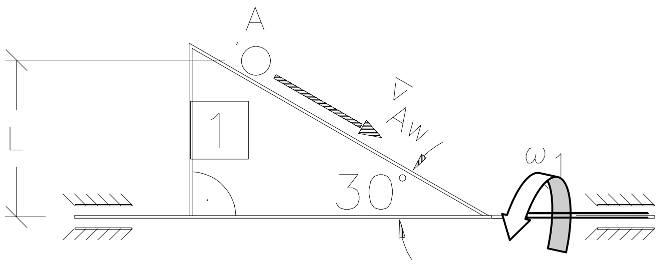
Przykład 2.2. Wyznaczanie prędkości i przyśpieszenia w ruchu złożonym

Punkt materialny A porusza się wzdłuż przeciwprostokątnej trójkąta przedstawionego na rysunku 2.A. Trójkąt ten znajduje się w ruchu obrotowym wokół dłuższej przyprostokątnej. Prędkość punktu A względem trójkąta wynosi $V_A^w = 2\omega_o l = const$, a prędkość kątowa ruchu obrotowego wynosi $\omega_1 = \omega_o = const$.

Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie bezwzględne punktu A w chwili, gdy jego odległość od osi obrotu wynosi l.



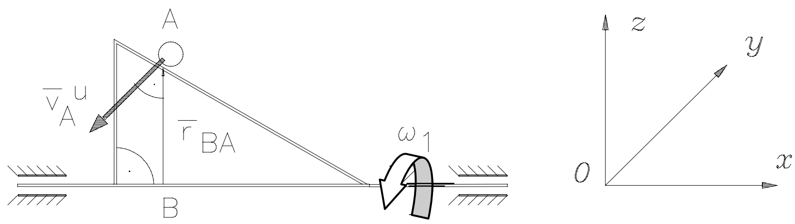
rys. 2. A

ROZWIĄZANIE

Z treści zadania wynika, że ruch punktu A jest złożeniem ruchu względnego z prędkością V_A^w i ruchu unoszenia z prędkością ω_1. Prędkość bezwzględną punktu A można więc przedstawić w postaci sumy:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_A^u + \overline{V}_A^w .$$

Prędkość $\overline{V}_A^u$ jest prędkością unoszenia i wynosi $\overline{V}_A^u = \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_{BA}$ (rys. 2.B). Uwzględniając, że $\overline{\omega}_1 \perp \overline{r}_{BA}$, $\omega_1 = \omega_o$, $|\overline{r}_{BA}| = l$ otrzymujemy $V_A^u = \omega_o l$. Kierunek tego wektora przedstawia rysunek 2.B.



rys. 2. B

Wprowadzając układ współrzędnych *Oxyz* jak na rysunku 2.B. możemy przedstawić wektor prędkości punktu A przez jego składowe:

$$V_{Ax} = V_{Ax}^u + V_{Ax}^w = 0 + 2\omega_o l \cos 30^o = \sqrt{3}\omega_o l$$

$$V_{Ay} = V_{Ay}^u + V_{Ay}^w = -\omega_o l + 0 = -\omega_o l$$

$$V_{Az} = V_{Az}^u + V_{Az}^w = 0 - 2\omega_o l \sin 30^o = -\omega_o l$$

Długość wektora prędkości punktu A wynosi:

$$V_A = \sqrt{(V_{Ax})^2 + (V_{Ay})^2 + (V_{Az})^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\omega_o l\right)^2 + (-\omega_o l)^2 + (-\omega_o l)^2} = \sqrt{5}\omega_o l$$

Podobnie wyznaczymy przyśpieszenie punktu A.
Wektor przyśpieszenia jest sumą trzech wektorów:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^u + \overline{a}_A^w + \overline{a}_A^{cor}.$$

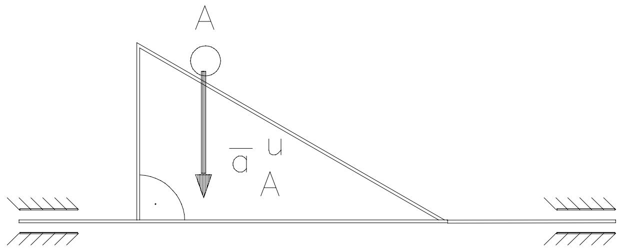
Przyśpieszenie w ruchu względnym $a_A^w = 0$, ponieważ zadana prędkość ruchu względnego jest stała ($V_A^w = const$).

Przyśpieszenie unoszenia, jako przyśpieszenie w ruchu obrotowym, może być przedstawione przez składową normalną i składową styczną:

$$\overline{a}_A^u = \overline{a}_A^{un} + \overline{a}_A^{u\tau}.$$

Składowa styczna $a_A^{u\tau} = 0$, ponieważ układ ruchomy obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega_1 = const$. Zatem $\overline{a}_A^u = \overline{a}_A^{un}$.

Składowa normalna ma wartość $a_A^{un} = \omega_o^2 l$. Wektor przyśpieszenia unoszenia przedstawiony jest na rysunku 2.C.



rys. 2. C

Przyśpieszenie Coriolisa wynosi $\overline{a}_A^{cor} = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{V}_A^w$.

Określając składowe wektorów $\overline{\omega}_1$ i $\overline{V}_A^w$ w prostokątnym układzie współrzędnych *Oxyz* jako

$$\overline{\omega}_1[\omega_o, 0, 0]$$

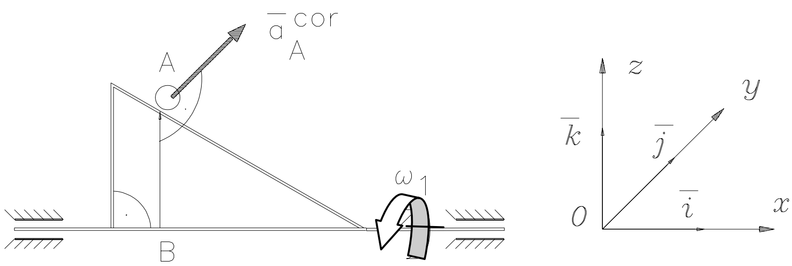
$$\overline{V}_A^w\left[\sqrt{3}\omega_o l, 0, -\omega_o l\right],$$

możemy wyznaczyć wektor przyśpieszenia Coriolisa analitycznie bezpośrednio z definicji:

$$\overline{a}_A^{cor} = 2\left[(\omega_{1y}V_{Az}^w - \omega_{1z}V_{Ay}^w)\overline{i} + (\omega_{1z}V_{Ax}^w - \omega_{1x}V_{Az}^w)\overline{j} + (\omega_{1x}V_{Ay}^w - \omega_{1y}V_{Ax}^w)\overline{k}\right] =$$

$$= 2\omega_o^2 l \cdot \overline{j}$$

Wektor przyśpieszenia Coriolisa przedstawiony jest na rysunku 2.D.



rys. 2. D

Ostatecznie przyśpieszenie bezwzględne punktu A wynosi

$$a_{Ax} = 0 + 0 = 0$$

$$a_{Ay} = 0 + 2\omega_o^2 l = 2\omega_o^2 l$$

$$a_{Az} = -\omega_o^2 l + 0 = -\omega_o^2 l\,.$$

Długość wektora przyśpieszenia punktu A wynosi:

$$a_A = \sqrt{\left(a_{Ax}\right)^2 + \left(a_{Ay}\right)^2 + \left(a_{Az}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0)^2 + \left(2\omega_o^2 l\right)^2 + \left(\omega_o^2 l\right)^2} = \sqrt{5}\omega_o^2 l\,.$$