4x^2-4x+\frac{4}{9}=0 \Leftrightarrow 9x^2-9x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{6} \vee x=\frac{3+\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{6},$$

gdyż $\frac{3+\sqrt{5}}{6}\notin\left[0;\,\frac{1}{3}\right]$. Rozwiązaniem równania $(*)$ jest więc liczba $x=\frac{3-\sqrt{5}}{6}$.

Zaletą przedstawionego rozwiązania jest brak konieczności wykonania kłopotliwego sprawdzenia, z drugiej jednak strony niezbędne było zrobienie na wstępie zastrzeżeń.

b) $(*)$ $\quad\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

<u>Rozwiązanie</u>. Jest oczywiste, że musi być $x\ge 1$ i wtedy

$$x+3-4\sqrt{x-1}=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2\ge 0 \wedge x+8-6\sqrt{x-1}=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2\ge 0.$$

Podstawiamy $\sqrt{x-1}=t$:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(2-t)^2}+\sqrt{(3-t)^2}=1 \Leftrightarrow |2-t|+|3-t|=1.$$

Dalsze postępowanie „rozbijemy” na przypadki.

1^0 $t\in(-\infty;\,2)$. Wtedy

$$2-t+3-t=1 \Leftrightarrow t=2.$$

Znaleziona wartość nie należy do rozpatrywanego przedziału.
2^0 $t \in [2;\, 3)$. Wtedy

$$-2+t+3-t=1 \Leftrightarrow 1=1.$$

Rozwiązaniami są więc wszystkie liczby należące do przedziału $[2;\, 3)$.
3^0 $t \in [3;\, \infty)$. Wtedy

$$-2+t-3+t=1 \Leftrightarrow t=3.$$

Znaleziona wartość należy do rozpatrywanego przedziału.

Reasumując, zbiorem rozwiązań rozważanego równania z niewiadomą t jest przedział $[2;\, 3]$. Wracając do niewiadomej x otrzymujemy ciąg nierówności równoważnych

$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \Leftrightarrow 4 \le x-1 \le 9 \Leftrightarrow 5 \le x \le 10\,.$$

Zbiorem rozwiązań nierówności (*) jest więc przedział $[5;\, 10]$.

c) $\sqrt{x+1}+x^2+2x-1=0\,.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenie: $x \ge -1$. Stosując podstawienie $\sqrt{x+1}=t$, sprowadzamy równanie do równania kwadratowego:

$$t+t^2-1-1=0 \Leftrightarrow (t-1)+\left(t^2-1\right)=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)=0 \Leftrightarrow t=-2 \vee t=1.$$

Równanie $\sqrt{x+1}=-2$ jest sprzeczne. Dla drugiej znalezionej wartości t mamy:

$$\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0.$$

Liczba $x=0$ spełnia zastrzeżenie i dlatego jest ona rozwiązaniem naszego równania.

Przykłady. Rozwiążemy wybrane nierówności.

a) (*) $(x-6)\sqrt{x-1} < 8-2x\,.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zauważmy na wstępie, że w przypadku nierówności pierwiastkowych raczej się nie stosuje metody analizy starożytnych ze względu na trudność z eliminacją rozwiązań obcych (znaleziony zbiór „kandydatów” na rozwiązania byłby na ogół nieskończony).

Dziedziną rozważanej nierówności jest zbiór $[1;\, \infty)$. Rozpatrzymy trzy przypadki.
1^0 $x \in [1;\, 4]$. Wtedy lewa strona nierówności jest ujemna, a prawa nieujemna. Nierówność jest więc prawdziwa dla każdego $x \in [1;\, 4]$.
2^0 $x \in (4;\, 6)$. Teraz obie strony nierówności są ujemne. Korzystają z faktu, że funkcja $f(x)=x^2$ obcięta do przedziału $(-\infty;\, 0]$ jest malejąca, otrzymujemy równoważności:

$$(x-6)\sqrt{x-1} < 8-2x \wedge x \in (4;\, 6) \Leftrightarrow$$

$$(x-6)^2(x-1) > 4(4-x)^2 \ \wedge x \in (4;\ 6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 17x^2 + 80x - 100 > 0 \ \wedge x \in (4;\ 6) \Leftrightarrow$$
$$(x-2)(x-5)(x-10) > 0 \wedge x \in (4;\ 6) \Leftrightarrow x \in (4;\ 5).$$

3^0 $x \in [6;\ \infty)$. W tym przypadku nierówność jest sprzeczna, gdyż jej lewa strona jest nieujemna, a prawa ujemna.

Ostatecznie stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań badanej nierówności jest przedział $[1;\ 5)$.

b) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

Rozwiązanie. Musi być spełnione zastrzeżenie: $x \le -2$ lub $x \ge 5$. Ponadto, ponieważ lewa strona nierówności jest zawsze nieujemna, więc rozwiązań musimy poszukać wśród liczb spełniających nierówność $x \le 8$. W konsekwencji musimy założyć, że $x \in (-\infty;\ -2] \cup [5;\ 8]$. Wtedy

$$\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow 13x < 74 \Leftrightarrow$$
$$x < \frac{74}{13}.$$

Uwzględniając założenie, widzimy, że analizowana nierówność jest prawdziwa dla $x \in (-\infty, -2] \cup \left[5;\ \frac{74}{13}\right)$.

c) $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x + 2$.

Rozwiązanie. Podobnie, jak w poprzednim rozwiązaniu, muszą być spełnione zastrzeżenie:

$$x \le -3 \vee x \ge 8.$$

Dla $x \le -3$ prawa strona nierówności jest ujemna, a lewa nieujemna, więc nierówność jest prawdziwa. Natomiast dla $x \ge 8$ obie strony nierówności są nieujemne, więc możemy nierówność tę podnieść stronami do kwadratu, otrzymując:

$$(x+3)(x-8) > (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 > x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 9x < -28 \Leftrightarrow$$
$$x < -\frac{28}{9}.$$

W konsekwencji w przedziale $[8;\ \infty)$ nie ma rozwiązań. Analizowana nierówności zachodzi więc tylko dla $x \in (-\infty;\ -3]$.

10. Funkcje wykładnicze

10.1. Własności podstawowe

<u>*Funkcją wykładniczą*</u> nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a^x\,;\;\; x \in \mathbf{R},$$

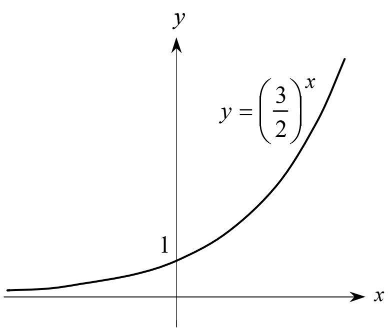
gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią, różną od 1.

Uwaga. W niektórych opracowaniach dopuszcza się przypadek $a = 1$, ale wówczas funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją stałą nie posiadającą własności charakterystycznych dla funkcji wykładniczej.

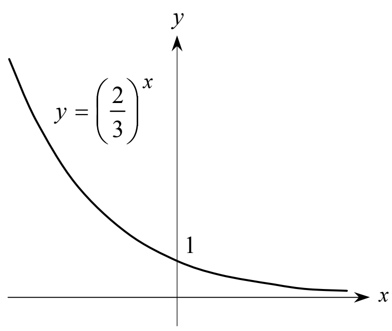
1

Poniżej podane są przykładowe wykresy funkcji wykładniczych w przypadku, gdy $a > 1$ i gdy $0 < a < 1$.

$a > 1$



$0 < a < 1$



Odnotujmy następujące ważne własności omawianej funkcji:

i) Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych. Dzięki temu nie ma potrzeby nakładania zastrzeżeń na argumenty funkcji wykładniczej przy rozwiązywaniu równań i nierówności wykładniczych.

ii) Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest przedział $(0\,;\,\infty)$. Oznacza to że, funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie. Stąd możemy dzielić lub mnożyć obie strony równań lub nierówności przez wyrażenia typu wykładniczego.

iii) Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa. Oznacza to, że

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Równoważność ta jest wykorzystywana przy rozwiązywaniu równań wykładniczych.

iv) Dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest funkcją rosnącą, tzn.

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 .$$

Równoważność ta jest wykorzystywana przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych.

v) Dla $0 < a < 1$ funkcja wykładnicza jest funkcją malejącą, tzn.

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

Równoważność ta jest wykorzystywana przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych.

10.2. Równania i nierówności wykładnicze

Równaniem wykładniczym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi.

Przykłady. Rozwiążemy kilka typowych równań wykładniczych.

a) $(*) \quad 4^{x-5} \cdot 16^{x+3} = 64 .$

Rozwiązanie. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow 4^{x-5+2x+6} = 4^3 \Leftrightarrow 4^{3x+1} = 4^3 .$$

Korzystając z własności *iii)*, otrzymujemy:

$$3x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} .$$

Ponieważ dziedziną równania był zbiór liczb rzeczywistych, więc jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{2}{3}$.

b) $(*) \quad 25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x .$

Rozwiązanie. Zachodzą równoważności

$$(*) \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 5 - 5^x = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 .$$

Podstawiamy $5^x = t$, skąd

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5 .$$

A więc:

$$t = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0 ;$$

$t=5 \Leftrightarrow 5^x = 5^1 \Leftrightarrow x=1.$

Rozwiązaniami równania $(*)$ są więc liczby 0 i 1.

c) $(*)$ $7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow 21\cdot 3^x - 81\cdot 3^x = 25\cdot 5^x - 125\cdot 5^x \Leftrightarrow -60\cdot 3^x = -100\cdot 5^x \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^x}{5^x} = \frac{-100}{-60} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x=-1.$$

d) $(*)$ $\left(\sqrt{31}\right)^{3-x} = 2^{4x-12}$.

Rozwiązanie. Prawdziwe są równoważności

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{31}\right)^{3-x} = 16^{x-3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{31}\right)^{3-x}\cdot 16^{3-x} = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{31}\cdot 16\right)^{3-x} = 1 \Leftrightarrow$$
$$3-x=0 \Leftrightarrow x=3.$$

e) $(*)$ $\left(\sqrt{17}-4\right)^{3x+8} = \left(4+\sqrt{17}\right)^{x+19}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\left(\sqrt{17}-4\right)\left(\sqrt{17}+4\right) = 17-16 = 1 \Rightarrow \sqrt{17}+4 = \left(\sqrt{17}-4\right)^{-1}.$$

Stąd

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{17}-4\right)^{3x+8} = \left(\sqrt{17}-4\right)^{-x-19} \Leftrightarrow 3x+8 = -x-19 \Leftrightarrow x = -\frac{27}{4}.$$

Nierównością wykładniczą nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi.

Przykłady. Rozwiążemy kilka nierówności.

a) $(*)$ $\frac{1}{2^{x^2}}\cdot 4^{x+1} < \frac{1}{64}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow 2^{-x^2}\cdot 2^{2(x+1)} < 2^{-6} \Leftrightarrow 2^{-x^2+2x+2} < 2^{-6}.$$

Korzystając z faktu, że funkcja $y=2^x$ jest rosnąca, otrzymujemy:

$$-x^2+2x+2 < -6 \Leftrightarrow x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)>0 \Leftrightarrow$$
$$x<-2 \vee x>4.$$

Zbiorem rozwiązań $(*)$ jest suma przedziałów $(-\infty;\,-2)\cup(4;\,\infty)$.

b) $(*)$ $3^{2x} > 2\cdot 3^x + 3$.

Rozwiązanie. Ma miejsce równoważność

$$(*) \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 2\cdot 3^x - 3 > 0.$$

Dlatego podstawiając $3^x = t$ i zauważając, że $t > 0$, otrzymujemy

$$t^2 - 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+1) > 0 \Leftrightarrow t < -1 \vee t > 3 \Leftrightarrow t > 3,$$

gdyż nierówność $t < -1$ w rozważanym przypadku jest zawsze fałszywa. Stąd wracając do podstawienia, otrzymujemy:

$$t > 3 \Leftrightarrow 3^x > 3^1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Nierówność $(*)$ spełniają wszystkie liczby z przedziału $(1;\ \infty)$.

c) $(*)$ $\quad \dfrac{1}{4^x - 2} < \dfrac{1}{1 - 4^{x+\frac{1}{2}}}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Muszą być spełnione następujące zastrzeżenia:

$$4^x - 2 \neq 0 \wedge 1 - 4^{x+\frac{1}{2}} \neq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \neq 2^1 \wedge 4^0 \neq 4^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$2x \neq 1 \wedge x + \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq -\frac{1}{2}.$$

Zauważamy, że

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{4^x - 2} < \frac{1}{1 - 2 \cdot 4^x}.$$

Zatem warto zastosować podstawienie $4^x = t$. Widzimy, że $t > 0$ i zgodnie z zastrzeżeniami $t \neq 2$ oraz $t \neq \dfrac{1}{2}$. Wtedy

$$(*) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{t-2} < \frac{1}{1-2t} \Big| \cdot (t-2)^2 (1-2t)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$(t-2)(1-2t)^2 < (t-2)^2 (1-2t) \Leftrightarrow (t-2)(1-2t)^2 - (t-2)^2(1-2t) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)(1-2t)(-3t+3) < 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)(t-2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$t < \frac{1}{2} \vee 1 < t < 2.$$

Wracając do niewiadomej *x*, otrzymujemy:

$$t < 2^{-1} \vee 1 < t < 2 \Leftrightarrow 4^x < 4^{-\frac{1}{2}} \vee 4^0 < 4^x < 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie stwierdzamy, że $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

d) $(*)$ $\quad 0 < 2^{x^2 - x - 6} \leq 1$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow 0 < 2^{x^2-x-6} \wedge 2^{x^2-x-6} \leq 2^0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x-6} \leq 2^0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3.$

Zwróćmy uwagę, że w jednym z kroków skorzystaliśmy z faktu, że nierówność $0 < 2^{x^2-x-6}$ jest spełniona dla każdego x. A więc $x \in [-2;\, 3]$.

e) $(*)$ $\quad \dfrac{1}{27} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-1} \le 3.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Funkcja wykładnicza o podstawie $\dfrac{1}{3}$ jest malejąca, więc

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3 > 3x-1 \ge -1 \Leftrightarrow 4 > 3x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} > x \ge 0.$$

Zatem $x \in \left[0;\, \dfrac{4}{3}\right)$.

f) $(*)$ $\quad 9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}.$

<u>*Rozwiązanie.*</u> Musi być spełnione zastrzeżenie:

$$x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\sqrt{3} \vee x \ge \sqrt{3}.$$

Wprowadzając podstawienie $3^{\sqrt{x^2-3}} = t$, otrzymujemy

$$t^2 + 3 < 28t \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 28t + 9 < 0 \Leftrightarrow 3\left(t - \frac{1}{3}\right)(t-9) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t < 9.$$

Stąd

$$3^{-1} < 3^{\sqrt{x^2-3}} < 3^2 \Leftrightarrow -1 < \sqrt{x^2-3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3} < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 4 \Leftrightarrow$$
$$x^2 < 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}.$$

Wobec zastrzeżenia ostatecznie stwierdzamy, że $x \in \left(-\sqrt{7};\, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3};\, \sqrt{7}\right)$.

Przykłady. Rozwiążemy układ równań

a) $(*)$ $\quad \begin{cases} 2^{2x} + 3^y = 13 \\ 2 \cdot 4^x - 3^y = -1. \end{cases}$

<u>Rozwiązanie</u>. Zachodzą równoważności:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 3^y = 13 \\ 2 \cdot 4^x - 3^y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 4^x = 12 \\ 2 \cdot 4^x - 3^y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4 \\ 3^y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 2.$$

A więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 1,\ y = 2$.

b) $(*)$ $\begin{cases} 9^{\frac{x}{y}} = 243 \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{y}{x}} \\ 5^{\frac{y}{x}} = 5 \cdot 25^{y+1}. \end{cases}$

<u>Rozwiązanie</u>. Muszą być spełnione zastrzeżenia $x, y \neq 0$. Ponieważ zachodzą równoważności

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\frac{2x}{y}} = 3^{5-\frac{3y}{x}} \\ 5^{\frac{y}{x}} = 5^{1+2(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dfrac{x}{y} = 5 - 3\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{y}{x} = 1 + 2(y+1), \end{cases}$$

więc podstawiając $t = \dfrac{y}{x}$, przekształcamy ostatni układ do postaci, którą łatwo rozwiązujemy. Mamy

$$\begin{cases} \dfrac{2}{t} = 5 - 3t \\ t = 3 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 5t + 2 = 0 \\ t = 3 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2}{3} \vee t = 1 \\ y = \dfrac{t-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(y = -\frac{7}{6} \wedge x = \frac{y}{t} = -\frac{7}{4}\right) \vee \left(y = -1 \wedge x = \frac{y}{t} = -1\right).$$

Zatem układ ma dwa rozwiązania: $x = -\dfrac{7}{4}$, $y = -\dfrac{7}{6}$ oraz $x = -1$, $y = -1$.

11. Funkcje logarytmiczne

11.1. Logarytmy

Niech a będzie liczbą dodatnią, różną od jedności oraz b będzie liczbą dodatnią. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy liczbę x będącą wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b. A więc

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Przykłady. Obliczymy logarytmy niektórych liczb.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3.$

b) $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10.$

c) $\log_{3\sqrt{3}} 81 = x \Leftrightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^x = 81 \Leftrightarrow 3^{\frac{3}{2}x} = 3^4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}.$

Czyli $\log_{3\sqrt{3}} 81 = \frac{8}{3}$.

d) $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$ dla $a \in (0;\, 1) \cup (1;\, \infty)$.

e) $\log_{\sqrt{2}+1}(3 + 2\sqrt{2}) = x \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^2$

$\Leftrightarrow x = 2.$

Zatem $\log_{\sqrt{2}+1}\left(3 + \sqrt{2}\right) = 2$.

Niech a, b, c będą takimi liczbami, że wszystkie wyrażenia występujące w poniższych wzorach mają sens. Prawdziwe są wówczas następujące równości:

i) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;

ii) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

iii) $\log_a b^c = c \log_a b$;

iv) $a^{\log_a b} = b$;

v) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Logarytmy przy postawie 10 nazywają się *logarytmami dziesiętnymi* i w ich zapisie pomijamy podstawę, tzn. zamiast $\log_{10} a$, piszemy log *a*.

Przykłady. Zastosujemy podane wzory do przekształcenia wybranych wyrażeń do innych postaci.

a) $$\log\frac{a^2 b^5}{c^7} = \log\left(a^2 b^5\right) - \log c^7 = \left(\log a^2 + \log b^5\right) - \log c^7 =$$
$$2\log a + 5\log b - 7\log c.$$

Zauważmy, że lewa strona równości jest prawdziwa dla $a \neq 0$, $b > 0$, $c > 0$, a prawa strona wymaga mocniejszych założeń: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Cała równość jest prawdziwa oczywiście przy tych ostatnich założeniach.

b) $$\log\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{15}}} = \log\left(2\left(6\cdot 15^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{4}}\cdot 15^{\frac{1}{8}}\right) =$$
$$\log\left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \log\left(6^{\frac{1}{4}}\right) + \log\left(15^{\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log(2\cdot 3) + \frac{1}{8}\log(3\cdot 5) =$$
$$= \frac{2}{4}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2 + \frac{2}{8}\log 3 + \frac{1}{8}\log 3 + \frac{1}{8}\log 5 = \frac{3}{4}\log 2 + \frac{3}{8}\log 3 + \frac{1}{8}\log 5.$$

c) $$\log\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{b^2}}\right) = \log\left(a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{4}}\right) = \log a^{-\frac{2}{3}} + \log b^{-\frac{1}{2}} =$$
$$-\frac{2}{3}\log a - \frac{1}{2}\log b.$$

Analogicznie jak w przykładzie *a)*, lewa strona równości jest prawdziwa dla $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$, a prawa strona dla $a > 0$ oraz $b > 0$. Zatem cała równość zachodzi dla $a > 0$, $b > 0$.

d) $$10^{-\log 4} = 10^{\log\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.$$

e) $$10^{1-\log 2} = \frac{10}{10^{\log 2}} = \frac{10}{2} = 5.$$

f) $$\log_{\sqrt[3]{5}} 7\cdot\log_{\sqrt{7}} 125 = \frac{\log 7}{\frac{1}{3}\log 5}\cdot\frac{3\log 5}{\frac{1}{2}\log 7} = 18.$$

g) $\log_2 12 \cdot \log_{12} 22 \cdot \log_{22} 32 = \frac{\log 12}{\log 2} \cdot \frac{\log 22}{\log 12} \cdot \frac{\log 32}{\log 22} = \frac{5 \log 2}{\log 2} = 5.$

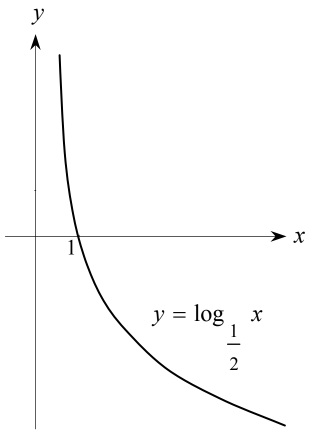
11.2. Podstawowe własności funkcji logarytmicznych

<u>*Funkcją logarytmiczną*</u> przy postawie a, gdzie $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$, nazywamy funkcję określoną wzorem

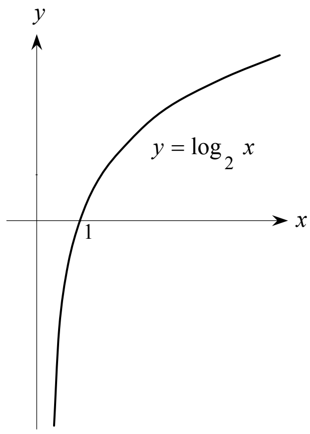
$$f(x) = \log_a x; \ x \in \mathbf{R}_+ .$$

Poniżej przedstawione zostały wykresy funkcji logarytmicznych dla podstaw $a \in (0; 1)$ oraz $a \in (1; \infty)$:

$0 < a < 1$



$a > 1$



Najważniejsze własności zdefiniowanej powyżej funkcji logarytmicznej są następujące:

i) Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, tj. $D_f = \mathbf{R}_+$. W konsekwencji w trakcie rozwiązywania równań i nierówności logarytmicznych konieczne jest robienie zastrzeżeń odnośnie argumentów pojawiających się funkcji logarytmicznych.

ii) Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

iii) Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa. Oznacza to, że jeżeli $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, to $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Równoważność ta jest wykorzystywana do rozwiązywania równań logarytmicznych.

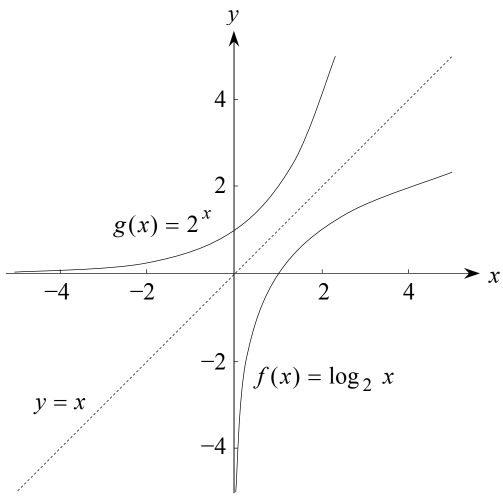
iv) Dla $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest funkcją rosnącą i gdy $0 < a < 1$ jest ona funkcją malejącą. W konsekwencji, jeżeli $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, to

$$a > 1 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 ;$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 .$$

Te z kolei równoważności mają kluczowe znaczenie dla rozwiązywania nierówności logarytmicznych.

Uwaga. Naszkicujmy w tym samym układzie współrzędnych prostą o równaniu $y = x$ oraz wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$:



Jeżeli porównany wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ z wykresem funkcji $g(x) = 2^x$, to zauważymy, że wykresy te są symetryczne względem osi symetrii $y = x$. Sugeruje to, że funkcje f i g są względem siebie wzajemnie odwrotne. Rzeczywiście tak jest, gdyż

$$\left(y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^y\right) \wedge \left(y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y\right) \wedge$$

$$D_f = g\left(D_g\right) = \mathbf{R}_+ \wedge f\left(D_f\right) = D_g = \mathbf{R}.$$

W ogólnym przypadku zachodzi następujący fakt:

Jeżeli $a \in (0;\, 1) \cup (1;\, \infty)$, to dla funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \log_a x$ zachodzą zależności:

$$f^{-1} = g \wedge g^{-1} = f .$$

11.3. Równania i nierówności logarytmiczne

Równaniem logarytmicznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma x występuje w wyrażeniach logarytmowanych lub podstawach logarytmów.

Przykłady. Prześledzimy na wybranych przykładach problemy związane z rozwiązywaniem równań logarytmicznych.

a) $(*)$ $\log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{1}{2}-\log x$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od zastrzeżeń:

$$\frac{1}{2}+x>0 \wedge x>0 \Rightarrow x>0.$$

Dla $x>0$ mamy:

$$(*) \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{\frac{1}{2}}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+x=\frac{1}{2x} \Leftrightarrow x+2x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+x\right)+\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow x(x+1)+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że możliwość obustronnego opuszczenia znaku logarytmu, z której skorzystaliśmy, jest konsekwencją różnowartościowości funkcji logarytmicznej. Liczba -1 będąca drugim rozwiązaniem równania kwadratowego nie należy do dziedziny równania.

b) $(*)$ $x^{\log x-1}=100$.

Rozwiązanie. Zastrzeżenie: $x>0$. Dzięki różnowartościowości funkcji logarytmicznej możemy obie strony równania $(*)$ zlogarytmować:

$$(*) \Leftrightarrow \log x^{\log x-1}=\log 100 \Leftrightarrow (\log x-1)\log x=2.$$

Podstawiamy $\log x=t$:

$$(t-1)t=2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=2.$$

Wracając do niewiadomej x, otrzymujemy

$$\log x=-1 \vee \log x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{10} \vee x=100.$$

Obie wyznaczone liczby należą do dziedziny równania, wiec są jego rozwiązaniami.

c) $(*)$ $x-\log 5=x\log 5+2\log 2-\log\left(1+2^x\right)$.

Rozwiązanie. Równanie ma sens dla wszystkich x. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow \log 10^x - \log 5 = \log 5^x + \log 4 - \log(1+2^x) \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{10^x}{5} = \log\frac{5^x \cdot 4}{1+2^x} \Leftrightarrow \frac{5^x \cdot 2^x}{5} = \frac{5^x \cdot 4}{1+2^x} \;\Big|\; :5^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{5} = \frac{4}{1+2^x} \Leftrightarrow$$

$$2^x(1+2^x) = 20 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2^x - 20 = 0.$$

Podstawiając $2^x = t$, otrzymujemy

$$t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -5 \vee x = 4.$$

Stąd $2^x = -5 \vee 2^x = 4$. Pierwsze z równań jest sprzeczne, drugie daje rozwiązanie $x = 2$.

d) $\log(x-3) - \log(2-3x) = 1.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia: $x - 3 > 0 \wedge 2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x > 3 \wedge x < \frac{2}{3}$.

Otrzymaliśmy koniunkcję warunków sprzecznych ze sobą i dlatego dziedziną równania jest zbiór pusty. Równanie takie nie może mieć rozwiązań.

e) (∗) $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia: $x - 5 > 0 \wedge 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 5 \wedge x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > 5$.

Mamy dla $x > 5$:

$$(*) \Leftrightarrow \log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + \log 10 = \log 3 + \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3}\right) = \log 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}\cdot\sqrt{2x-3} = 3 \;\Big|\; (\;)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x-3) = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13+11}{4} = 6,$$

gdyż $x = \frac{13-11}{4} = \frac{1}{2} < 5$.

f) (∗) $\log_2 x + \log_8 x = 8$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenie: $x > 0$. Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 8 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 8 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\log_2 x = 8 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64.$$

Znalezione rozwiązanie jest zgodne z zastrzeżeniem.

g) (∗) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Muszą być spełnione warunki:

$$x>0 \wedge \log_2 x>0 \wedge \log_3 \log_2 x>0.$$

Powyższe zastrzeżenia są nieco skomplikowane, więc rozwiążemy najpierw równanie, a później sprawdzimy, czy znalezione rozwiązanie je spełnia. Mamy

$$(*) \Leftrightarrow \log_3 \log_2 x = 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \log_3 \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 3^2 \Leftrightarrow$$
$$\log_2 x = 9 \Leftrightarrow x = 2^9.$$

Łatwo stwierdzamy, że liczba $x=2^9$ faktycznie spełnia wszystkie zastrzeżenia.

h) $(*)$ $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2.$

Rozwiązanie. Zastrzeżenia: $x>0$ i $x \neq 1$. Zatem

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - \frac{9}{4} = \left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}\log_x{}^2 5 - \frac{3}{2}\log_x 5 + \frac{5}{4} = 0.$$

Podstawiając $\log_x 5 = t$, otrzymujemy

$$\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5.$$

Powrót do niewiadomej x daje:

$$\log_x 5 = 1 \vee \log_x 5 = 5 \Leftrightarrow x = 5 \vee x^5 = 5 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = \sqrt[5]{5}.$$

Oba znalezione rozwiązania spełniają zastrzeżenia.

Nierównością logarytmiczną nazywamy nierówność, w której niewiadoma x występuje w wyrażeniach logarytmowanych lub w podstawach logarytmów.

Przykłady. Rozwiążemy serię nierówności logarytmicznych.

a) $(*)$ $\dfrac{1}{\log x} + \dfrac{1}{1-\log x} > 1.$

Rozwiązanie. Zastrzeżenia:

$$x>0 \wedge \log x \neq 0 \wedge \log x \neq 1 \Leftrightarrow x>0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow$$
$$x \in (0;1) \cup (1;10) \cup (10;\infty).$$

Podstawiamy $\log x = t$, przy czym musimy zastrzec, że $t \neq 0$ i $t \neq 1$. Wówczas

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} > 1 \Big| \cdot t^2(1-t)^2 \Leftrightarrow t(1-t)^2 + t^2(1-t) > t^2(1-t)^2 \Leftrightarrow$$
$$t(1-t)\big((1-t) + t - t(1-t)\big) > 0 \Leftrightarrow t(1-t)\left(t^2 - t + 1\right) > 0 \Leftrightarrow$$
$$t(1-t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1,$$

gdyż czynnik $t^2 - t + 1$ jest stale dodatni. Stąd

$$0 < \log x < 1 \Leftrightarrow \log 1 < \log x < \log 10 \Leftrightarrow 1 < x < 10.$$

Zbiorem rozwiązań jest wiec przedział $(1;\ 10)$.

b) $(*)$ $\quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4-x^2}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia:

$$x+1>0 \wedge 4-x^2>0 \Leftrightarrow x>-1 \wedge -2<x<2 \Leftrightarrow -1<x<2.$$

Korzystając z faktu, że rozpatrywana funkcja logarytmiczna jest malejąca oraz, że w rozpatrywanym przedziale wrażenie $4-x^2$ jest dodatnie, otrzymujemy dla $x \in (-1;\ 2)$:

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x^2}} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{4-x^2}} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4-x^2} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$9x+9 > 4-x^2 \Leftrightarrow x^2+9x+5>0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-9+\sqrt{61}}{2};\ 2\right).$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $(*)$ jest przedział $\left(\frac{-9+\sqrt{61}}{2};\ 2\right)$.

c) $(*)$ $\quad \log_2(x+1) + \log_{x+1} 2 \le \frac{5}{2}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia: $x+1>0 \wedge x+1 \ne 1 \Leftrightarrow x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ \infty)$.

Mamy

$$(*) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \frac{1}{\log_2(x+1)} \le \frac{5}{2},$$

Podstawiając $\log_2(x+1) = t$, otrzymujemy:

$$\left[t + \frac{1}{t} \le \frac{5}{2} \ \Big| \cdot 2t^2\right] \Leftrightarrow 2t^3 + 2t \le 5t^2 \Leftrightarrow t\left(2t^2 - 5t + 2\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$2t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-2) \le 0 \Leftrightarrow t < 0 \vee \frac{1}{2} \le t \le 2.$$

Dla $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ otrzymujemy:

$$\log_2(x+1) < 0 \vee \frac{1}{2} \le \log_2(x+1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2(x+1) < \log_2 1 \vee \log_2 \sqrt{2} \le \log_2(x+1) \le \log_2 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 < 1 \vee \sqrt{2} \le x+1 \le 4 \Leftrightarrow x < 0 \vee \sqrt{2}-1 \le x \le 3.$$

Z uwagi na zastrzeżenia stwierdzamy, że $x \in (-1;\ 0) \cup \left[\sqrt{2}-1;\ 3\right]$.

d) (*) $\quad \dfrac{\log(3x+1)}{\log(2x)} > 0$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia:

$$3x+1>0 \wedge x>0 \wedge \log(2x)\neq 0 \iff x>-\frac{1}{3} \wedge x>0 \wedge x\neq\frac{1}{2} \iff$$

$$x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ \infty\right).$$

Rozwiązujemy nierówność w przedziałach składowych jej dziedziny.

1^0 $x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. Wtedy $\log(2x)<0$, wobec czego

$$(*) \iff \log(3x+1)<0 \iff 3x+1<1 \iff x<0.$$

W rozpatrywanym przedziale ostatnia nierówność nie posiada rozwiązań.

2^0 $x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. Teraz $\log(2x)>0$, więc

$$(*) \iff \log(3x+1)>0 \iff 3x+1>1 \iff x>0.$$

Wszystkie liczby z rozpatrywanego przedziału spełniają ostatnią nierówność.

Zbiorem rozwiązań nierówności (*) jest więc przedział $\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

e) (*) $\quad \log_{9x^2}\left(-x^2+2x+6\right)\leq\frac{1}{2}$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zastrzeżenia:

$$9x^2>0 \wedge 9x^2\neq 1 \wedge -x^2+2x+6>0 \iff$$

$$x\neq 0 \wedge |x|\neq\frac{1}{3} \wedge 1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7} \iff$$

$$x\in\left(1-\sqrt{7};\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)\cup\left(0,\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ 1+\sqrt{7}\right).$$

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$(*) \iff \frac{\log\left(-x^2+2x+6\right)}{\log\left(9x^2\right)}\leq\frac{1}{2}.$$

Dalej rozpatrzymy dwa przypadki.

1^0 $x\in\left(1-\sqrt{7};\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ 1+\sqrt{7}\right)$. Wtedy $\log\left(9x^2\right)>0$, skąd

$$(*) \iff \log\left(-x^2+2x+6\right)\leq\frac{1}{2}\log\left(9x^2\right) \iff \log\left(-x^2+2x+6\right)\leq\log|3x| \iff$$

$$-x^2+2x+6\leq 3|x|.$$

W przedziale $\left(1-\sqrt{7}\,;\,-\frac{1}{3}\right)$ otrzymujemy nierówność

$$x^2-5x-6\ge 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<x\le -1,$$

a w przedziale $\left(\frac{1}{3};1+\sqrt{7}\right)$ nierówność

$$x^2+x-6\ge 0 \Leftrightarrow 2\le x<1+\sqrt{7}\,.$$

2^0 $x\in\left(-\frac{1}{3};\,0\right)\cup\left(0;\,\frac{1}{3}\right)$. Wtedy $\log\left(9x^2\right)<0$, skąd

$$(*)\Leftrightarrow \log\left(-x^2+2x+6\right)\ge\frac{1}{2}\log\left(9x^2\right)\Leftrightarrow -x^2+2x+6\ge 3|x|\,.$$

W przedziale $\left(-\frac{1}{3};\,0\right)$ otrzymujemy nierówność

$$x^2-5x-6\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<0\,,$$

a w przedziale $\left(0;\,\frac{1}{3}\right)$ nierówność

$$x^2+x-6\le 0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{3}.$$

W konsekwencji zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów:

$$\left(1-\sqrt{7}\,;\,-1\right]\cup\left(-\frac{1}{3};\,0\right)\cup\left(0;\,\frac{1}{3}\right)\cup\left[2;\,1+\sqrt{7}\right).$$

Przykłady. Wyznaczymy dziedziny funkcji.

a) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\log_2\left(x^2-5x+6\right)\right)$.

<u>Rozwiązanie</u>. Muszą być spełnione zastrzeżenia:

$$\begin{cases}x^2-5x+6>0\\ 1-\log_2\left(x^2-5x+6\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\vee x>3\\ \log_2\left(x^2-5x+6\right)<\log_2 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x<2\vee x>3\\ x^2-5x+6<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\vee x>3\\ x^2-5x+4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\vee x>3\\ 1<x<4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$x\in(1;\,2)\cup(3;\,4).$$

A więc $D_f=(1;\,2)\cup(3;4)$.

b) $f(x)=\sqrt{\log_x(3-x)}\,.$

<u>Rozwiązanie</u>. Muszą być spełnione warunki

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 3 - x > 0 \\ \log_x (3 - x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x < 3 \\ \dfrac{\log(3 - x)}{\log x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee 1 < x < 3 \\ \dfrac{\log(3 - x)}{\log x} \geq 0 . \end{cases}$$

Rozpatrzymy dwa przypadki.

1^0 $0 < x < 1$. Wtedy $\log x < 0$, skąd

$$\log(3 - x) \leq 0 \Leftrightarrow \log(3 - x) \leq \log 1 \Leftrightarrow 3 - x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x .$$

W rozważanym przypadku otrzymana nierówność końcowa nie może być spełniona.

2^0 $1 < x < 3$. Wtedy $\log x > 0$, skąd

$$\log(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow \log(3 - x) \geq \log 1 \Leftrightarrow 3 - x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 2 .$$

Zatem $1 < x \leq 2$.

Ostatecznie stwierdzamy, że $D_f = (1;\ 2]$.

12. Ciągi liczbowe

12.1. Ogólne własności ciągów

<u>*Ciągiem nieskończonym*</u> nazywamy funkcję określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych dodatnich. Jeżeli np. symbol *a* oznacza tę funkcję, to jej wartość $a(n)$ dla argumentu n nazywamy n-tym <u>*wyrazem ciągu*</u> i oznaczamy symbolem a_n. Jeżeli wyrazy ciągu są liczbami, to taki ciąg nazywamy <u>*ciągiem liczbowym*</u>.

Analogicznie funkcję postaci $a:\{1,\,2,\,\ldots\,,k\}\to\mathbf{R}$ nazywamy <u>*ciągiem skończonym*</u> *k*-<u>*wyrazowym*</u>.

Zgodnie z tradycją funkcję określającą ciąg o n-tym wyrazie a_n oznaczamy symbolem (a_n) lub $(a_n)_{n=1}^{k}$, jeżeli chcemy podkreślić, że jest to ciąg skończony *k*-wyrazowy.

Uwaga. Czasami przyjmuje się za dziedzinę ciągu (a_n) zbiór wszystkich liczb naturalnych i wówczas pierwszym wyrazem takiego ciągu jest a_0.

Ciągi liczbowe możemy określić:

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np.

$$a_n=\frac{2+n}{3n},\ b_n=n^2,\ c_n=\sqrt{n+1};$$

2. rekurencyjnie, np.

$$a_1=1 \text{ i } a_n=2{a_{n-1}}^2+3 \text{ dla } n>1;$$

3. opisem słownym, np.

„c_n oznacza n - tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$ ”

Ważną klasę ciągów stanowią <u>*ciągi monotoniczne*</u>. Są to ciągi, które są funkcjami monotonicznymi. Ponieważ w zbiorze liczb naturalnych każda liczba ma swój następnik, więc poszczególne definicje dają się przeformułować w poniższy sposób.

Ciąg (a_n) nazywamy:

<u>*rosnącym*</u> wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(a_n<a_{n+1}\right);$$

malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(a_n > a_{n+1}\right);$$
niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(a_n \le a_{n+1}\right);$$
nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(a_n \ge a_{n+1}\right).$$

W analogiczny sposób wprowadza się pojęcie ograniczoności ciągu. A mianowicie, ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, jeżeli zbiór jego wyrazów jest ograniczony, tzn., gdy
$$\underset{m,M\in\mathbf{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(m \le a_n \le M\right).$$
Jeżeli zachodzi tylko jedna z powyższych nierówności, to ciąg nazywamy, odpowiednio, ograniczonym z góry lub ograniczonym z dołu.

Przykłady. a) Ciąg (a_n) o wyrazach zdefiniowanych wzorem
$$a_n = 2n+1;\ n\in\mathbf{N}_+,$$
jest ciągiem rosnącym, ograniczonym z dołu i nieograniczonym z góry.

b) Ciąg (b_n) o wyrazach
$$b_n = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right);\ n\in\mathbf{N}_+,$$
nie jest ciągiem monotonicznym, ale jest ciągiem ograniczonym.

c) Ciąg (c_n), gdzie
$$c_n = (-2)^n;\ n\in\mathbf{N},$$
nie jest ciągiem monotonicznym, jak również nie jest ciągiem ograniczonym, zarówno z dołu, jak i z góry.

d) Pokażemy dla przykładu, że ciąg (d_n) zdefiniowany następująco:
$$d_n = \frac{n}{n+2};\ n\in\mathbf{N},$$
jest ciągiem rosnącym.

Rozwiązanie. Mamy
$$d_{n+1} - d_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)-(n+3)n}{(n+3)(n+2)} = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0,$$

skąd $d_{n+1} > d_n$ dla każdego $n\in\mathbf{N}$.

12.2. Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne

Ciąg (a_n), skończony lub nieskończony złożony z co najmniej 3 wyrazów, nazywamy *ciągiem arytmetycznym*, gdy każdy jego wyraz, oprócz pierwszego, powstaje poprzez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r. Liczbę tą nazywamy *różnicą ciągu arytmetycznego*.

Przykład. Ciąg określony wzorem
$$a_n = \frac{2n-1}{3}; \; n \in \mathbf{N}_+,$$
jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{3}$ i różnicy $r = \frac{2}{3}$. Rzeczywiście, dla dowolnego n mamy
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{3} - \frac{2n-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Poniższe twierdzenia opisują własności ciągu arytmetycznego:

Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r. Wtedy

i) dla każdego n prawdziwy jest wzór
$$a_{n+1} = a_1 + nr;$$
ii) ciąg (a_n) jest:

rosnący, gdy $r > 0$;

malejący, gdy $r < 0$;

stały, gdy $r = 0$.

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy:

i) każdy wyraz tego ciągu, oprócz pierwszego i ewentualnie ostatniego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich;

ii) suma n pierwszych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

W skończonym n-wyrazowym ciągu arytmetycznym (a_n) suma każdych dwóch wyrazów jednakowo oddalonych od początku i od końca ciągu jest stała i wynosi $a_1 + a_n$.

Przykład. Kamień spada na Ziemię z wysokości 210 metrów. Zbadamy, ile metrów przebywa kamień w ostatniej sekundzie, jeżeli prędkość początkowa wynosi 5 m/s, a przyspieszenie ziemskie 10 m/s ^{2} .
<u>*Rozwiązanie.*</u> Przypomnijmy wzór na drogę w ruch jednostajnie przyspieszonym:

$$s_t = v_0\, t + \frac{g\, t^2}{2},$$

gdzie s_t jest drogą przebytą w czasie *t*, a v_0 – prędkością początkową, *g* – przyspieszeniem ziemskim.

Spadający kamień w trakcie *n*-tej sekundy przebędzie drogę $s_n - s_{n-1}$ wynoszącą:

$$s_n - s_{n-1} = \left(v_0\, n + \frac{g\, n^2}{2} \right) - \left(v_0\, (n-1) + \frac{g\, (n-1)^2}{2} \right) = v_0 - \frac{g}{2} + g\, n.$$

Dla $v_0 = 5$ [m/s] i $g = 10$ [m/s ^{2}] otrzymujemy:

$$s_n - s_{n-1} = 10\, n\,.$$

Ciąg (a_n), gdzie $a_n = s_n - s_{n-1}$, jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 10$ i $a_1 = 10$. Jeżeli w czasie *n* sekund kamień przebył drogę 210 [m], to wówczas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 210 \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 210.$$

Podstawiając podane wartości v_0 i *g*, otrzymujemy równanie:

$$\frac{10 + 10\, n}{2} \cdot n = 210 \Leftrightarrow 5\, n\; (n+1) = 210 \Leftrightarrow n\, (n+1) = 42 \Rightarrow n = 6\,.$$

W czasie ostatniej, czyli szóstej sekundy, kamień przebędzie drogę:

$$a_6 = 6 \cdot 10 = 60 \text{ [m]}.$$

Ciąg (a_n), skończony lub nieskończony złożony z co najmniej 3 wyrazów, nazywamy <u>*ciągiem geometrycznym*</u>, gdy każdy jego wyraz, oprócz pierwszego, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i stałej liczby *q*. Liczbę tą nazywamy <u>*ilorazem ciągu geometrycznego*</u>.

Przykład. Ciąg określony wzorem

$$a_n = 2^n;\; n \in \mathbf{N}_+,$$

jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i ilorazie $q = 2$.

Poniższe twierdzenia opisują własności ciągu geometrycznego:

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q. Wtedy

i) dla każdego n prawdziwy jest wzór $a_{n+1} = a_1 q^n$;

ii) ciąg (a_n) jest:

rosnący, gdy $a_1 > 0$ i $q > 1$ lub $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$;

malejący, gdy $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ lub $a_1 < 0$ i $q > 1$;

stały, gdy $a_1 = 0$ lub $q = 1$;

iii) suma n pierwszych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}; & q \neq 1 \\ n\,a_1; & q = 1. \end{cases}$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu tego ciągu, oprócz pierwszego i ewentualnie ostatniego, jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich.

Przykład. Lokaty pieniężne składane są w bankach na ogół na tzw. *procent składany*. Procentem składanym nazywamy sposób oprocentowania lokaty pieniężnej, polegający na tym, że po ustalonym okresie czasu do złożonego kapitału dolicza się odsetki od niego i w następnym okresie oprocentowuje się kapitał wraz z odsetkami. Doliczanie odsetek do lokaty, to *kapitalizacja odsetek*, a okres, po którym się je dolicza – *okres kapitalizacji*. Jeżeli kapitał wynosi K, a oprocentowanie p% za okres kapitalizacji, to po pierwszym okresie oszczędzania będzie on zwiększony do

$$K_1 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Kwoty, które znajdują się na koncie po kolejnych okresach kapitalizacji, tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $K_1 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ i ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$. Wynika stąd, że po n okresach kapitalizacji na koncie będzie suma

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

12.3. Granice ciągów liczbowych

Mówimy, że ciąg (a_n) jest <u>*zbieżny do granicy skończonej*</u> a, co zapisujemy: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ lub $a_n \to a$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbf{N}_+}{\exists}\ \underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall}\left(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right).$$

Ponieważ nierówność $|a_n - a| < \varepsilon$ oznacza, że $a_n \in (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, więc obrazowo możemy powiedzieć, że ciąg (a_n) ma granicę skończoną a, jeżeli dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu leżą dowolnie blisko liczby a, albo wyrazy ciągu o dostatecznie dużych wskaźnikach różnią się od liczby a dowolnie mało.

Przykład. Niech

$$a_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n - 4}$$

dla $n \in \mathbf{N}_+$. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Ponieważ

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n^2-2n+1}{2n^2+n-4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2-4n+2-2n^2-n+4}{2\left(2n^2+n-4\right)}\right| = \left|\frac{6-5n}{2\left(2n^2+n-4\right)}\right|,$$

więc dla $n \geq 2$ mamy

$$\left|\frac{6-5n}{2\left(2n^2+n-4\right)}\right| = \frac{5n-6}{2\left(n^2+n+(n^2-4)\right)} < \frac{5n-0}{2\left(n^2+0+0\right)} = \frac{5}{2n}.$$

Jeżeli ε jest dowolną liczbą dodatnią, to przyjmując $n_0 = \max\left\{\left[\frac{5}{2\varepsilon}\right], 2\right\}$, dla $n \in \mathbf{N}_+$ takich, że $n \geq n_0$ zachodzą nierówności:

$$n \geq 2 \wedge n > \frac{5}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq 2 \wedge \frac{5}{2n} < \varepsilon.$$

Przypomnijmy, że $\left[\frac{5}{2\varepsilon}\right]$ oznacza tu część całkowitą liczby $\frac{5}{2\varepsilon}$. Dlatego więc

$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, gdy $n > n_0$. Dowodzi to, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

O ciągu, który nie jest zbieżny do granicy skończonej, mówimy, że jest <u>*rozbieżny*</u>. Spośród takich ciągów wyróżnimy ciągi posiadające granice nieskończone. A mianowicie, przyjmujemy następujące definicje:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbf{N}_+}{\exists}\ \underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall} \left(n > n_0 \Rightarrow a_n > M\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbf{N}_+}{\exists}\ \underset{n\in\mathbf{N}_+}{\forall} \left(n > n_0 \Rightarrow a_n < M\right).$$

Oznacza to, że ciąg jest rozbieżny do ∞, jeżeli dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są dowolnie duże. Analogicznie rozumiemy pojęcie rozbieżności ciągu do $-\infty$.

Przykład. Wykażemy, że ciąg (a_n), gdzie

$$a_n = q^n;\ n\in\mathbf{N},\ q > 1,$$

jest rozbieżny do ∞.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Niech M będzie dowolną liczbą rzeczywistą; bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że jest to liczba dodatnia. Ponieważ $\log q > 0$, więc zachodzą równoważności:

$$q^n > M \Leftrightarrow n\log q > \log M \Leftrightarrow n > \frac{\log M}{\log q}.$$

Przyjmując $n_0 = \left[\frac{\log M}{\log q}\right]$, stwierdzamy, że jeżeli $n > n_0$, to $a_n > M$.

Oznacza to, że faktycznie $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

W ogólnym przypadku prawdziwe jest następujące twierdzenie:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{nie istnieje,} & \text{gdy } q \le -1, \\ 0, & \text{gdy } -1 < q < 1, \\ 1, & \text{gdy } q = 1, \\ \infty, & \text{gdy } q > 1. \end{cases}$$

Zachodzą następujące własności ciągów zbieżnych:

Każdy ciąg zbieżny posiada dokładnie jedną granicę.

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Ciągi różniące się skończoną liczbą wyrazów są jednocześnie zbieżne (i mają tę samą granicę) lub są jednocześnie rozbieżne.

Załóżmy, że ciągi (a_n) (b_n) są zbieżne. Wówczas ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są także zbieżne oraz zachodzą równości:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest także zbieżny i zachodzi równość:

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Jeżeli dla prawie wszystkich n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n$ oraz ciągi liczbowe (a_n) i (b_n) są zbieżne, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Jeżeli dla prawie wszystkich n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, gdzie $g \in \mathbf{R}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Jeżeli $a > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$.

Uwagi. a) Ciąg ograniczony nie musi być zbieżny. Np. taką własność ma ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_n = (-1)^n; \ n \in \mathbf{N}_+.$$

b) Fakt spełnienia nierówności ostrej

$$a_n < b_n$$

przez prawie wszystkie wyrazy ciągów zbieżnych (a_n) i (b_n) nie gwarantuje spełnienie takiej samej nierówności przez granice tych ciągów. Zauważmy przykładowo, że

$$-\frac{1}{n} < \frac{1}{n};\; n \in \mathbf{N}_+,$$

a mimo to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right).$$

Przykłady. Obliczymy granice wybranych ciągów.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 5n}{1 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{n}}{\frac{1}{n^2} - 1} = -2.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1} - 7}{16^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 9^n - 7}{16^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^n - 7 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0.$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n^2 + 2n - 1\right)}{n} = 0,$$

gdyż

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin\left(n^2 + 2n - 1\right)}{n} \le \frac{1}{n};\; n \in \mathbf{N}_+ \text{ oraz } -\frac{1}{n} \to 0 \text{ i } \frac{1}{n} \to 0.$$

e) Niech ciąg (a_n) będzie zdefiniowany w sposób rekurencyjny:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n\,(2 - a_n);\; n \in \mathbf{N}_+. \end{cases}$$

Wykażemy, że ciąg jest zbieżny, a następnie znajdziemy jego granicę.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$a_n(2-a_n)=1-(1-a_n)^2,$$

skąd przy pomocy indukcji stwierdzamy, że

$$0<a_n<1;\ n\in\mathbf{N}_+.$$

Zatem ciąg (a_n) jest ograniczony. Ponadto $2-a_n>1$, więc

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n)>a_n;\ n\in\mathbf{N}_+,$$

tzn. ciąg (a_n) jest także rosnący. Jako ciąg monotoniczny i ograniczony rozważany ciąg musi mieć skończoną granicę $g\in(0;1]$. Przechodząc po obu stronach równości

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n)$$

z n do ∞, otrzymujemy równość

$$g=g(2-g)\Leftrightarrow g^2-g=0\Rightarrow g=1.$$

A więc $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

12.4. Szereg geometryczny

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Z ciągiem tym możemy skojarzyć ciąg (S_n), gdzie $S_n=a_1+a_2...+a_n$. Sumę S_n nazywamy n-tą sumą częściową początkowych wyrazów ciągu (a_n). Jeżeli ciąg (S_n) jest zbieżny do granicy S, to mówimy, że S jest sumą nieskończoną wyrazów ciągu liczbowego (a_n) lub sumą szeregu $a_1+a_2+...+a_n+...$, co zapisujemy

$$S=a_1+a_2+...+a_n+...$$

Używa się także terminologii: szereg $a_1+a_2+...+a_n+...$ jest zbieżny do S.

W praktyce stwierdzenie, czy istnieje nieskończona suma wyrazów danego ciągu i ile ona wynosi jest zagadnieniem trudnym. Ważnym wyjątkiem jest przypadek ciągu geometrycznego. Załóżmy więc, że (a_n) jest takim ciągiem o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q. Jeżeli $q=1$, to ciąg jest stały i ciąg sum częściowych jest rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$, w zależności od znaku a_1. Załóżmy więc, że $q\neq 1$. Z poprzednich rozważań wiemy, że suma częściowa dana jest wówczas wzorem

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q};\ n\in\mathbf{N}_+.$$

Ponieważ ciąg (q^n) jest rozbieżny dla $|q|>1$ i $q=-1$, a zbieżny dla $|q|<1$, więc ciąg (S_n) jest zbieżny tylko w tym ostatnim przypadku. Ponadto wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}.$$

Otrzymujemy więc następujące twierdzenie:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q spełniającym warunek $|q|<1$, to szereg geometryczny $a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots$ jest zbieżny i jego suma wynosi $S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

Przykłady. ***a)*** Rozważmy pręt o długości 1. W pierwszym kroku odetnijmy od jednego z jego końców odcinek o długości $\frac{1}{2}$, w drugim kroku z pozostałej części o długości $\frac{1}{2}$ odetnijmy w taki sam sposób odcinek o długości $\frac{1}{4}$. Teoretycznie możemy to postępowanie kontynuować w nieskończoność odcinając za każdym razem fragment o długości równej połowie pozostałej części. Suma długości odciętych odcinków pręta będzie wynosiła wówczas

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Zgodnie z poprzednim twierdzeniem

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

co jest zgodne z intuicją.

b) Szereg geometryczny jest wygodnym narzędziem do znajdowania postaci ułamkowej liczby zapisanej jako ułamek okresowy. Niech $x=3,(25)$. Zapis ten oznacza, że

$$x=3+\left(0{,}25+0{,}0025+0{,}000025+\ldots\right).$$

Wyrażenie w nawiasie jest nieskończoną sumą ciągu geometrycznego o wyrazie początkowym $a_1=0{,}25$ i ilorazie $q=0{,}01$. Z twierdzenia o szeregu geometrycznym wynika, że

$$0{,}25+0{,}0025+0{,}000025+\ldots=\frac{0{,}25}{1-0{,}01}=\frac{25}{99}.$$

Zatem

$$x = 3 + \frac{25}{99} = \frac{322}{99}.$$

c) W matematyce wyższej ważną rolę odgrywa zbiór Cantora. Aby go skonstruować, odcinek o długości 1 dzielimy na trzy równe części i usuwamy środkowy odcinek otwarty (bez końców). Długość usuniętego odcinka oznaczamy przez a_1 i traktujemy jako pierwszy wyraz tworzonego pewnego ciągu. Następnie każdy z pozostałych odcinków ponownie dzielimy na trzy części i usuwamy otwarte odcinki środkowe. Sumę długości tych usuniętych odcinków oznaczamy przez a_2. Kontynuując proces w analogiczny sposób w nieskończoność, usuniemy z wyjściowego odcinka nieskończoną liczbę odcinków, a pozostałe punkty utworzą nieskończony zbiór, który nazywa się *zbiorem Cantora*. Obliczmy sumę nieskończoną wyrazów ciągu (a_n). Widzimy, że

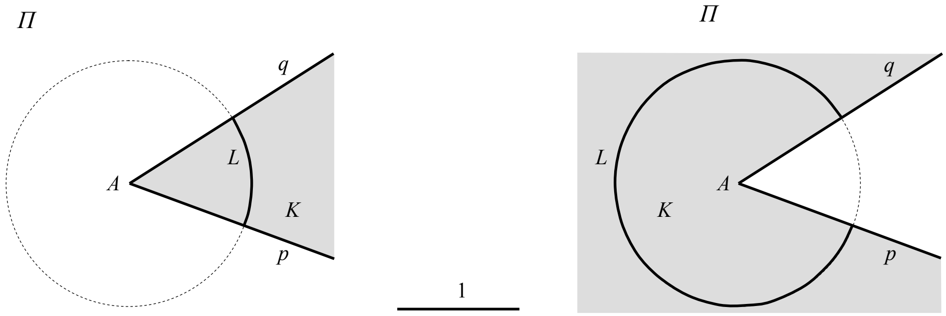
$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = 2 \cdot \frac{1}{9},\ a_3 = 4 \cdot \frac{1}{27}, \dots, a_n = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \ \dots$$

A więc (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{3}$ i ilorazie $q = \frac{2}{3}$. Ponieważ wartość bezwzględna ilorazu jest mniejsza od 1, więc istnieje suma nieskończona i wynosi ona $S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$. A więc suma długości usuniętych odcinków równana się długości odcinka wyjściowego, mimo, że część pozostała tj. zbiór Cantora składa się z nieskończonej liczby punktów!

13. Trygonometria

13.1. Kąt płaski i jego miary

Przypomnijmy na wstępie, że jeżeli dane są dwie półproste p, q o wspólnym początku A leżące w ustalonej płaszczyźnie Π, to każdą z części, na jakie dzielą one tę płaszczyznę, wziętą wraz z tymi półprostymi, nazywa się *kątem płaskim o ramionach* p, q *i wierzchołku* A. Używając języka współczesnej matematyki, można powiedzieć, że kąt płaski jest trójką postaci (p, q, K), gdzie p, q są półprostymi o wspólnym początku A, K jest podzbiorem płaszczyzny Π, w której zawarte są półproste p oraz q. Ponadto $p \subset K$, $q \subset K$ oraz brzeg zbioru K równa się zbiorowi $p \cup q$. Ilustruje to poniższy rysunek:



Aby zdefiniować miarę kąta płaskiego, ustalmy odcinek jednostkowy i naszkicujmy okrąg o środku A i promieniu 1. Częścią wspólną tego okręgu i kąta K jest łuk L (patrz rysunek powyżej). Idea mierzenia kąta K polega na porównaniu długości $|L|$ łuku L z długością analogicznego łuku dla ustalonego kąta wzorcowego, np. kąta półpełnego, i przyjęciu jako miary kąta K liczby równej proporcjonalnej części miary kąta wzorcowego. W matematyce stosuje się głównie dwie miary:

a) miarę w stopniach, w której kąt półpełny ma 180 stopni, w zapisie 180^0;

b) miarę łukową, w której kąt półpełny ma π tzw. *radianów*, w zapisie π.

Formalnie w obu powyższych przypadkach miary $|K|$ kąta K wyrażają się wzorami:

ad *a)* $|K| = \dfrac{|L|}{\pi} \cdot 180^0$; ad *b)* $|K| = \dfrac{|L|}{\pi} \cdot \pi = |L|$.

Drugi z podanych wzorów uzasadnia, dlaczego zdefiniowana przez niego miara nazywa się łukową. Dodajmy, że stosuje się również następujące jednostki do mierzenia kątów: *gradusy* w geodezji, *rumby* w żegludze i żeglarstwie, *tysięczne* w wojsku. Poniższa tabela podaje miary przykładowego kąta pełnego w poszczególnych jednostkach:

stopnie	*radiany*	*gradusy*	*rumby*	*tysięczne*
360	2π	400	32	6400

Mówiąc o różnych jednostkach miary kąta musimy dodać, że 1^0 dzieli się na 60 minut, w zapisie $60'$, a 1 minuta kątowa to z kolei 60 sekund kątowych, w zapisie $60''$. Przykładowo, zapis $37^0 51' 28''$ oznacza miarę kąta równą 37 stopni + 51 minut + 28 sekund.

W dalszym ciągu skupimy się na kwestii przeliczania jednostek między miarą stopniową a miarą łukową zwaną także *miarą naturalną*. W pewnych przypadkach szczególnych możemy skorzystać z tabeli:

stopnie	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	360^0
radiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Przykład. Wyrazimy w radianach miary kątów o wartościach 15^0, $67{,}5^0$, 210^0, 315^0.

Rozwiązanie. Mamy

$$15^0 = \frac{1}{2}\cdot 30^0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12};$$

$$67{,}5^0 = 45^0 + 22{,}5^0 = \frac{3}{2}\cdot 45^0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi;$$

$$101{,}25^0 = 90^0 + \frac{90^0}{8} = \frac{9}{8}\cdot 90^0 = \frac{9}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{9}{16}\pi;$$

$$210^0 = 180^0 + 30^0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi;$$

$$315^0 = 360^0 - 45^0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi.$$

Przykład. Przeliczymy na stopnie następujące ilości radianów: 1, $\frac{11}{12}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{11}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$1 = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = \frac{1}{\pi} \cdot 180^0 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx 57{,}2958^0;$$

$$\frac{11}{12}\pi = \frac{11}{12} \cdot 180^0 = 11 \cdot 15^0 = 165^0;$$

$$\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2} \cdot 180^0 = 270^0;$$

$$\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5} \cdot 180^0 = 2 \cdot 36^0 = 72^0;$$

$$\frac{4}{11} = \frac{4}{11\pi} \cdot \pi = \frac{4}{11\pi} \cdot 180^0 = \left(\frac{720}{11\pi}\right)^0 \approx 20{,}8348^0.$$

W ogólnym przypadku możemy skorzystać z tzw. reguły trzech, która ma zastosowanie w zagadnieniach dotyczących proporcjonalności prostej. Jest to celowe szczególnie w przypadkach przeliczania stopni na radiany.

Przykład. Wyliczymy równowartość w radianach $122{,}5^0$ oraz $36^0 31' 15''$.

Rozwiązanie. Oznaczając przez x szukaną liczbę radianów, mamy proporcję:

$$\begin{array}{ll} 122{,}5^0 & \to \ x \\ 180^0 & \to \ \pi \end{array}$$

Zatem

$$122{,}5^0 \cdot \pi = 180^0 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1225}{1800} \cdot \pi = \frac{49}{72}\pi.$$

W drugim przypadku z proporcji

$$\begin{array}{ll} 36^0 31' 15'' & \to \ x \\ 180^0 & \to \ \pi \end{array}$$

wynika, że

$$\left(36 + \frac{31}{60} + \frac{15}{60 \cdot 60}\right)^0 \cdot \pi = 180^0 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1}{180}\left(36 + \frac{124+1}{240}\right) \cdot \pi =$$

$$\frac{1}{180}\left(36 + \frac{25}{48}\right) \cdot \pi = \frac{1753}{8640}\pi.$$

13.2. Kąt skierowany

Załóżmy, że wszystkie obiekty geometryczne, o których będzie mowa, leżą w ustalonej płaszczyźnie Π. Przyjmijmy prócz tego, że ustalony został odcinek jednostkowy, a kąty płaskie mierzone są przy pomocy miary łukowej.

Zanotujmy najpierw następujący, prosty fakt:

Jeżeli T jest ustaloną liczbą dodatnią, to dla każdej liczby nieujemnej v istnieją takie, jednoznacznie określone: liczba $v_0 \in [0; T)$, liczba naturalna n, że

$$v = v_0 + n \cdot T.$$

Niech p będzie półprostą o wierzchołku A oraz $t \in \mathbf{R}$. Z poprzedniej własności wynika, że w sposób jednoznaczny określone są: liczba naturalna n oraz liczba $v_0 \in [0; 2\pi)$, że

$$(*) \qquad |t| = v_0 + n \cdot 2\pi,$$

skąd

$$(t \geq 0 \Rightarrow t = v_0 + n \cdot 2\pi) \wedge (t < 0 \Rightarrow t = -v_0 - n \cdot 2\pi).$$

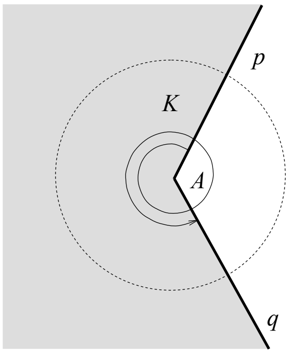
Przyporządkujmy półprostej p półprostą q o tym samym początku A tak, aby powstał kąt płaski o mierze v_0. Aby zagwarantować sobie jednoznaczność tej operacji, przyjmijmy dodatkowe założenie, że:

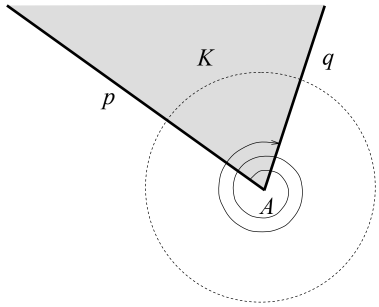
a) jeżeli $t \geq 0$, to półprosta q powstała z półprostej p w wyniku obrotu o środku A w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt płaski K o mierze v_0;

b) jeżeli $t < 0$, to półprosta q powstała z półprostej p w wyniku obrotu o środku A w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara o kąt płaski K o mierze v_0.

W związku z tym parę (p, t) nazywać będziemy <u>*kątem skierowanym o wierzchołku*</u> A, <u>*ramieniu początkowym*</u> p i <u>*mierze*</u> t. Ponadto półprostą q nazywać będziemy <u>*ramieniem końcowym*</u> definiowanego kąta skierowanego. Ponieważ miara kąta pełnego wynosi 2π, więc liczbę n występującą w rozkładzie $(*)$, jeżeli jest ona różna od zera, można zinterpretować jako ilość dodatkowych pełnych obrotów o środku A wykonanych w kierunku przeciwnym albo zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, w zależności od znaku liczby t, w trakcie wyznaczania ramienia końcowego q.

Przykład. Zilustrujemy graficznie kąty skierowane o miarach $\frac{10}{3}\pi$ i $-\frac{22}{5}\pi$ dla wybranych ramion początkowych.



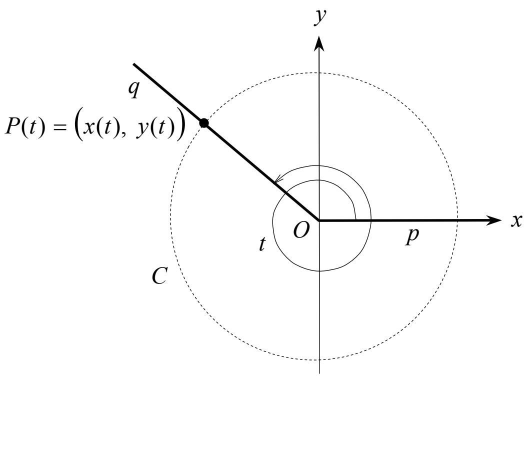


$$t = \frac{10}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi \qquad\qquad t = -\frac{22}{5}\pi = -\frac{2}{5}\pi - 2 \cdot 2\pi$$

Uwaga. W analogiczny sposób można zdefiniować kąt skierowany dla każdej innej miary kąta płaskiego, w szczególności dla miary stopniowej. Stosownej modyfikacji wymaga jedynie rozkład $(*)$.

13.3. Funkcje trygonometryczne

Niech C będzie okręgiem o promieniu 1 i środku $(0, 0)$ w płaszczyźnie układu współrzędnych OXY z osią odciętych OX i osią rzędnych OY. Wprowadźmy odwzorowanie $P : \mathbf{R} \to C$, które każdej liczbie rzeczywistej $t \in \mathbf{R}$ przyporządkowuje punkt przecięcia się okręgu C z ramieniem końcowym q kąta skierowanego o mierze t, wierzchołku O i ramieniu początkowym p pokrywającym się z nieujemną częścią osi OX. Załóżmy ponadto, że punkt $P(t)$ ma postać $(x(t), y(t))$.



Przy pomocy odwzorowania P definiujemy 6 funkcji trygonometrycznych o dziedzinach zawartych w zbiorze **R**. Są to funkcje *sinus*, *cosinus*, *tangens*, *cotangens*, *cosecans*, *secans* oznaczane skrótami: sin, cos, tg, ctg, cosec, sec. Określamy je następującymi warunkami:

$$t \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t = y(t),$$

$$t \in \mathbf{R} \Rightarrow \cos t = x(t),$$

$$t \in \mathbf{R} \wedge \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\right) \Rightarrow \mathrm{tg}\, t = \frac{y(t)}{x(t)},$$

$$t \in \mathbf{R} \wedge \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq m\pi\right) \Rightarrow \mathrm{ctg}\, t = \frac{x(t)}{y(t)},$$

$$t \in \mathbf{R} \wedge \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq m\pi\right) \Rightarrow \mathrm{cosec}\, t = \frac{1}{y(t)},$$

$$t \in \mathbf{R} \wedge \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\right) \Rightarrow \sec t = \frac{1}{x(t)}.$$

W dalszych rozważaniach najwięcej uwagi poświęcimy funkcjom sinus, cosinus i tangens, gdyż funkcje te są najczęściej wykorzystywane. Nieco rzadziej spotykana jest funkcja cotangens i sporadycznie funkcje cosecans i secans. Obserwacja ta nie dotyczy krajów anglosaskich, gdzie operuje się równoprawnie wszystkimi sześcioma funkcjami trygonometrycznymi.

Poniższe własności są prostymi konsekwencjami określenia kąta zorientowanego oraz poprzednich definicji.

Funkcje sinus i cosinus są funkcjami okresowymi o okresie 2π. Ich dziedziną jest zbiór **R,** a zbiorem wartości przedział $[-1;\, 1]$.

Funkcje tangens i cotangens są funkcjami okresowymi o okresie π. Dziedziną pierwszej z nich jest zbiór

$$\left\{t \in \mathbf{R} : \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\right)\right\},$$

dziedziną drugiej z nich zbiór

$$\left\{t \in \mathbf{R} : \underset{m\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq m\pi\right)\right\},$$

a zbiorem wartości każdej z nich zbiór **R**.

Zachodzą tożsamości dla wszystkich argumentów t należących do dziedzin występujących w nich funkcji:

a) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$;

b) $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$;

c) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$;

d) $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$.

Osie OX i OY dzielą płaszczyznę OXY na tzw. *ćwiartki*, których numeracja zależy od znaków współrzędnych x, y należących do nich punktów. A mianowicie, przyjmujemy:

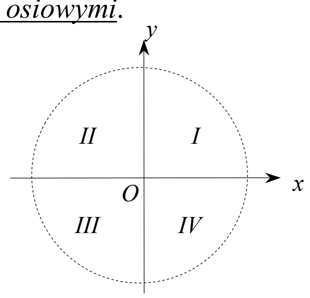
$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow$ I ćwiartka,

$x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow$ II ćwiartka,

$x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow$ III ćwiartka,

$x > 0 \wedge y < 0 \Rightarrow$ IV ćwiartka.

Pominięte punkty w powyższej klasyfikacji charakteryzują się tym, że co najmniej jedna z ich współrzędnych jest zerem, co jest równoznaczne z przynależnością takiego punktu do którejś z osi układu współrzędnych. Nazywać je będziemy dalej *punktami osiowymi*.

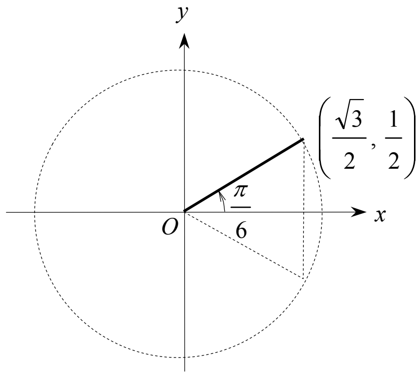


Poniższa tabela podaje informacje dotyczące znaku lub wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych w zależności od położenia punktu $P(t)$ dla $t \in [0;\, 2\pi]$ (pola zacieniowane kolorem ciemno szarym oznaczają, że dana wartość nie jest zdefiniowana):

t	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π	$\dots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\dots$	2π
$\sin t$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos t$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$\operatorname{tg} t$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0
$\operatorname{ctg} t$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

Przykład. Obliczymy wartości głównych funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens dla argumentów $t=\frac{\pi}{6}$, $t=\frac{\pi}{4}$ i $t=\frac{\pi}{3}$. Skorzystamy tu ze znanych własności trójkąta równobocznego i kwadratu.

<u>*Rozwiązanie*</u>.

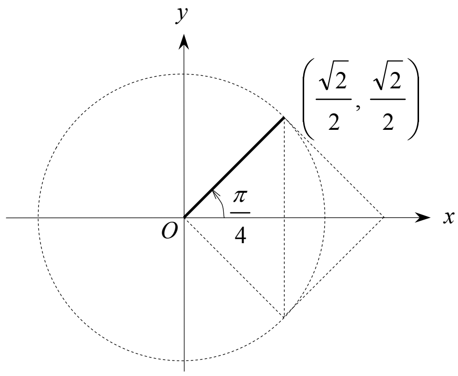


$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

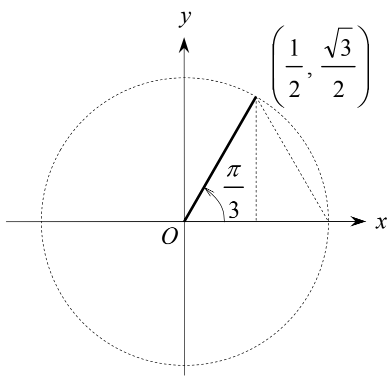
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}.$$



$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1,$$



$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymane rezultaty można przedstawić tabelą:

	$t=\frac{\pi}{6}$	$t=\frac{\pi}{4}$	$t=\frac{\pi}{3}$	
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos t$
$\operatorname{tg} t$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} t$
	$t=\frac{\pi}{3}$	$t=\frac{\pi}{4}$	$t=\frac{\pi}{6}$	

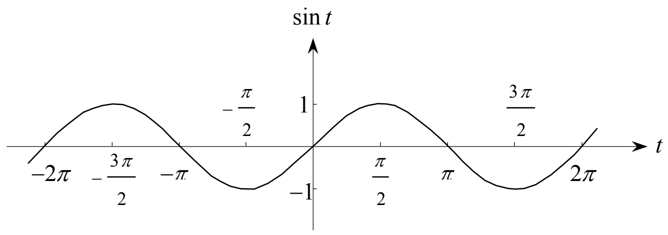
Wróćmy do ogólnych rozważań. Prostą konsekwencją zależności

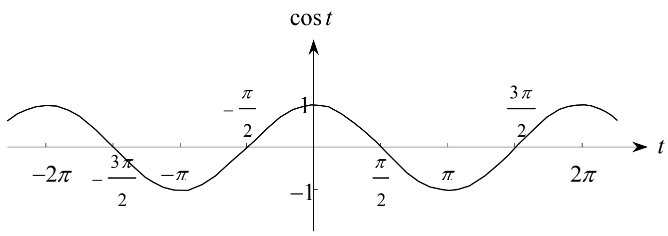
$$x(-t)=x(t)\wedge y(-t)=-y(t);\quad t\in\mathbf{R},$$

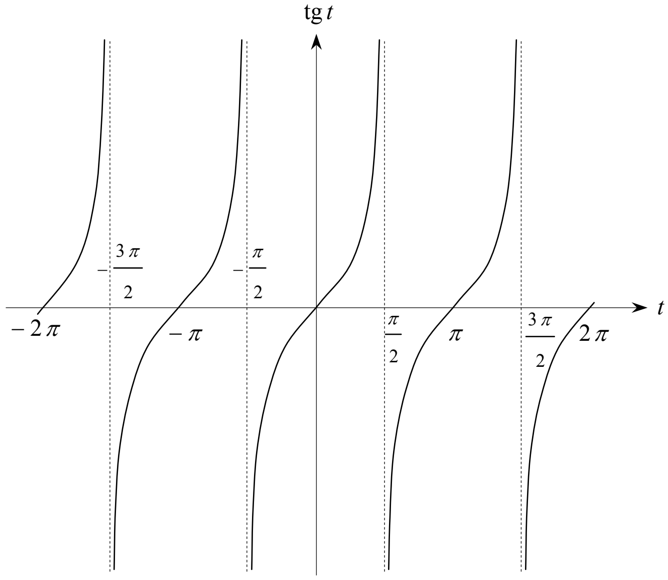
gdzie $x(t)$, $y(t)$ są współrzędnymi punktu $P(t)$ występującego w definicji funkcji trygonometrycznych, jest:

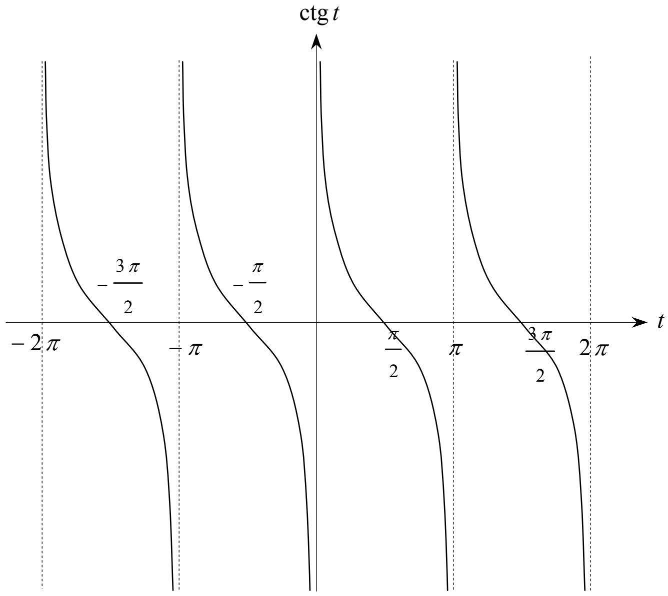
Funkcje sinus, tangens, cotangens, cosecans są nieparzyste, a funkcje cosinus i secans są parzyste.

Aby potwierdzić dotychczas zgromadzone własności funkcji trygonometrycznych, naszkicujmy wykresy najważniejszych z nich.



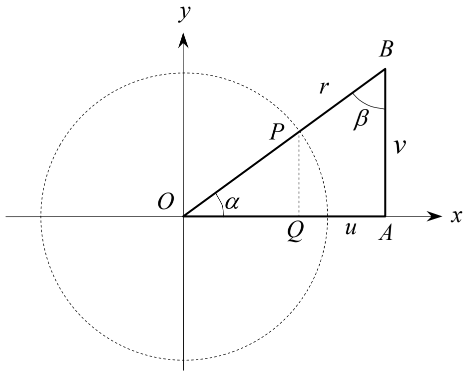






Trygonometria ma zastosowania w różnych dziedzinach nauki. Jedną z nich jest geometria i dlatego konieczne jest zdefiniowanie funkcji trygonometrycznych kątów płaskich oraz kątów skierowanych. Miara łukowa każdego z tych kątów jest liczbą rzeczywistą i dlatego przyjmuje się, że daną funkcją trygonometryczną takiego kąta jest ta sama funkcja trygonometryczna jego miary łukowej. Aby nie komplikować zapisów, powszechną praktyką jest utożsamianie w zapisie argumentów funkcji trygonometrycznych kątów z ich miarami. Np. zapis $\sin 37^0$ oznacza sinus pewnego kąta płaskiego lub skierowanego o mierze stopniowej równej 37^0.

Przeanalizujmy bliżej szczególnie przypadek kątów ostrych, tj. takich kątów płaskich, których miary łukowe są liczbami z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Niech więc α, β będą dwoma takimi kątami wzajemnie dopełniającymi się do kąta prostego, tj. spełniającymi równość $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Wybierzmy ponadto jakikolwiek trójkąt prostokątny AOB o tej własności, że $\measuredangle\, AOB = \alpha$, $\measuredangle\, ABO = \beta$ oraz w płaszczyźnie AOB możliwe jest wprowadzenie prostokątnego układu współrzędnych OXY w sposób przedstawiony poniższym rysunkiem:



Zakładamy tu, że $|OP| = 1$, $|OB| = r$, $|OA| = u$, $|AB| = v$. Z podobieństwa trójkątów OQP i OAB wynika, że

$$|PQ| = \frac{|AB| \cdot |OP|}{|OB|} = \frac{v \cdot 1}{r} = \frac{v}{r} \wedge |OQ| = \frac{|OA| \cdot |OP|}{|OB|} = \frac{u \cdot 1}{r} = \frac{u}{r}.$$

Stąd i z wzorów redukcyjnych (patrz paragraf 13.5) mamy:

$$\cos\beta = \sin\alpha = |PQ| = \frac{v}{r}, \qquad \sin\beta = \cos\alpha = |OQ| = \frac{u}{r},$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|PQ|}{|OQ|} = \frac{v}{u}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{|OQ|}{|PQ|} = \frac{u}{v},$$

$$\sec\beta = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{|PQ|} = \frac{r}{v}, \qquad \operatorname{cosec}\beta = \sec\alpha = \frac{1}{|OQ|} = \frac{r}{u}.$$

Otrzymane wzory nie zależą od wyboru trójkąta OAB i to miało fundamentalne znaczenie dla powstania trygonometrii. Można je wysłowić w formie poniższej własności.

Jeżeli ϕ jest ostrym kątem wewnętrznym trójkąta prostokątnego, to:

i) $\sin\phi$ równa się stosunkowi długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ϕ do długości przeciwprostokątnej;

ii) $\cos\phi$ równa się stosunkowi długości przyprostokątnej leżącej przy kącie ϕ do długości przeciwprostokątnej;

iii) $\mathrm{tg}\,\phi$ równa się stosunkowi długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ϕ do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie ϕ;

iv) $\mathrm{ctg}\,\phi$ równa się stosunkowi długości przyprostokątnej leżącej przy kącie ϕ do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ϕ;

v) $\mathrm{cosec}\,\phi$ równa się stosunkowi długości przeciwprostokątnej do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta ϕ;

vi) $\sec\phi$ równa się stosunkowi długości przeciwprostokątnej do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie ϕ.

13.4. Funkcje trygonometryczne sum, różnic i wielokrotności argumentów

Przyjmijmy generalną umowę, że wszystkie omówione niżej własności zachodzą pod warunkiem, że występujące w nich wyrażenia i funkcje są zdefiniowane.

Dla dowolnych $u, v \in \mathbf{R}$ zachodzą wzory:

a) $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$;

b) $\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$;

c) $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$;

d) $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$;

e) $\mathrm{tg}(u+v) = \dfrac{\mathrm{tg}\,u + \mathrm{tg}\,v}{1 - \mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v}$;

f) $\mathrm{tg}(u-v) = \dfrac{\mathrm{tg}\,u - \mathrm{tg}\,v}{1 + \mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v}$.

Główna trudność dowodu sformułowanego twierdzenia sprowadza się do wykazania prawdziwości któregokolwiek z podpunktów *a) – d)* jego tezy. Tu najczęściej korzysta się z metod geometrii klasycznej lub geometrii analitycznej. Z udowodnionej własności i ogólnych własności funkcji trygonometrycznych łatwo już wynikają pozostałe wzory.

Oczywistą konsekwencją poprzedniego twierdzenia jest poniższy wniosek.

Dla dowolnego $u \in \mathbf{R}$ zachodzą wzory:
a) $\sin 2u = 2\sin u \cos u$;
b) $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$;
c) $\operatorname{tg} 2u = \dfrac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u}$.

Z kolei z powyższego wynika następująca seria bardzo użytecznych zależności:

Dla dowolnego $v \in \mathbf{R}$ zachodzą wzory:
a) $\sin^2 \dfrac{v}{2} = \dfrac{1-\cos v}{2}$;
b) $\cos^2 \dfrac{v}{2} = \dfrac{1+\cos v}{2}$;
c) $\operatorname{tg}^2 \dfrac{v}{2} = \dfrac{1-\cos v}{1+\cos v}$.

Ważną umiejętnością jest uzyskiwanie kolejnych wzorów trygonometrycznych z innych, znanych wzorów.

Przykłady. a) Wyprowadzimy wzór na $\sin 3u$; w analogiczny sposób tworzy się wzory na $\cos 3u$ oraz $\operatorname{tg} 3u$.
<u>Rozwiązanie</u>. Mamy

$$\sin 3u = \sin(u+2u) = \sin u \cos 2u + \cos u \sin 2u =$$
$$\sin u\left(\cos^2 u - \sin^2 u\right) + \cos u \cdot 2\sin u \cos u =$$
$$3\sin u \cos^2 u - \sin^3 u = \sin u\left(3\cos^2 u - \sin^2 u\right) =$$
$$\sin u\left(3\left(1-\sin^2 u\right) - \sin^2 u\right) = \sin u\left(3 - 4\sin^2 u\right).$$

b) Pokażemy, że iloczyny $\sin^2 u$, $\sin u \cos u$, $\cos^2 u$ dla tych u, dla których $\cos u \neq 0$, dają się sprowadzić do wyrażeń zależnych jedynie od $\operatorname{tg} u$.
<u>Rozwiązanie</u>. Mamy

$$\sin^2 u = \frac{\sin^2 u}{\sin^2 u + \cos^2 u} = \frac{\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}{\frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = \frac{\operatorname{tg}^2 u}{\operatorname{tg}^2 u + 1};$$

$$\sin u \cos u = \frac{\sin u \cos u}{\sin^2 u + \cos^2 u} = \frac{\frac{\sin u \cos u}{\cos^2 u}}{\frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg}^2 u + 1};$$

$$\cos^2 u = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u + \cos^2 u} = \frac{\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u}}{\frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u + 1}.$$

c) Wykażemy, że wszystkie funkcje trygonometryczne argumentów $u \in \mathbf{R}$, dla których istnieje $\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, dają się sprowadzić do ułamków algebraicznych zależnych od $\operatorname{tg}\frac{u}{2}$.

Rozwiązanie. Rzeczywiście, mamy

$$\sin u = \frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{u}{2} + 1};$$

$$\cos u = \frac{\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{u}{2} + 1};$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}.$$

Kolejnym problemem, w którym kluczowe znaczenie mają przekształcenia trygonometryczne, jest dowodzenie <u>*tożsamości trygonometrycznych*</u>, tj. równości wyrażeń trygonometrycznych zachodzących dla wszystkich argumentów, dla których wyrażenia te są zdefiniowane.

Przykłady. Wykażemy prawdziwość kilku wybranych tożsamości. Symbolami L, P oznaczać będziemy, odpowiednio, lewą i prawą stronę rozważanej tożsamości.

a) $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} = 0.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$L = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} +$$

$$\frac{\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha}{\cos\gamma\cos\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)+(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)+(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)=0=P.$$

b) $$\left(\operatorname{tg}\tau+\frac{1}{\cos\tau}\right)\left(\operatorname{ctg}\tau+\frac{1}{\sin\tau}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Wychodzimy od bardziej skomplikowanej lewej strony i z uwagi na postać prawej strony stosujemy m.in. wzory z punktu *c)* poprzedniego przykładu.

$$L = \left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}} + \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}}\right)\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\tau}{2}+1}{2\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\right)\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}} =$$

$$\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)^2}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} = P.$$

c) $$\frac{\sin\phi-\sin3\phi+\sin5\phi}{\cos\phi-\cos3\phi+\cos5\phi} = \operatorname{tg}3\phi.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Postać prawej strony tożsamości narzuca strategię postępowania:

$$L=\frac{\sin(3\phi-2\phi)-\sin3\phi+\sin(3\phi+2\phi)}{\cos(3\phi-2\phi)-\cos3\phi+\cos(3\phi+2\phi)}=$$

$$\frac{\sin3\phi\cos2\phi-\cos3\phi\sin2\phi-\sin3\phi+\sin3\phi\cos2\phi+\cos3\phi\sin2\phi}{\cos3\phi\cos2\phi+\sin3\phi\sin2\phi-\cos3\phi+\cos3\phi\cos2\phi-\sin3\phi\sin2\phi}=$$

$$\frac{\sin3\phi(2\cos2\phi-1)}{\cos3\phi(2\cos2\phi-1)}=\operatorname{tg}3\phi=P.$$

W wielu zagadnieniach konieczne jest sprowadzenie wyrażeń trygonometrycznych do postaci iloczynowej. Zanim podamy stosowne przykłady, dołączmy do kompletu zgromadzonych wzorów kolejne cztery.

Dla dowolnych $u,\, v\in\mathbf{R}$ zachodzą zależności:

a) $\sin u+\sin v=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$;

b) $\sin u-\sin v=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$;

c) $\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$;

d) $\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$.

Przykład. Rozłóżmy na czynniki wybrane wyrażenia trygonometryczne.

a) $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cos4\alpha=$

$$(\cos4\alpha+\cos\alpha)+(\cos3\alpha+\cos2\alpha)=$$

$$2\cos\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\alpha+2\cos\frac{5}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha=2\cos\frac{5}{2}\alpha\left(\cos\frac{3}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}\alpha\right)=$$

$$2\cos\frac{5}{2}\alpha\cdot2\cos\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}.$$

b) $\operatorname{tg}\beta-1+\sin\beta(1-\operatorname{tg}\beta)+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=(\operatorname{tg}\beta-1)(1-\sin\beta)+\frac{1}{1+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}=$

$$(\operatorname{tg}\beta-1)(1-\sin\beta)+(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)=(1-\sin\beta)(\operatorname{tg}\beta+\sin\beta)=$$

$$(1-\sin\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta(1+\cos\beta)=\operatorname{tg}\beta\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\beta\right)\cdot2\cos^2\frac{\beta}{2}=$$

$$4\operatorname{tg}\beta\cos^2\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right).$$

13.5. Wzory redukcyjne

Utwórzmy następujące pary nieuporządkowane funkcji trygonometrycznych: $\{\sin, \cos\}$, $\{\mathrm{tg}, \mathrm{ctg}\}$, $\{\mathrm{cosec}, \sec\}$. Każdy element danej pary nazywać będziemy *kofunkcją* drugiego elementu tej pary. Np. funkcja tangens jest kofunkcją funkcji cotangens i na odwrót, funkcja cotangens jest kofunkcją funkcji tangens.

Dla każdego $t \in \mathbf{R}$ zachodzą wzory:

a) $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ***b)*** $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;

c) $\mathrm{tg}\, t = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ***d)*** $\mathrm{ctg}\, t = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;

e) $\mathrm{cosec}\, t = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; ***f)*** $\sec t = \mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Sformułowane twierdzenie dzięki przyjętej wcześniej terminologii można wysłowić w zwięzły, łatwy do zapamiętania sposób:

Zachodzi równość:

$$f(t) = kf\left(\frac{\pi}{2} - t\right),$$

gdzie f oznacza dowolną funkcję trygonometryczną, kf jej kofunkcję oraz t dowolny argument z dziedziny funkcji f.

Związki występujące w tezach poprzednich twierdzeń stanowią fragment bogatej rodziny tzw. *wzorów redukcyjnych*. Zacytujmy jeszcze dwa takie wzory, co w zasadzie zaspakaja wszelkie potrzeby w tym zakresie.

Dla każdego $t \in \mathbf{R}$ oraz $n \in \mathbf{Z}$ zachodzą równości:

a) $\sin(t + n \cdot \pi) = (-1)^n \sin t$;

b) $\cos(t + n \cdot \pi) = (-1)^n \cos t$.

Przejdźmy do materiału ilustracyjnego.

Przykłady. Niech $\alpha \in \mathbf{R}$. Wtedy

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

b) $\cos(\pi-\alpha)=\cos\big(\alpha+(-1)\cdot\pi\big)=(-1)^{-1}\cdot\cos\alpha=-\cos\alpha$;

c) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right]=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=\operatorname{tg}\alpha$;

e) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\big[\alpha+(-2)\cdot\pi\big]=(-1)^{-2}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$;

f) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$;

g) $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right]=\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$;

h) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right]=\operatorname{tg}(-\alpha+2\pi)=\operatorname{tg}(-\alpha)=$

$-\operatorname{tg}\alpha$.

Uwagi. ***a)*** Wszystkie twierdzenia podane w tym paragrafie można „przetłumaczyć” na język miary stopniowej lub jakiejkolwiek innej miary kąta.

b) Celem dowolnego wzoru redukcyjnego jest wyrażenie wartości danej funkcji trygonometrycznej f w punkcie t postaci

$$t=t_0+n\cdot\frac{\pi}{2},$$

gdzie $t_0\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $n\in\mathbf{Z}$, przez wartość tej samej lub innej funkcji trygonometrycznej w punkcie t_0 poprzedzoną odpowiednim znakiem. Ponieważ wzorów redukcyjnych jest nieskończenie wiele, więc celowym jest opanowanie umiejętność ich tworzenia. Pomocna w tym może być następująca instrukcja:

1. Traktując t jako miarę pewnego kąta zorientowanego, określamy, w której ćwiartce układu współrzędnych leżałoby końcowe ramię tego kąta zorientowanego, gdyby t_0 było miarą pewnego kąta ostrego. W oparciu o tę informację piszemy taki znak, jaki funkcja f ma w tej ćwiartce.

2. Jeżeli n jest liczbą parzystą, piszemy wartość $f(t_0)$; jeżeli n jest liczbą nieparzystą, piszemy wartość $cf(t_0)$, gdzie cf jest kofunkcją funkcji f.

Przykładowo mamy

$$\sin 2005^0=\sin\big(22\cdot 90^0+25^0\big)=-\sin 25^0,$$

gdyż ramię końcowe kąta zorientowanego o mierze 2005^0 znajduje się w III ćwiartce układu współrzędnych (obrót o 5 kątów pełnych + 1 kąt półpełny + kąt 25^0). Alternatywnym rozwiązaniem jest:

$$\sin 2005^0=\sin\big(23\cdot 90^0-65^0\big)=-\cos 65^0.$$

Mimo różnych postaci, obie odpowiedzi określają tę samą wartość liczbową.

Wzory redukcyjne mają liczne zastosowania. Przed upowszechnieniem kalkulatorów elektronicznych i komputerów umożliwiały one efektywne wykorzystanie tablic wartości funkcji trygonometrycznych (opracowywanych ze zrozumiałych względów dla ograniczonego zakresu argumentów). Możemy te wzory także wykorzystać do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych oraz dowodzenia tożsamości trygonometrycznych.

Przykłady. Sprowadzimy do postaci iloczynowej wybrane wyrażenia trygonometryczne.

a) $1+\sin\phi=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=$

$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)\right]=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right).$

b) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta=(\sin\alpha-\cos\beta)(\sin\alpha+\cos\beta)=$

$\left[\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]\left[\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=$

$2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$

$\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta).$

Przykład. Wykażemy, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, to zachodzi tożsamość

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Mamy

$$L=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2\left(-(\alpha+\beta)+180^0\right)$$

$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\left(-(\alpha+\beta)+180^0\right)=$$

$1-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}+\sin^2(\alpha+\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$

$1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+1-\cos^2(\alpha+\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$

$2-\cos(\alpha+\beta)\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=$

$2-\cos(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=2=P.$

13.6. Równania i nierówności trygonometryczne

Poniższe własności, będące konsekwencją okresowości funkcji trygonometrycznych oraz wzorów redukcyjnych, mają podstawowe znaczenie dla „techniki” rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, to równość

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite *m*, *n*, że

$$\alpha = \beta + 2m\pi \vee \alpha = \pi - \beta + 2n\pi .$$

Jeżeli $\alpha \in \mathbf{R}$, to

a) $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}(\alpha = n\pi)$;

b) $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$;

c) $\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$.

Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, to równość

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite *m*, *n*, że

$$\alpha = \beta + 2m\pi \vee \alpha = -\beta + 2n\pi .$$

Jeżeli $\alpha \in \mathbf{R}$, to

a) $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$;

b) $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}(\alpha = 2n\pi)$;

c) $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}(\alpha = \pi + 2n\pi)$.

Jeżeli $\alpha, \beta \in D_{\text{tg}}$, to równość

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita *n*, że

$$\alpha = \beta + n\pi .$$

Jeżeli $\alpha, \beta \in D_{\text{ctg}}$, to równość

$$\text{ctg}\,\alpha = \text{ctg}\,\beta$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita *n*, że

$$\alpha = \beta + n\pi .$$

Z zacytowanych własności wynika, że zbiór rozwiązań równania trygonometrycznego postaci

$$f(t) = f(\beta),$$

gdzie f jest którąkolwiek z funkcji trygonometrycznych oraz β wartością znaną, a t niewiadomą, jest nieskończony i składa się z jednej lub dwóch tzw. *serii rozwiązań* zależnych od jednego lub dwóch parametrów całkowitych. Należy to rozumieć w ten sposób, że każde konkretne rozwiązanie danego równania jest elementem jednej z serii jego rozwiązań, tzn. jest wyznaczone przez pewną wartości parametru definiującego daną serię i odwrotnie, każdy element danej serii jest konkretnym rozwiązaniem rozpatrywanego równania.

Dowolne równanie trygonometryczne może mieć bardziej skomplikowaną postać i wtedy może posiadać ono większą liczbę serii rozwiązań. Często spotykanym błędem, którego nie należy popełniać, jest oznaczanie tym samym symbolem parametrów w różnych seriach rozwiązań. Jednocześnie zdarzają się sytuacje, kiedy kilka serii daje się połączyć w jedną łączną serię, co prowadzi do uproszczenia postaci rozwiązania (następuje m.in. redukcja liczba parametrów).

Rozwiązywanie równań trygonometrycznych jest zagadnieniem złożonym wymagającym opanowania licznych „trików” i „chwytów”. Poniższe przykłady stanowią skromną ilustrację omawianej problematyki.

Przykłady. Rozwiążemy wybrane równania trygonometryczne.

a) $\sin t - \operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\cos t} - \cos t.$

Rozwiązanie. Równanie ma sens pod warunkiem, że t spełnia zastrzeżenie

$$\underset{p\in\mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq \frac{\pi}{2} + p\cdot\pi \right).$$

Mnożąc obustronnie równanie przez $\cos t$, otrzymujemy:

$$\sin t\cos t - \sin t = \sin^2 t \Leftrightarrow \sin t\left(\cos t - 1 - \sin t\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\sin t = 0 \vee \cos t - \sin t = 1.$$

Rozwiązaniem pierwszego z równań jest seria

$$(*) \quad t = l\cdot\pi;\ l \in \mathbf{Z}.$$

Rozwiązanie drugiego z równań może przebiegać następująco:

$$\cos t - 1\cdot\sin t = 1 \Leftrightarrow \cos t - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\sin t = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos t \cos\frac{\pi}{4} - \sin t \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + m \cdot 2\pi \vee t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(t = m \cdot 2\pi \vee t = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right); \ m, n \in \mathbf{Z}.$$

Pierwsza ze znalezionych powyżej serii zawiera się w serii znalezionej na wstępie, a ostatnia seria nie spełnia zastrzeżenia. Dlatego zbiór wszystkich rozwiązań dyskutowanego równania dany jest serią $(*)$.

b) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, t + \left(\sqrt{3} - 1\right)\mathrm{tg}\, t - 1 = 0$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Musi być oczywiście spełniony warunek

$$\underset{p \in \mathbf{Z}}{\forall}\left(t \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi\right).$$

Podstawiając $s = \mathrm{tg}\, t$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\sqrt{3}\, s^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)s - 1 = 0.$$

Mamy

$$\Delta = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-1) = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow$$

$$s_1 = \frac{-\left(\sqrt{3} - 1\right) - \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2\sqrt{3}} = -1 \wedge s_2 = \frac{-\left(\sqrt{3} - 1\right) + \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$\mathrm{tg}\, t = -1 \vee \mathrm{tg}\, t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

tzn.

$$\mathrm{tg}\, t = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \vee \mathrm{tg}\, t = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Zatem zbiór rozwiązań omawianego równania trygonometrycznego tworzą serie:

$$t = -\frac{\pi}{4} + m \cdot \pi; \ m \in \mathbf{Z}, \quad t = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi; \ n \in \mathbf{Z}.$$

c) $\sin t \sin 7t = \sin 3t \sin 5t$.

<u>*Rozwiązanie*</u>. Równanie jest równoważne równaniu

$$-2\sin t \sin 7t = -2\sin 3t \sin 5t,$$

więc z uwagi na wzór na różnicę cosinusów, znajdujemy rozwiązania prostych układów równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2}=t \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=7t \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=8t \wedge \beta=6t, \quad \begin{cases} \dfrac{\gamma-\delta}{2}=3t \\ \dfrac{\gamma+\delta}{2}=5t \end{cases} \Leftrightarrow \gamma=8t \wedge \delta=2t.$$

Zatem rozwiązywane równanie sprowadza się do postaci:

$$\cos 8t-\cos 6t=\cos 8t-\cos 2t \Leftrightarrow \cos 6t=\cos 2t.$$

W konsekwencji

$$6t=2t+m\cdot 2\pi \Leftrightarrow 4t=m\cdot 2\pi \Leftrightarrow t=m\cdot\frac{\pi}{2} \vee$$

$$6t=-2t+n\cdot 2\pi \Leftrightarrow 8t=n\cdot 2\pi \Leftrightarrow t=n\cdot\frac{\pi}{4},$$

gdzie $m, n\in\mathbf{Z}$. Wszystkie rozwiązania dane pierwszą serią należą do zbioru rozwiązań wyznaczonych przez drugą serię i dlatego ostateczne rozwiązanie dane jest wzorem

$$t=n\cdot\frac{\pi}{4};\ n\in\mathbf{Z}.$$

d) $\operatorname{tg}(t+45^0)+\operatorname{tg}(t-45^0)=2\operatorname{tg}(t-45^0)\operatorname{tg}(t+45^0)\operatorname{tg} t.$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Zróbmy wszystkie konieczne zastrzeżenia:

$$\forall_{p\in\mathbf{Z}}\left(t+45^0\neq 90^0+p\cdot 180^0\right)\Leftrightarrow \forall_{p\in\mathbf{Z}}\left(t\neq 45^0+p\cdot 180^0\right),$$

$$\forall_{q\in\mathbf{Z}}\left(t-45^0\neq 90^0+q\cdot 180^0\right)\Leftrightarrow \forall_{q\in\mathbf{Z}}\left(t\neq 135^0+q\cdot 180^0\right),$$

$$\forall_{r\in\mathbf{Z}}\left(t\neq 90^0+r\cdot 180^0\right).$$

Łącząc pierwsze dwa zastrzeżenia w jedno, stwierdzamy, że

$$\forall_{s\in\mathbf{Z}}\left(t\neq 45^0+s\cdot 90^0\right)\wedge \forall_{r\in\mathbf{Z}}\left(t\neq 90^0+r\cdot 180^0\right).$$

Przechodząc do rozwiązania równania, zauważmy, że

$$\operatorname{tg}(t+45^0)=\frac{\operatorname{tg} t+\operatorname{tg}45^0}{1-\operatorname{tg} t\operatorname{tg}45^0}=\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}\wedge \operatorname{tg}(t-45^0)=\frac{\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}45^0}{1+\operatorname{tg} t\operatorname{tg}45^0}=\frac{\operatorname{tg} t-1}{1+\operatorname{tg} t}.$$

Stąd

$$\left(\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}+\frac{\operatorname{tg} t-1}{1+\operatorname{tg} t}\right)=2\cdot\frac{\operatorname{tg} t+1}{1-\operatorname{tg} t}\cdot\frac{\operatorname{tg} t-1}{1+\operatorname{tg} t}\cdot\operatorname{tg} t \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\operatorname{tg} t+1)^2-(\operatorname{tg} t-1)^2}{(1-\operatorname{tg} t)(1+\operatorname{tg} t)}=-2\operatorname{tg} t \Leftrightarrow$$

$$2\operatorname{tg} t=-\operatorname{tg} t\left(1-\operatorname{tg}^2 t\right)\Leftrightarrow \operatorname{tg} t\left(3-\operatorname{tg}^2 t\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg} t = 0 \vee \operatorname{tg} t = -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} t = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 0 \vee \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\left(-60^0\right) \vee \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} 60^0 .$$

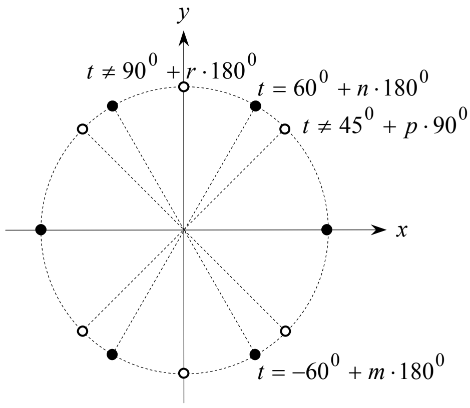
A więc zbiór wszystkich rozwiązań dyskutowanego równania składa się z trzech serii postaci:

$$t = l \cdot 180^0 ;\ l \in \mathbf{Z},$$

$$t = -60^0 + m \cdot 180^0 ;\ m \in \mathbf{Z},$$

$$t = 60^0 + n \cdot 180^0 ;\ n \in \mathbf{Z}.$$

Zaznaczmy wszystkie zastrzeżenia i rozwiązania na tzw. kole trygonometrycznym:



Z powyższego rysunku widać, że wszystkie znalezione rozwiązania spełniają zastrzeżenia oraz dają się zapisać jedną serią postaci

$$t = k \cdot 60^0 ;\ k \in \mathbf{Z}.$$

Przejdźmy do problematyki związanej z rozwiązywaniem nierówności trygonometrycznych. Przybliżymy ją konkretnymi przykładami.

Przykłady. Oznaczmy symbolem D zbiór rozwiązań rozważanej nierówności.

a) $(*)$ $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{1 + \cos t} \le \sec^2 \frac{t}{2} - 1.$$

<u>*Rozwiązanie*</u>. Najpierw robimy niezbędne zastrzeżenia:

$$\cos t \neq -1 \Leftrightarrow \underset{p \in \mathbf{Z}}{\forall} \left(t \neq \pi + p \cdot 2\pi\right),$$

$$\cos \frac{t}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \underset{r \in \mathbf{Z}}{\forall} \left(\frac{t}{2} \neq \frac{\pi}{2} + r \cdot \pi\right) \Leftrightarrow \underset{r \in \mathbf{Z}}{\forall} \left(t \neq \pi + r \cdot 2\pi\right).$$

Zatem musi być spełniony warunek

$$\underset{p\in\mathbf{Z}}{\forall}(t \neq \pi + p\cdot 2\pi).$$

Następnie rozwiązujemy nierówność $(*)$:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin t}{2\cos^2\frac{t}{2}} \le \frac{1-\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} \le \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} \le \operatorname{tg}^2\frac{t}{2} \Leftrightarrow 0 \le \operatorname{tg}\frac{t}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right).$$

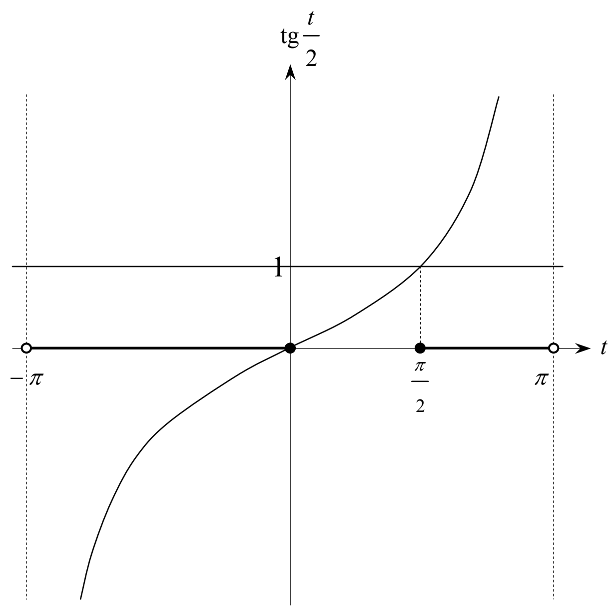
Podstawiając $s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$0 \le s(s-1) \Leftrightarrow s \le 0 \vee s \ge 1.$$

Zatem nierówność $(*)$ jest równoważna alternatywie nierówności

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} \le 0 \vee \operatorname{tg}\frac{t}{2} \ge 1,$$

którą rozwiązujemy metodą graficzną. W tym celu szkicujemy wykresy funkcji stałej $t \mapsto 1$ oraz funkcji $t \mapsto \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ na dowolnym przedziale o długości 2π (obie funkcje są okresowe o okresie 2π). Niech to będzie przedział $(-\pi;\pi)$:



Po uwzględnieniu zastrzeżeń z powyższego rysunku i wspomnianej okresowości wynika, że

$$t \in D \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(-\pi + n\cdot 2\pi < t \le n\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \le t < \pi + n\cdot 2\pi \right).$$

b) $(*)\quad 1-\cos^2 2t < \sin 3t - \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right).$

Mamy

$$(*) \Leftrightarrow \sin^2 2t < \sin 3t + \sin t \Leftrightarrow \sin^2 2t < 2\sin 2t \cos t \Leftrightarrow$$
$$0 < 4\sin t\cos^2 t - 4\sin^2 t\cos^2 t \Leftrightarrow 0 < \sin t\cos^2 t\,(1-\sin t) \Leftrightarrow$$
$$0 < \sin t < 1 \wedge \cos^2 t \ne 0 \Leftrightarrow 0 < \sin t < 1.$$

Z własności funkcji sinus wynika więc, że

$$t \in D \Leftrightarrow \underset{n\in\mathbf{Z}}{\exists}\left(n\cdot 2\pi < t < \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi < t < \pi + n\cdot 2\pi \right).$$

Ostatni, poniższy przykład, pokazuje ważne, np. dla analizy matematycznej, zastosowanie równań i nierówności trygonometrycznych.

Przykład. Niech

$$w(t) = (\operatorname{ctg} t - 1)\left(\sin 2t - \cos t + \sqrt{3}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right);\ t \in (0;\, \pi)\cup(\pi;\, 2\pi).$$

Przedyskutujemy znak wyrażenia $w(t)$ oraz wyznaczymy jego miejsca zerowe, co sprowadza się do rozwiązania nierówności $w(t) < 0$, $w(t) > 0$ oraz rozwiązania równania $w(t) = 0$. Zrobimy to jednym rozumowaniem. Mamy

$$w(t) = (\operatorname{ctg} t - 1)\left(\left(2\sin t\cos t + \sqrt{3}\sin t\right) - \left(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$
$$(\operatorname{ctg} t - 1)\left(2\sin t\left(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$
$$2(\operatorname{ctg} t - 1)\left(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\left(\sin t - \frac{1}{2} \right).$$

Wykorzystując własności funkcji cotangens, cosinus oraz sinus, w analogiczny sposób, jak w punkcie *a)* poprzedniego przykładu sporządzamy tzw. *siatkę znaków* poszczególnych wyrażeń rozkładu $w(t)$ na czynniki oraz całego $w(t)$:

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{5\pi}{6}$	…	π	…	$\frac{7\pi}{6}$	…	$\frac{5\pi}{4}$	…	2π
$\operatorname{ctg} t - 1$		+	+	+	0	–	–	–		+	+	+	0	–	
$\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}$		+	+	+	+	+	0	–		–	0	+	+	+	
$\sin t - \frac{1}{2}$		–	0	+	+	+	0	–		–	–	–	–	–	
$w(t)$		–	0	+	0	–	0	–		+	0	–	0	+	

W tym momencie jest jasne, że:

$$w(t) < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} < t < \pi \vee \frac{7\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{4};$$

$$w(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{4} \vee \pi < t < \frac{7\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{4} < t < 2\pi;$$

$$w(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \vee t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{5\pi}{6} \vee t = \frac{7\pi}{6} \vee t = \frac{5\pi}{4}.$$

Indeks

R

S

T

U

W

Z