Przykład 1. (chłopiec na ślizgawce)
Chłopiec ważący 28 kilogramów dobiega do ślizgawki z prędkością 3 m/s. Współczynnik tarcia między jego butami a lodem wynosi 1/25. Znaleźć zależność prędkości chłopca od czasu. Jak daleko chłopiec dojedzie?

Rozwiązanie
Podczas ruchu chłopca działa siła tarcia, która wynosi $\frac{1}{25} \cdot 28\,\mathrm{kG} = 1,12\,\mathrm{kG} = 1,12\mathrm{g}\,\mathrm{N}$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Niech m oznacza masę chłopca, a v – jego prędkość. Z drugiego prawa dynamiki Newtona mamy $F = m\dfrac{dv}{dt}$. W ułożonym przez nas równaniu po obu stronach powinny być te same jednostki (w tym wypadku niutony). Stąd

$$28\frac{dv}{dt} = -1,12g.$$

Otrzymujemy

$$v(t) = \frac{-1,12g}{28}t + v_0 = 3 - 0,39t.$$

W celu znalezienia odpowiedzi na pytanie jak daleko chłopiec dojedzie przekształcimy wyjściowe równanie różniczkowe tak, by mieć w nim zależność między prędkością a odległością. Niech $y(t)$ oznaczaodległość przebytą do chwili t. Mamy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}.$$

Równanie ma teraz postać

$$28v\frac{dv}{dy} = -1,12g.$$

Otrzymujemy

$$v\,dv = -\frac{1,12g}{28}\,dy.$$

Zatem

$$\int_3^0 v\,dv = -\frac{1,12g}{28}\int_0^y dy.$$

Stąd

$$y = -\frac{28}{1,12g} \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_3^0 = \frac{28}{1,12g} \cdot \frac{9}{2} = 11,46.$$

Chłopiec osiągnie odległość 11,46 metra.

Przykład 2. (chłopiec na ślizgawce z uwzględnieniem oporu powietrza) Jak daleko dojedzie chłopiec z poprzedniego przykładu, jeśli dodatkowo działa siła oporu powietrza równa vg niutonów, gdzie v oznacza prędkość chłopca.

Rozwiązanie Mamy

$$28\,\frac{dv}{dt} = -1,12g - vg = -g(1,12 + v).$$

Stąd

$$28v\,\frac{dv}{dy} = -g(1,12 + v).$$

Zatem

$$\int_3^0 \frac{v}{v + 1,12}\,dv = -\,\frac{g}{28}\int_0^y dy,$$

$$\int_{3}^{0}\Big(1-\frac{1,12}{v+1,12}\Big)dv=-\frac{g}{28}\,y,$$

$$y=-\frac{28}{g}\Big[v-1,12\,\ln(v+1,12)\Big]_{3}^{0}=$$

$$=-\frac{28}{g}[-1,12\,\ln 1,12-3+1,12\,\ln(3+1,12)]=4,4.$$

Chłopiec przebędzie drogę 4,4 metra.

Przykład 3. (spadanie ciał, gdy siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości)
Ciało o masie m spada z dużej wysokości, przy czym opór powietrza jest wprost proporcjonalny do prędkości. Znaleźć prędkość spadania jako funkcję czasu oraz zależność przebytej drogi od czasu. Znaleźć prędkość graniczną.

Rozwiązanie Przyjmijmy kierunek dodatni w dół, a punkt, w którym zaczyna się ruch, niech ma współrzędną 0. Na ciało działają dwie siły: siła grawitacji $F=mg$ oraz opór powietrza R, który jest zawsze skierowany przeciwnie do kierunku ruchu, więc $R=-kv$, gdzie v oznacza prędkość, a k jest współczynnikiem proporcjonalności. Zatem

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv.$$

Dzielimy obie strony równania przez $-k$, rozdzielamy zmienne i nakładamy na obie strony całkę. Mamy

$$\int\frac{dv}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}\int dt,$$

$$\ln|v-\frac{mg}{k}|=-\frac{k}{m}\,t+\ln|C|,$$

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Ponieważ $v(0)=0$, więc $C=-\dfrac{mg}{k}$. Ostatecznie

$$v(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}),$$

a prędkość graniczna $v_{gr}=\dfrac{mg}{k}$.

Uwaga. Zauważmy, że jeśli wiemy, iż istnieje prędkość gramiczna, to jej wartość możemy otrzymać, kładąc w równaniu różniczkowym $\dfrac{dv}{dt}=0$.

Znajdźmy teraz zależność między przebytej drogi od czasu. Mamy

$$y(t)=\int v(t)\,dt=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m}+C.$$

Ponieważ $y(0)=0$, więc $C=-m^2g/k^2$. Zatem

$$y(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-kt/m}).$$

Przykład 4. Rakieta, na którą działa siła F, porusza się ruchem prostoliniowym. Spalane paliwo jest wyrzucane z prędkością u względem obserwatora w rakiecie. Wyprowadzić równanie ruchu rakiety.

Rozwiązanie. Wprowadźmy następujące oznaczenia:
$M(t)$–masa rakiety (z zawartym w niej paliwem) w chwili t;
$v(t)$–prędkość rakiety w chwili t;
$m(t)$–masa paliwa w rakiecie w chwili t;
Δm–masa paliwa wyrzuconego w przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$;
Δv–przyrost prędkości w przedziale czasu $[t, t + \Delta t]$;
$p(t)$–pęd układu złożonego z rakiety i paliwa w chwili t.
Pod wpływem działania siły F pęd ulega zmianie, przy czym

$$F = \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}.$$

Mamy $p(t) = M(t)v(t)$. Ponieważ prędkość paliwa względem rakiety wynosi u, więc w układzie, w którym rakieta porusza się z prędkością v, wynosi ona $v - u$. Zatem

$$p(t + \Delta t) = (M(t) - \Delta m)(v(t) + \Delta v) + \Delta m(v(t) - u).$$

Stąd

$$F = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t)v(t) - \Delta m v(t) + M(t)\Delta v - \Delta m \Delta v + \Delta m v(t) - \Delta m u - M(t)v(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Big(M(t)\frac{\Delta v}{\Delta t} - \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t} \Big).$$

Zatem otrzymujemy następujące równanie ruchu rakiety

$$F = M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt}.$$