2. Kinematyka ruchu postępowego

2.1. Zjawisko ruchu

Najczęściej obserwowanym zjawiskiem fizycznym jest ruch ciał, mamy z nim do czynienia na każdym kroku. Jednak odpowiedź na pytanie „co nazywamy ruchem?" może sprawić nieco kłopotu. Określanie pojęć zupełnie oczywistych jest czasami dosyć trudne.

Zwróć uwagę na dwie sprawy:

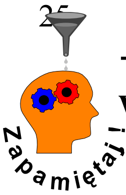
- obserwując dowolny ruch zauważymy przede wszystkim, że obserwowane ciało zmienia swoje położenie,
- aby zauważyć zmianę położenia musimy obserwować interesujące nas ciało na tle innych ciał, które nazywamy układem odniesienia.

<u>Układ odniesienia</u> jest to zespół, ciał traktowanych jako nieruchome, względem których obserwujemy zachowanie interesującego nas ciała.

Może to być np. budynek, względem którego obserwujemy ruch windy, szachownica, na której obserwujemy położenie figur , czy też znany z matematyki kartezjański układ współrzędnych.

Najczęściej wybieranym przez nas układem odniesienia jest układ związany z Ziemią. (Ziemia i wszystkie ciała sztywno z nią związane: budynki, drzewa itp. stanowią ten sam układ odniesienia)

Przy pomocy pojęcia układu odniesienia można zdefiniować zjawisko ruchu.



→ **<u>Ruchem ciała</u> nazywamy zmianę jego położenia względem dowolnie wybranego układu odniesienia.** (W definicji ruchu nie używaj słów „przemieszczenie" lub „przesunięcie"– są one zarezerwowane dla jednej z wielkości fizycznych).

Zwróć uwagę na to, że układ odniesienia można dowolnie wybierać. Dlatego bez ustalenia układu odniesienia nie można jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie: czy ciało jest w ruchu, czy w spoczynku? (np. czy człowiek siedzący w przedziale jadącego pociągu jest w ruchu, czy w spoczynku?). Ta właściwość jest nazywana względnością ruchu.

→ <u>Względność ruchu</u> polega na tym, że to samo ciało, w tej samej chwili może być zarówno w ruchu jak i w spoczynku w zależności od wybranego układu odniesienia. Np. człowiek siedzący w przedziale jadącego pociągu jest zarówno w spoczynku (względem ścian wagonu), jak i w ruchu (względem peronu).

Ciała jakie najczęściej obserwujemy poruszają się zazwyczaj skomplikowanym ruchem (np. ruch jaki wykonuje stopa jadącego rowerzysty). Jednak przeważnie nie zwraca się uwagi na ruch poszczególnych części ciała, tylko na ruch ciała jako całości (np. ruch rowerzysty w wyścigu kolarskim). W takich sytuacjach można poruszające się ciało potraktować jako punkt materialny.

Punkt materialny jest to ciało, którego rozmiary są małe w porównaniu z przebywanymi przez nie odległościami (można więc pominąć jego objętość i kształt, ale masę trzeba uwzględnić). Np. obserwując samolot lecący na dużej wysokości widzimy jedynie ruch srebrzystego punktu i nie bierzemy pod uwagę ruchu poszczególnych części samolotu.

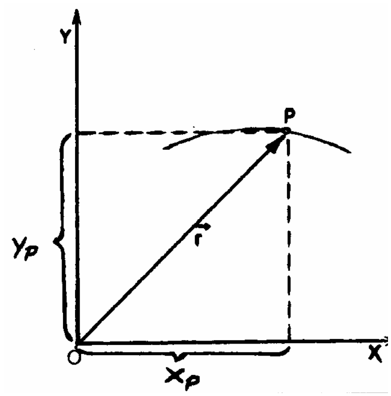
Biała smuga jaką widać czasami na niebie za lecącym samolotem wyznacza tor ruchu.

Tor ruchu jest to linia jaką zakreśla poruszające się ciało.

Ze względu na tor, ruchy dzielimy na prostoliniowe i krzywoliniowe.

Aby przedstawić ruch punktu materialnego na rysunku, jako układ odniesienia przyjmujemy dwuwymiarowy układ współrzędnych.

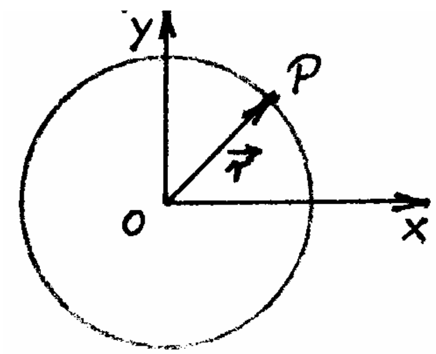
Chcąc określić zmianę położenia punktu, która następuje w każdym ruchu, trzeba najpierw opisać samo położenie. Położenie punktu materialnego w układzie współrzędnych można opisać przez podanie jego współrzędnych x_P, y_P lub przy pomocy wektora położenia $\vec{r}$. W fizyce stosuje się ten drugi sposób.



Współrzędne punktu P: x_P, y_P i wektor położenia: $\vec{r}$.

Wektor położenia $\vec{r}$ to wektor, który ma początek w początku układu współrzędnych a koniec w danym punkcie P. Wektor położenia opisuje położenie punktu materialnego w układzie współrzędnych.

W ruchu po okręgu początek układu współrzędnych umieszcza się w środku okręgu, a wektor położenia nazywa się promieniem wodzącym $\vec{r}$.



Promień wodzący $\vec{r}$

2.2. Wielkości opisujące ruch

- Czas ruchu Δt

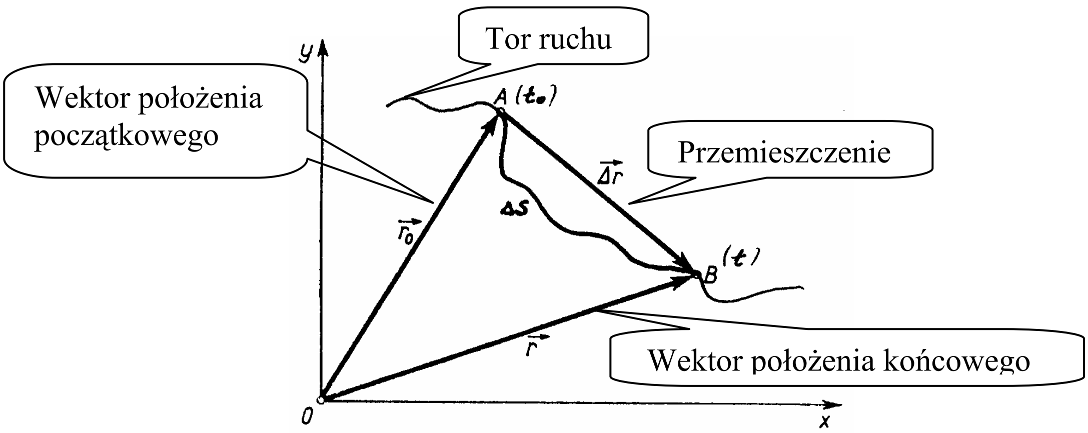
$\Delta t = t - t_0$ [s] **sekunda -** jednostka podstawowa układu SI →często przyjmujemy Δt = t biorąc t_0=0	Δt- czas przebiegu zjawiska t- końcowe wskazanie zegara t_0- początkowe wskazanie zegara

- Droga Δs

Droga jest to długość części toru przebytej przez ciało w danym czasie Δt . Najważniejszą jednostką drogi jest metr- jednostka podstawowa układu SI. (Często zamiast Δs piszemy: s).

- Przemieszczenie (przesunięcie) $\Delta\vec{r}$

Przemieszczenie jest to wektor łączący położenie początkowe i położenie końcowe ciała.



Wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ i droga Δs w płaskim układzie współrzędnych kartezjańskich.

Porównując powyższy rysunek z dodawaniem wektorów metodą trójkąta (rozdział 1.4) uzyskamy związek: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$ ($\vec{r}$ jest wektorem zamykającym trójkąt), z którego wynika wzór definicyjny:

$\Delta\vec{r} \overset{df}{=} \vec{r} - \vec{r}_o$ [m] **metr** - jednostka podstawowa układu SI	$\Delta\vec{r}$ – wektor przemieszczenia (przesunięcia) $\vec{r}$ – wektor położenia końcowego $\vec{r}_0$ – wektor położenia początkowego	Wektor przemieszczenia jest to również różnica wektorów położenia końcowego i położenia początkowego.

- wartość wektora przemieszczenia nie zależy od kształtu toru ruchu,
- dla ruchu prostoliniowego: Δr = Δs , (Δs - przebyta droga)
- dla ruchu krzywoliniowego: Δr < Δs .

- Prędkość średnia: $\vec{v}_{śr}$

$\vec{v}_{\text{śr}} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ [m/s]	$\vec{v}_{\text{śr}}$ – prędkość średnia $\Delta \vec{r}$ – przemieszczenie Δt – czas (dowolnie długi)	<u>Prędkość średnia</u> jest to stosunek przemieszczenia, które nastąpiło w dowolnie długim czasie, do tego czasu.

→ Wektor prędkości średniej ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora przemieszczenia.

→ Wartość prędkości średniej $|\vec{v}_{śr}|$ obliczamy wstawiając do poprzedniego wzoru wartość przemieszczenia $|\Delta \vec{r}|$: $|\vec{v}_{\text{sr}}| = \dfrac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$

- Szybkość średnia $v_{śr}$ (średnia wartość prędkości)

$v_{\text{śr}} = \dfrac{s_{calk}}{t_{calk}}$	$v_{śr}$ – szybkość średnia $s_{całk}$ – droga przebyta podczas całego ruchu $t_{całk}$ – całkowity czas ruchu	<u>Szybkość średnią</u> $v_{śr}$, dowolnego ruchu można obliczyć dzieląc całą drogę przebytą przez ciało, przez cały czas ruchu.

<u>Szybkość średnią</u> (czyli średnią wartość prędkości) dowolnego ruchu można obliczyć dzieląc całą drogę przebytą przez ciało (we wszystkich etapach ruchu) przez cały czas ruchu.

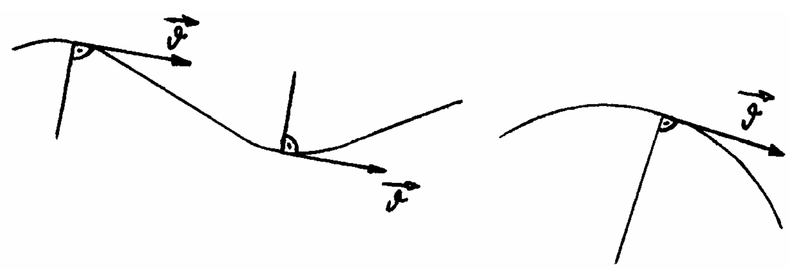
Zapamiętaj!

Uwaga: dla ruchów prostoliniowych (z wyłączeniem ruchów „tam i z powrotem") szybkość średnia jest równa wartości prędkości średniej: $v_{śr} = |v_{śr}|$, bo wartość przemieszczenia jest równa całej przebytej drodze $|\Delta \vec{r}| = s_{całk}$.

Dla ruchów krzywoliniowych (oraz dla ruchów prostoliniowych „tam i z powrotem") szybkość średnia <u>nie</u> jest równa wartości prędkości średniej: $v_{śr} \neq |v_{śr}|$, bo wartość przemieszczenia <u>nie</u> jest równa całej drodze $|\Delta \vec{r}| \neq s_{całk}$.

- Prędkość chwilowa (rzeczywista): $\vec{v}$

$\vec{v} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \Delta t \to 0$ [m/s]	$\vec{v}$ – prędkość chwilowa $\Delta \vec{r}$ – przemieszczenie Δt – czas (dowolnie krótki)	<u>Prędkość chwilowa</u> $\vec{v}$ jest to stosunek przemieszczenia $\Delta \vec{r}$, które nastąpiło w dowolnie krótkim czasie, do tego czasu.

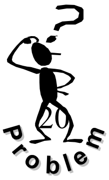


→ Wektor prędkości chwilowej jest zawsze styczny do toru (prostopadły do promienia krzywizny).

→ Wartość prędkości chwilowej v jest nazywana <u>szybkością</u>, obliczamy ją dzieląc wartość przemieszczenia, które nastąpiło w dowolnie krótkim czasie (jest ona równa przebytej drodze) przez ten czas.

Wartość prędkości chwilowej v (czyli szybkość wskazuje szybkościomierz samochodu).

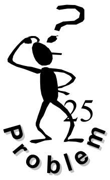
Wartość prędkości chwilowej samochodu można też zmierzyć policyjnym radarem:



Co autor miał na myśli pisząc „prędkość” (bez żadnego przymiotnika),

- prędkość średnią, czy prędkość chwilową ?

Ponieważ do opisu ruchu posługujemy się najczęściej prędkością chwilową, słowo: „prędkość” oznacza zawsze prędkość chwilową. Gdy posługujemy się prędkością średnią, jest to wyraźnie podkreślone: „prędkość średnia”.



- tylko wartość prędkości, czy wektor prędkości (z uwzględnieniem kierunku i zwrotu)?

Opisując ruch ciała interesuje nas przeważnie wartość prędkości chwilowej (czyli szybkość), dlatego w wielu podręcznikach słowo „prędkość” oznacza właśnie wartość prędkości. Gdy trzeba uwzględnić również inne cechy wektora używa się sformułowania: „wektor prędkości”.

- Przyrost prędkości $\overrightarrow{\Delta v}$

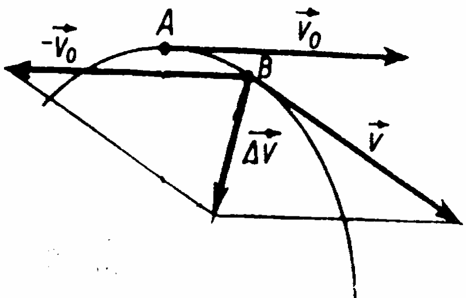
df $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ [m/s]	$\Delta\vec{v}$ – przyrost prędkości $\vec{v}$ – prędkość końcowa $\vec{v}_0$ – prędkość początkowa	Przyrost prędkości jest to wektorowa różnica prędkości końcowej i prędkości początkowej.

Dla ruchu prostoliniowego:

$\Delta v = v - v_0$	Δv – wartość przyrostu prędkości v – szybkość końcowa v_0 – szybkość początkowa

W ruchu prostoliniowym przyrost prędkości jest wynikiem zmiany wartości wektora prędkości.

- W ruchu krzywoliniowym, w którym wartość prędkości jest stała, przyrost prędkości jest wynikiem zmiany kierunku wektora prędkości.



W ruchu krzywoliniowym przyrost prędkości występuje nawet wtedy, gdy wartość prędkości jest stała: $v = v_0$

- Przyspieszenie $\vec{a}$

$\vec{a} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ [m/s^2]	$\vec{a}$ – przyspieszenie $\Delta \vec{v}$ – przyrost prędkości Δt – czas	<u>Przyspieszenie</u> jest to stosunek przyrostu prędkości do czasu w jakim ten przyrost nastąpił.

Podobnie jak dla prędkości można rozróżniać przyspieszenie chwilowe (wyznaczane w dowolnie krótkim czasie) i przyspieszenie średnie (wyznaczane w dowolnie długim przedziale czasu), jednakże dla ruchów jednostajnie zmiennych przyspieszenia te są sobie równe, więc nie będziemy ich rozróżniać.

→Do opisu ruchu po okręgu wprowadza się ponadto następujące wielkości:

- <u>Okres ruchu</u> T - jest to czas jednego pełnego obiegu ciała po okręgu.

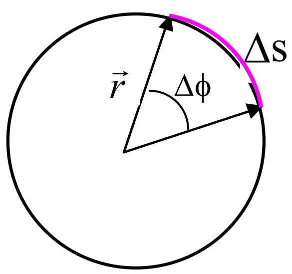
- Częstotliwość f

$f = \dfrac{1}{T}$ $\left[1Hz = \dfrac{1}{s}\right]$ **herc**	f - częstotliwość T - okres ruchu	<u>Częstotliwość</u> jest to odwrotność okresu.

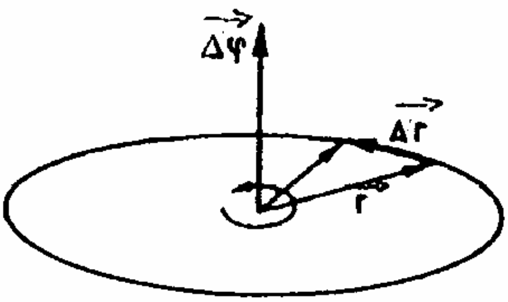
<u>Częstotliwość</u> jest to również liczba pełnych obiegów po okręgu wykonanych w czasie jednej sekundy.

Jednostką częstotliwości jest <u>herc</u>. Jeden herc jest to częstotliwość takiego ruchu, w którym jeden obieg po okręgu jest wykonany w ciągu jednej sekundy.

- <u>Droga kątowa</u> Δϕ - jest to kąt zakreślony przez promień wodzący w czasie ruchu. (Droga kątowa jest niekiedy nazywana fazą ruchu).

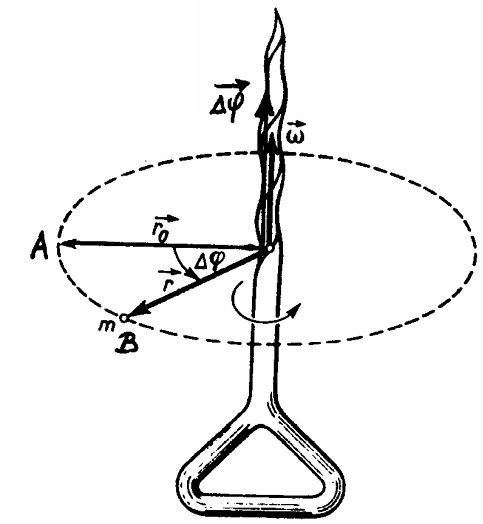
	$\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s}{r}$ $\left[1rad = \dfrac{1m}{1m} = 1\right]$ **radian** - jednostka uzupełniająca układu SI	$\Delta\phi$ – droga kątowa (kąt zakreślony przez promień wodzący) Δs - droga liniowa r - promień okręgu

Droga kątowa może być traktowana jako wektor $\Delta\vec{\varphi}$, którego kierunek jest prostopadły do okręgu,



a zwrot określa **<u>reguła śruby prawoskrętnej</u>:**

Śrubę ustawiamy prostopadle do okręgu i obracamy ją „w ślad” za poruszającym się ciałem. Ruch postępowy śruby wyznacza zwrot wektora $\Delta\vec{\varphi}$.



Z powyższego wzoru wynika związek między drogą Δs i drogą kątową Δϕ:

$\Delta s = \Delta\varphi \cdot r$	Δs – droga Δϕ - droga kątowa (wyrażona w radianach) r – promień okręgu

- Prędkość kątowa $\vec{\omega}$

$\vec{\omega} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ $\left[1\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}\right]$	ω – prędkość kątowa $\Delta\phi$ - droga kątowa Δt - czas	<u>Prędkość kątowa</u> jest to stosunek kąta zakreślonego w danym czasie przez promień wodzący do tego czasu.

Prędkość kątowa jest wielkością wektorową , której kierunek jest prostopadły do okręgu , a zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej (rysunek powyżej).
Dla odróżnienia od prędkości kątowej $\vec{\omega}$, prędkość $\vec{v}$ nazywa się <u>prędkością liniową</u>.

Podobnie jak dla prędkości liniowej $\vec{v}$ można rozróżniać prędkość kątową chwilową (wyznaczaną w dowolnie krótkim czasie) i prędkość kątową średnią (wyznaczaną w dowolnie długim przedziale czasu), jednakże dla ruchu jednostajnego po okręgu prędkości te są sobie równe, więc nie będziemy ich rozróżniać.

Związek między prędkością liniową i prędkością kątową:

$v = \omega r$	v – prędkość liniowa ω - prędkość kątowa r – promień okręgu

- Przyrost prędkości kątowej Δω

$\Delta\vec{\omega} \overset{df}{=} \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$ $\left[1\frac{rad}{s} = \frac{1}{s}\right]$	$\Delta\vec{\omega}$ – przyrost prędkości kątowej $\vec{\omega}$ - prędkość kątowa końcowa $\vec{\omega}_0$ – prędkość początkowa	Przyrost prędkości kątowej jest to wektorowa różnica wektorów prędkości kątowej końcowej i początkowej.

Wektory: $\Delta\vec{\omega}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$ mają taki sam kierunek – prostopadły do okręgu.

- Przyspieszenie kątowe ε

$\vec{\varepsilon} \overset{df}{=} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ $\left[1\frac{rad}{s^2} = \frac{1}{s^2}\right]$	$\vec{\varepsilon}$ – przyspieszenie kątowe $\Delta\vec{\omega}$ - przyrost prędkości kątowej Δt - czas	Przyspieszenie kątowe jest to stosunek przyrostu prędkości kątowej do czasu, w jakim ten przyrost nastąpił.

Wektor przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ ma taki sam kierunek (prostopadły do okręgu) i zwrot jak przyrost prędkości kątowej $\Delta\vec{\omega}$.
Dla odróżnienia od przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$, przyspieszenie $\vec{a}$ nazywa się przyspieszeniem liniowym.

Związek między przyspieszeniem liniowym stycznym do okręgu a_s i przyspieszeniem kątowym ε :

$a_s = \varepsilon \cdot r$	a_s - przyspieszenie liniowe styczne do okręgu ε - przyspieszenie kątowe r – promień okręgu

2.3. Podział ruchów postępowych

Ruchy postępowe dzielimy ze względu na dwa kryteria:

- Ze względu na kształt toru na:
  - ruchy prostoliniowe, których torem jest linia prosta,
  - ruchy krzywoliniowe, których torem jest dowolna krzywa. Szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego jest ruch, którego torem jest okrąg.

- Ze względu na wartość prędkości na:
  - ruchy jednostajne, w których wartość prędkości jest stała,
  - ruchy zmienne, w których wartość prędkości się zmienia.

    Ruchy zmienne można z kolei podzielić na ruchy:
    - niejednostajnie zmienne, w których wartość przyspieszenia zmienia się,
    - jednostajnie zmienne, w których wartość przyspieszenia jest stała a wartość prędkości zmienia się liniowo.

      Wreszcie ruchy jednostajnie zmienne dzielą się na:

      ⇒ ruch jednostajnie przyspieszony, w którym prędkość liniowo rośnie,

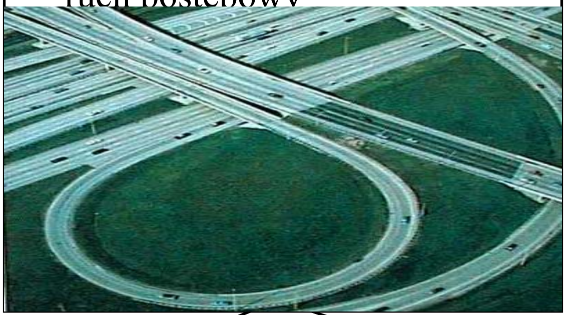
      ⇒ ruch jednostajnie opóźniony, w którym prędkość liniowo maleje.

Wskutek takiego podziału w nazwie każdego ruchu występują dwa przymiotniki – jeden określa wartość prędkości, a drugi kształt toru.

Diagram przedstawiający podział ruchów postępowych jest na rysunku poniżej:

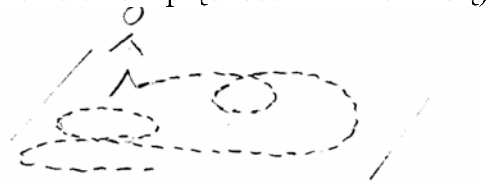
Podział ruchów postępowych ze względu na kształt toru:

ruch postępowy



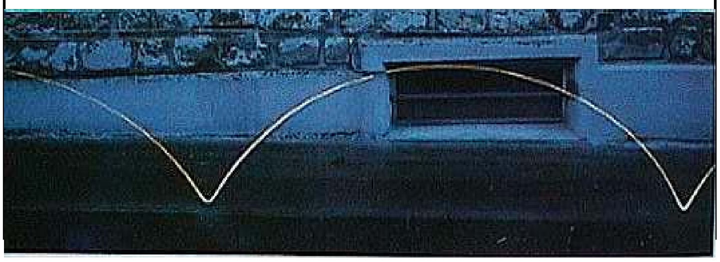
prostoliniowy
(kierunek wektora prędkości $\vec{v}$ nie zmienia się)

krzywoliniowy
(kierunek wektora prędkości $\vec{v}$ zmienia się)



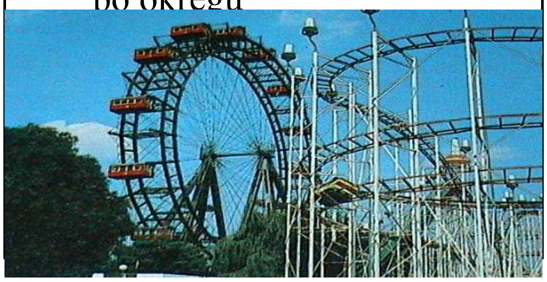
krzywoliniowy ślad pozostawiony przez łyżwiarza na lodzie

po innych krzywych

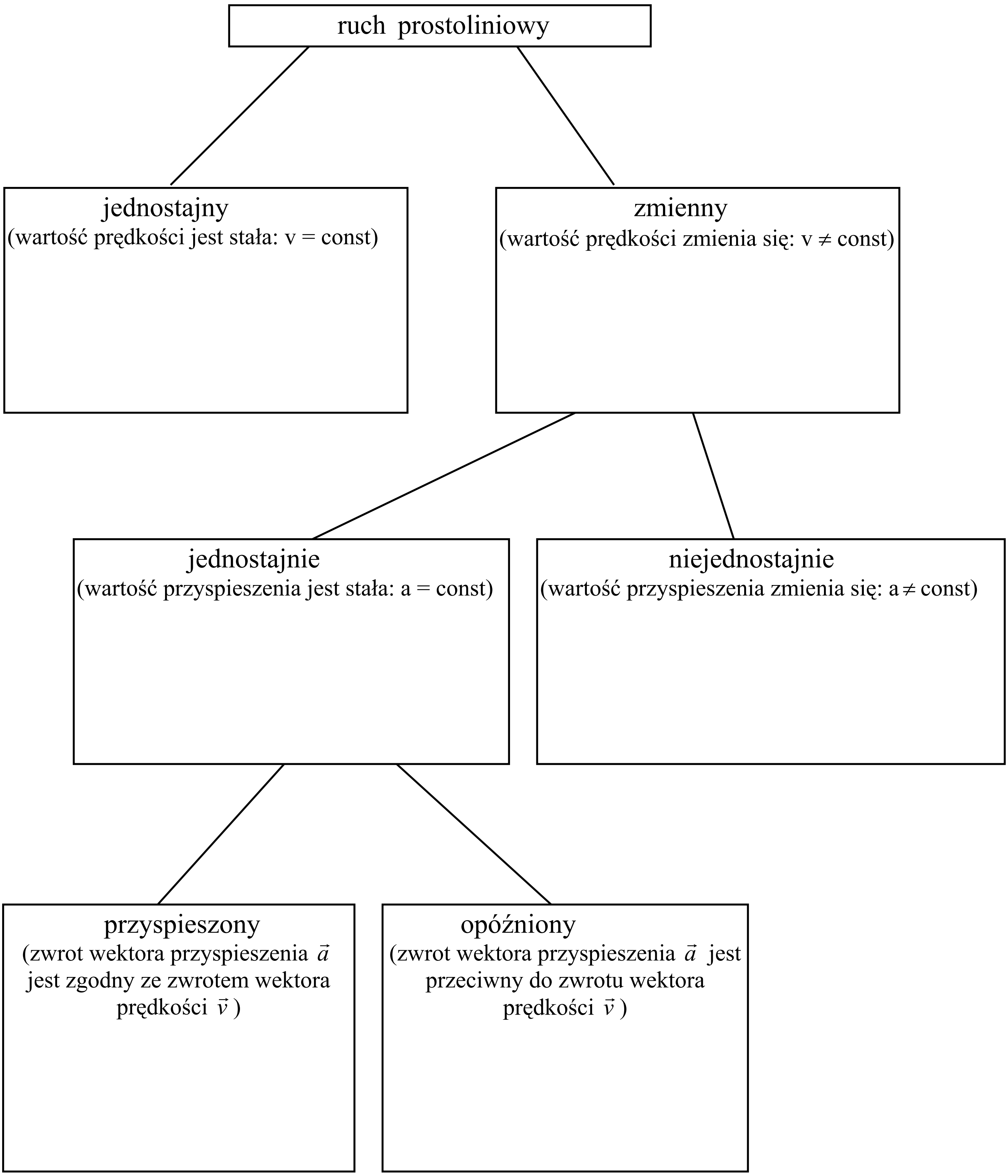


(Zdjęcie przedstawia tor ruchu małej lampki przymocowanej do koła rowerowego. Linia ta nazywa się cykloidą).

po okręgu



Podział ruchów prostoliniowych ze względu na wartość prędkości:



Podział ruchów po okręgu ze względu na wartość prędkości:

- ruch po okręgu
  - jednostajny
    (wartość prędkości kątowej jest stała: $\omega = const$)
  - zmienny
    (wartość prędkości kątowej zmienia się: $\omega \neq const$)
    - jednostajnie
      (wartość przyspieszenia kątowego jest stała: $\varepsilon = const$)
      - przyspieszony
        (zwrot wektora przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ jest zgodny ze zwrotem wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$)
      - opóźniony
        (zwrot wektora przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$)
    - niejednostajnie
      (wartość przyspieszenia kątowego zmienia się: $\varepsilon \neq const$)

2.4. Ruch prostoliniowy jednostajny

Ruch prostoliniowy jednostajny jest to ruch, którego torem jest linia prosta a wartość prędkości jest stała (np. ruch windy jadącej między piętrami).

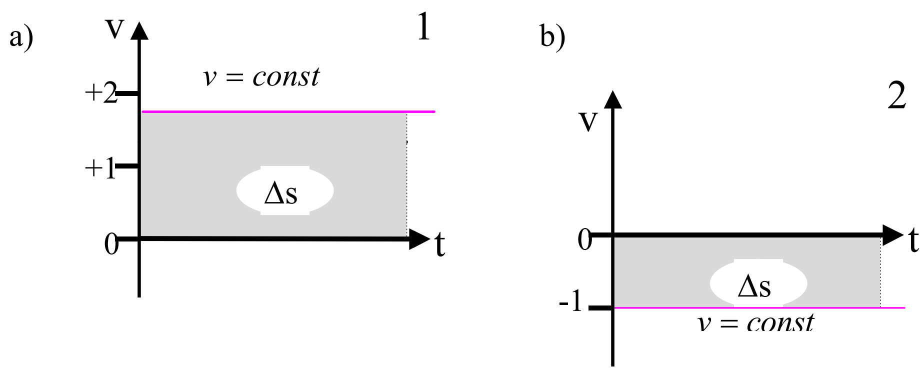
a) prędkość

- Słowo „jednostajny" oznacza, że wartość prędkości jest stała: v = const.
  (Słowo „constans" oznacza wielkość stałą).
- W ruchu prostoliniowym wektor prędkości leży na prostej, po której porusza się ciało, więc również kierunek wektora prędkości jest stały.
- Z powyższych informacji wynika, że w ruchu prostoliniowym jednostajnym wektor prędkości jest stały: $\vec{v} = const$, dlatego prędkość średnia jest równa prędkości chwilowej: $\vec{v}_{śr} = \vec{v}$ (szybkość średnia też jest równa szybkości chwilowej).

$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = const$	v – wartość prędkości (szybkość) w ruchu jednostajnym prostoliniowym Δs – droga Δt - czas

Umieszczając początek układu współrzędnych w miejscu rozpoczęcia ruchu można zapisać przebytą drogę jako s zamiast Δs. Natomiast rozpoczynając pomiar czasu w momencie startu ciała można zapisać czas ruchu jako t zamiast Δt. Otrzymujemy wówczas prostszą postać wzoru :

$v = \dfrac{s}{t} = constans$	v - szybkość w ruchu jednostajnym prostoliniowym s – droga t - czas



Wykresy prędkości w ruchu jednostajnym dla dwóch ciał 1 i 2 poruszających się w przeciwne strony.

Z wykresu prędkości v(t) można odczytać drogę przebytą przez ciało jako pole powierzchni figury zawartej między linią wykresu a osią czasu.

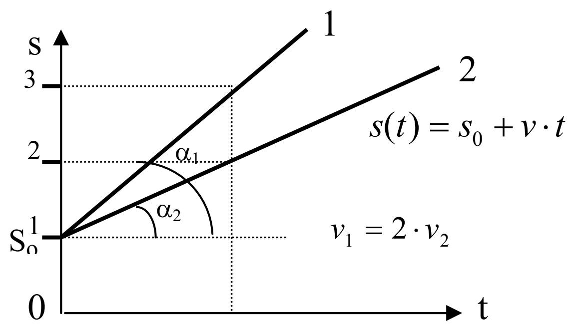
Jeżeli dwie prędkości mają przeciwne znaki to znaczy, że wektory tych prędkości mają przeciwne zwroty.

Z powyższych wykresów odczytujemy następujące informacje:
- ciała nr 1 i nr 2 poruszają się w przeciwne strony (np. ciało 1 w prawo a ciało 2 w lewo), gdyż ich prędkości mają przeciwne znaki (a więc i przeciwne zwroty),
- ciało nr 1 ma dwa razy większą szybkość niż ciało nr 2,
- w tym samym czasie ciało 1 przebyło dwa razy większą drogę niż ciało 2, bo pole figury na wykresie a) jest dwa razy większe niż na wykresie b).

b) droga

→ w ruchu jednostajnym, prostoliniowym drogi przebyte w jednakowych odstępach czasu są jednakowe.

$s(t) = s_0 + v \cdot t$	s – droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym s_0 -droga początkowa przebyta od chwili rozpoczęcia ruchu do momentu rozpoczęcia pomiaru czasu (najczęściej przyjmujemy $s_0 = 0$) v – szybkość t - czas



Animacja: ruch jednostajny.
Wpisz initial position (polozenie poczatkowe): 10,00
initial velocity (predkosc poczatkowa): np. 8,00
acceleration (przyspieszenie): 0,00

Wykresy drogi w ruchu jednostajnym dla ciał 1 i 2 poruszających się z różnymi prędkościami

Zapamiętaj !

Z wykresu drogi s(t) można odczytać wartość prędkości v jako tangens kąta nachylenia linii wykresu α: $\boxed{v = \mathrm{tg}\,\alpha}$

Z powyższych wykresów można odczytać następujące informacje:
- do momentu rozpoczęcia obserwacji obydwa ciała 1 i 2 przebyły drogę s_o,
- ciało nr 1 ma dwa razy większą prędkość niż ciało nr 2, gdyż: $\mathrm{tg}\alpha_1 = 2\,\mathrm{tg}\alpha_2$ (ale $\alpha_1 \neq 2 \cdot \alpha_2$),

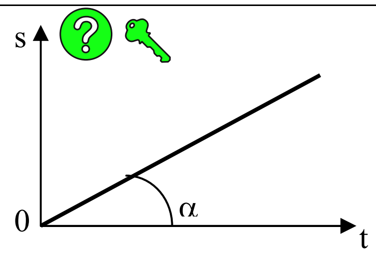
Uwaga !

Droga przebywana przez ciało (definiowana jako długość części toru) nie może zmniejszać się wraz z upływem czasu.

Przyjmując drogę początkową równą zero otrzymujemy najczęściej spotykaną postać wzoru na drogę w ruchu jednostajnym:

Równanie drogi w ruchu jednostajnym $\Delta s = v \cdot \Delta t$ → często przyjmujemy $\Delta s = s$, biorąc $s_0 = 0$	Δs – droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym v – prędkość Δt – czas

Prostsza postać wzoru i odpowiadający mu wykres:

$s(t) = v \cdot t$	s-droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym przebyta w czasie t. v – szybkość t - czas	Najprostszy wykres drogi w ruchu jednostajnym.

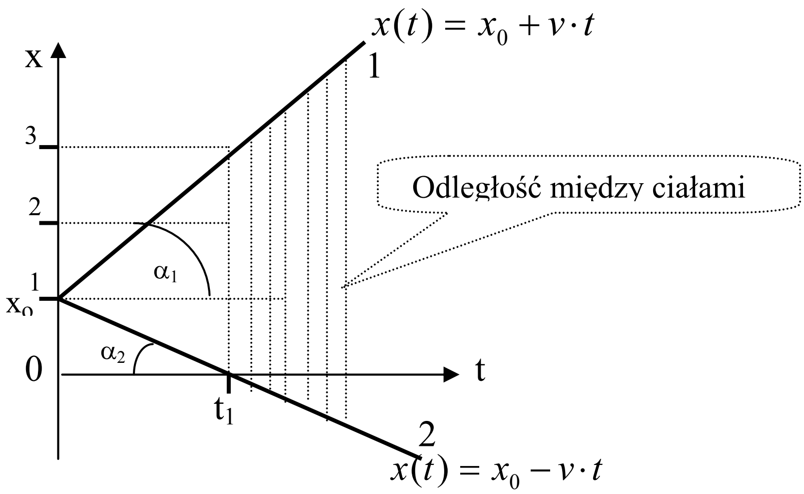
Tak jak z poprzednich wykresów s(t) również w tym przypadku można odczytać prędkość jako tangens kąta nachylenia linii wykresu: v = tgα.

c) położenie

Obierając układ współrzędnych (stanowiący nasz układ odniesienia) tak aby oś OX leżała na prostej, wzdłuż której porusza się ciało, wektor położenia $\vec{r}$ możemy zastąpić położeniem ciała na osi OX.

Równanie położenia w ruchu jednostajnym ma podobną postać jak równanie drogi $s(t) = s_0 + v \cdot t$:

zał. ciało oddala się od początku układu współrzędnych	
$x(t) = x_0 + v \cdot t$	x - położenie x_0- położenie początkowe v- prędkość Δt- czas
zał. ciało zbliża się do początku układu współrzędnych	
$x(t) = x_0 - v \cdot t$	x - położenie x_0- położenie początkowe v- prędkość Δt- czas



Wykresy położenia w ruchu jednostajnym dla tych samych ciał 1 i 2 poruszających się w przeciwne strony.

Z powyższych wykresów można odczytać następujące informacje:

- w chwili rozpoczęcia obserwacji obydwa ciała 1 i 2 znajdowały się w odległości x_o od początku układu współrzędnych,
- ciało 1 oddala się od początku układu współrzędnych, a ciało 2 zbliża się do początku układu (ciała poruszają się w przeciwne strony),
- w czasie t_1 ciało nr 2 dotrze do początku układu współrzędnych, minie go i później będzie się od niego oddalać,
- wartości prędkości ciał odczytujemy tak jak z wykresu drogi s(t): $v_1=tg\alpha_1$, $v_2=tg\alpha_2$, ponieważ $tg\alpha_1 = 2\ tg\alpha_2$, prędkość ciała 1 jest dwa razy większa niż ciała 2: $v_1 = 2\ v_2$.
- odległość między ciałami (mierzona jako długość pionowych odcinków między liniami wykresów) ciągle rośnie.

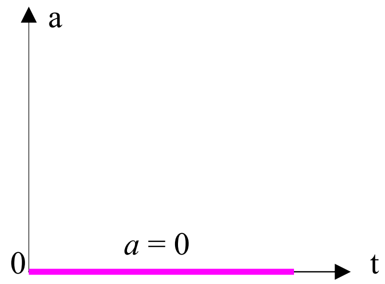
→ położenie ciała x(t), podobnie jak odległość ciała od miejsca startu, może maleć wraz z upływem czasu,

→ z wykresów położenia x(t) można odczytać odległość między ciałami jako długość pionowych odcinków między liniami wykresów,

→ gdy ciała poruszają się w tę samą stronę (wektory prędkości mają zgodne zwroty), wykresy drogi s(t) są takie same jak wykresy położenia x(t) i wtedy odległość między ciałami można również odczytać jako długość pionowych odcinków między liniami wykresów s(t),

d) przyspieszenie

z definicji przyspieszenia wynika, że przy stałej prędkości przyspieszenie jest równe zero: $a = 0$.



Wykres przyspieszenia w ruchu jednostajnym.

e) obliczanie prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami

Zdarza się czasami, że to samo ciało porusza się równocześnie z dwiema prędkościami. Na przykład statek płynący po rzece ma dwie prędkości:

- prędkość własną $\vec{v}_1$. Jest to prędkość względem wody, którą statek ma dzięki pracującym silnikom. (Statek płynący po stojącej wodzie ma tylko prędkość własną),
- prędkość unoszenia $\vec{v}_2$. Jest to prędkość, z jaką woda płynie w rzece i z jaką unosi przedmioty na powierzchni. (Statek płynący po rzece z wyłączonymi silnikami porusza się, tak jak tratwa, tylko z prędkością unoszenia).

Dla ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami można obliczyć prędkość wypadkową.

<u>Prędkość wypadkowa</u> jest to wektorowa suma wszystkich prędkości z jakimi równocześnie porusza się ciało:

$\vec{v}_{wyp} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$	v_{wyp} – prędkość wypadkowa ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami: $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$

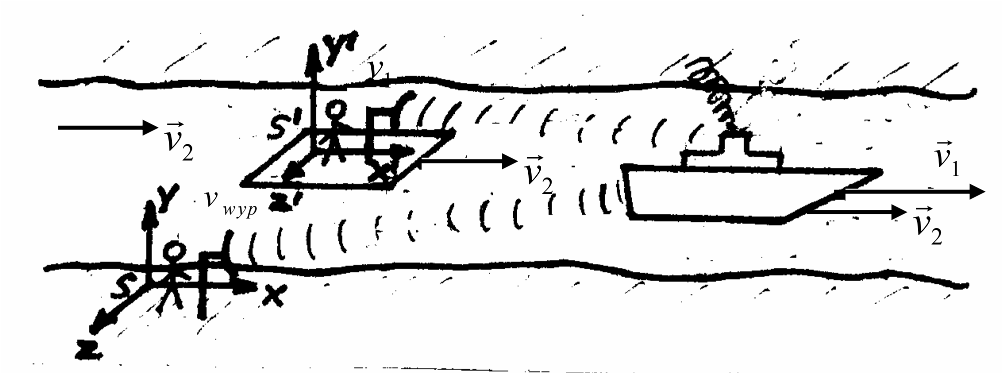
Wartość prędkości wypadkowej oblicza się zgodnie z regułami dodawania wektorów (rozdział 1.4.):

- Obydwa wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ mają ten sam kierunek i zgodne zwroty

$v_{wyp} = v_1 + v_2$	v_{wyp} – wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ o zgodnych zwrotach

Zapamiętaj !

Aby obliczyć wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami o zgodnych zwrotach trzeba dodać wartości tych prędkości.



Statek płynie z prądem rzeki, porusza się równocześnie z dwiema prędkościami: z prędkością własną $\vec{v}_1$ i z prędkością unoszenia $\vec{v}_2$.

Na rysunku można dostrzec, że:

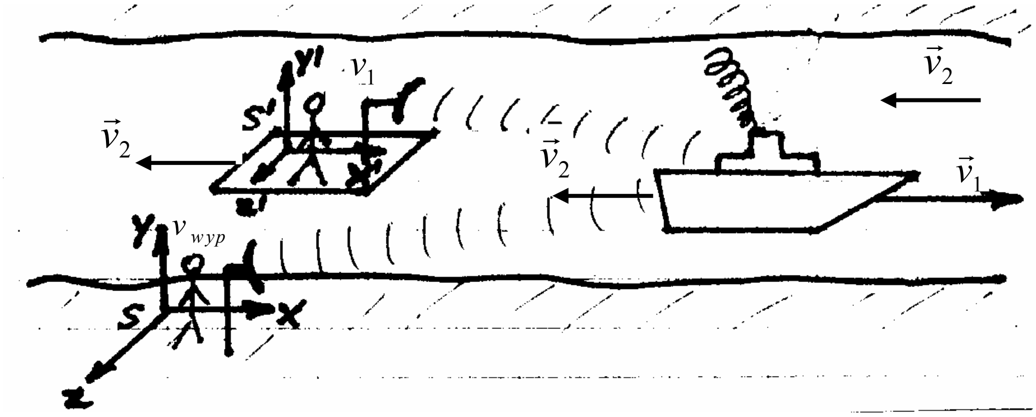
- woda w rzece płynie z prędkością $\vec{v}_2$, unosząc z tą prędkością tratwę i statek,
- oprócz prędkości unoszenia statek ma prędkość własną $\vec{v}_1$, której wartość mierzy, przy pomocy radaru, obserwator w układzie odniesienia S' na tratwie,
- wartość prędkości wypadkowej v_{wyp} statku względem brzegu mierzy przy pomocy własnego radaru nieruchomy obserwator w układzie S, na brzegu.

- Wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ mają ten sam kierunek i przeciwne zwroty

$v_{wyp} = v_1 - v_2$	v_{wyp} – wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ o przeciwnych zwrotach

Zapamiętaj !

Aby obliczyć wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prędkościami o przeciwnych zwrotach trzeba odjąć wartości tych prędkości.



Statek płynie pod prąd, poruszając się równocześnie z dwiema prędkościami: z prędkością własną $\vec{v}_1$ i z prędkością unoszenia $\vec{v}_2$.

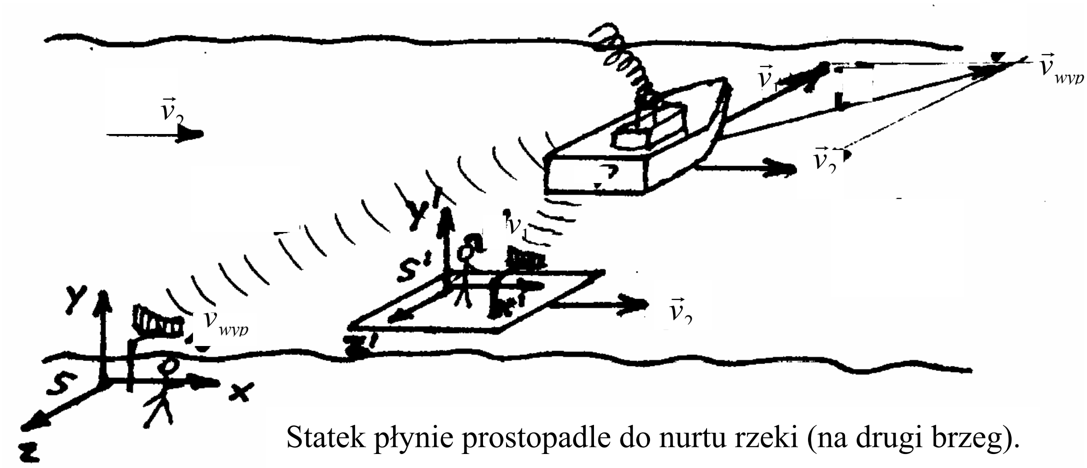
Na rysunku można dostrzec, że:

- woda w rzece unosi z prędkością $\vec{v}_2$ tratwę i statek,
- wartość prędkości własnej v_1 statku, mierzy obserwator w układzie odniesienia S' na tratwie,
- wartość prędkości wypadkowej v_{wyp} statku mierzy nieruchomy obserwator w układzie S, na brzegu.

- Wektory prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są do siebie prostopadłe

$v_{wyp} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	v_{wyp} – wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prostopadłymi prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$

Wartość prędkości wypadkowej ciała poruszającego się równocześnie z dwiema prostopadłymi do siebie prędkościami obliczamy z twierdzenia Pitagorasa, jako długość przekątnej prostokąta zbudowanego na wektorach obu prędkości.



Statek płynie prostopadle do nurtu rzeki (na drugi brzeg).

Tak jak w poprzednich przypadkach wartość prędkości własnej v_1 statku mierzy obserwator na tratwie unoszonej przez wodę z prędkością $\vec{v}_2$, a wartość prędkości wypadkowej v_{wyp} statku nieruchomy obserwator na brzegu.

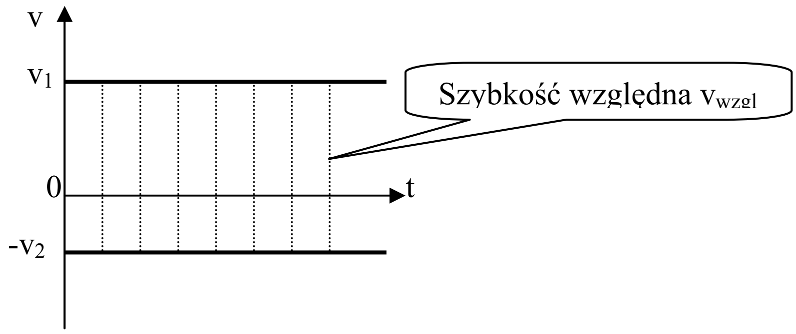
f) obliczanie szybkości względnej dwóch ciał

Szybkość względna jest to wartość prędkości mierzona przez obserwatora, który również jest w ruchu.

- Ciała poruszają się w przeciwne strony

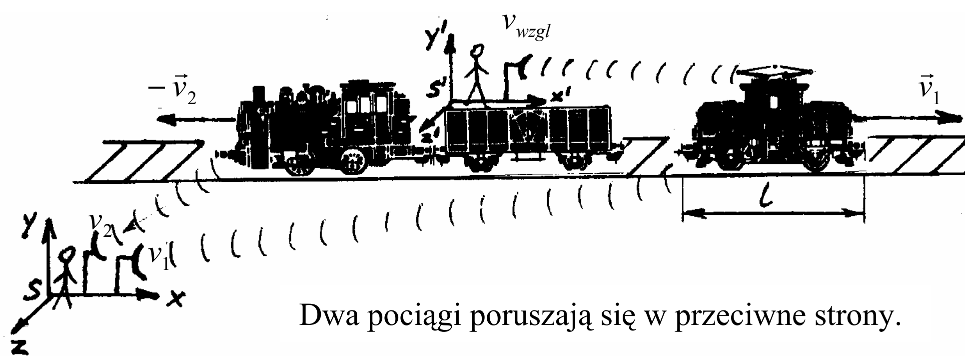
$v_{wzgl} = v_1 + v_2$	v_{wzgl} – szybkość względna dwóch ciał poruszających się w przeciwne strony z prędkościami: v_1 i v_2

Szybkość względną dwóch ciał poruszających się w przeciwne strony obliczamy dodając szybkości obydwu ciał, niezależnie od tego, czy ciała oddalają się, czy zbliżają się do siebie.



Wykresy prędkości dwóch ciał poruszających się ruchem jednostajnym w przeciwne strony.

Z wykresów zauważymy, że:
- ponieważ wektory prędkości obu ciał mają przeciwne zwroty, przypisano im wartości o przeciwnych znakach,
- długość pionowych odcinków między liniami wykresów wyznacza szybkość względną ciał: $v_{wzgl} = v_1 + v_2 = const$ (w tym przypadku szybkość względna jest stała – pionowe odcinki mają taką samą długość).



Dwa pociągi poruszają się w przeciwne strony.

Z rysunku można dostrzec, że:
- szybkości obu pociągów względem ziemi v_1 i v_2 mierzy, przy pomocy radaru nieruchomy obserwator w układzie odniesienia S związanym z ziemią,
- szybkość względną pociągów v_{wzgl} mierzy, przy pomocy swego radaru, obserwator w układzie S' poruszający się wraz z pociągiem.

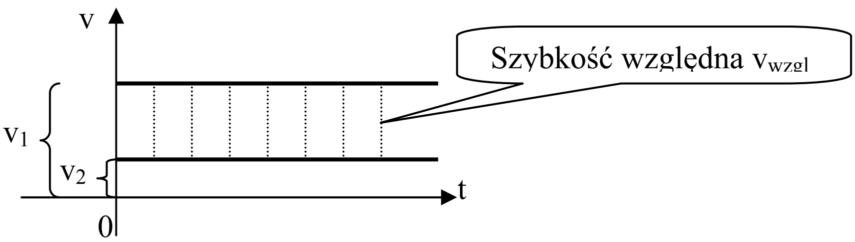
→Przypomnij sobie, że znajdując się w jadącym pociągu i obserwując drugi pociąg jadący obok w przeciwną stronę, widzimy bardzo szybki ruch tego pociągu, gdyż porusza się on względem nas z szybkością względną równą sumie szybkości obu pociągów.

Szybkość względną mijających się pociągów można również obliczyć dzieląc długość l wymijanego pociągu przez czas mijania mierzony przez obserwatora w układzie S'.

- Ciała poruszają się w tę samą stronę

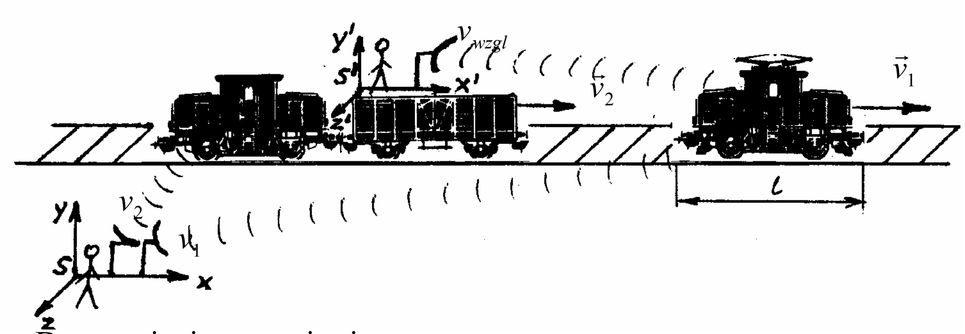
$v_{wzgl} = v_1 - v_2$	v_{wzgl} – szybkość względna dwóch ciał poruszających się w tę samą stronę z prędkościami: v_1 i v_2

Szybkość względną dwóch ciał poruszających się w tę samą stronę obliczamy odejmując szybkości obydwu ciał, niezależnie od tego, czy ciała poruszają się w lewo, czy w prawo.



Wykresy prędkości dwóch ciał poruszających się ruchem jednostajnym w tę samą stronę.

Z wykresów zauważymy, że:
- ponieważ wektory prędkości obu ciał mają zgodne zwroty, przypisano im wartości o takich samych znakach,
- długość pionowych odcinków między liniami wykresów wyznacza szybkość względną ciał: $v_{wzgl} = v_1 - v_2 = const$ (w tym przypadku szybkość względna jest stała – pionowe odcinki mają taką samą długość).



Dwa pociągi poruszają się w tę samą stronę.

Z rysunku można dostrzec, że:
- szybkości obu pociągów względem ziemi v_1 i v_2 mierzy, tak jak poprzednio nieruchomy obserwator w układzie odniesienia S związanym z ziemią,
- szybkość względną pociągów v_{wzgl} mierzy obserwator w układzie S' poruszający się wraz z pociągiem.

→Przypomnij sobie, że znajdując się w jadącym pociągu i obserwując drugi pociąg, który nas wyprzedza widzimy powolny ruch tego pociągu, gdyż porusza się on względem nas z szybkością względną równą różnicy szybkości obu pociągów.

5

Szybkość względną mijających się pociągów można, również w tym przypadku, obliczyć dzieląc długość l wymijanego pociągu przez czas mijania mierzony przez obserwatora w układzie S'.

2.5. Ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony

Ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony jest to ruch, którego torem jest linia prosta, w którym prędkość liniowo rośnie a przyspieszenie jest stałe: $\vec{a} = const$.

W ruchu przyspieszonym zwrot wektora przyspieszenia jest zgodny ze zwrotem wektora prędkości. Jeżeli prędkość jest dodatnia (bo wektor $\vec{v}$ jest zwrócony w prawo), to przyspieszenie też jest dodatnie (bo wektor przyspieszenia $\vec{a}$ też jest zwrócony w prawo).

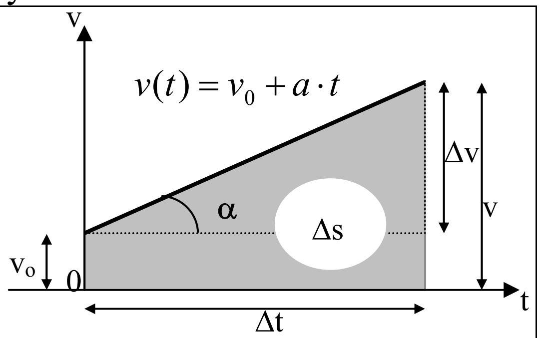
Przykładem ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego jest ruch jaki wykonuje ciało spadając swobodnie w próżni lub ruch kuli toczącej się, bez tarcia, w dół równi pochyłej.

a) prędkość

→ W ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym wartość prędkości v równomiernie (liniowo) rośnie. Wektor prędkości $\vec{v}$ leży na prostej, po której porusza się ciało, więc kierunek i zwrot wektora prędkości jest stały.

$v = v_0 + a \cdot \Delta t$	v – szybkość końcowa (po upływie czasu Δt) w ruchu jednostajnie przyspieszonym v_0 – szybkość początkowa a – przyspieszenie Δt - czas

Prostsza postać wzoru i odpowiadający mu wykres:

$v(t) = v_0 + a \cdot t$	v – szybkość końcowa (po upływie czasu t) w ruchu jednostajnie przyspieszonym v_0 – szybkość początkowa a – przyspieszenie t - czas	 Wykres prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

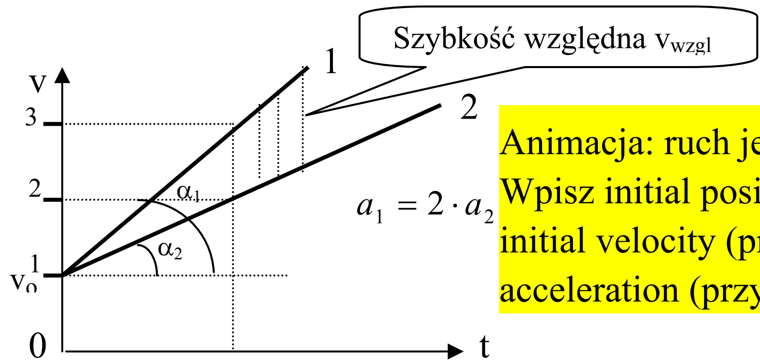
Z wykresu prędkości v(t) można odczytać drogę przebytą przez ciało jako pole powierzchni figury zawartej pod linią wykresu (tak jak w ruchu jednostajnym). Pole trapezu zaznaczonego na wykresie można obliczyć dodając do powierzchni prostokąta pole powierzchni trójkąta.

Zapamiętaj !

Z wykresu prędkości v(t) można odczytać przyspieszenie a jako tangens kąta α nachylenia linii wykresu:

$$\boxed{a = tg\alpha}$$

Zapamiętaj !



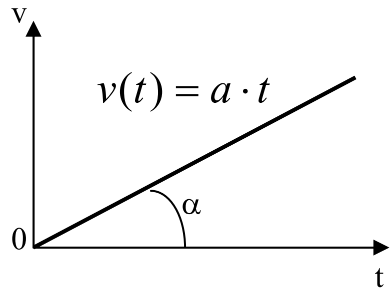
Animacja: ruch jednostajnie przyspieszony.
Wpisz initial position (polozenie poczatkowe): 0,
initial velocity (predkosc poczatkowa): np. 2,00
acceleration (przyspieszenie): np. 1,00

Wykresy prędkości dla dwóch ciał poruszających się ruchem jednostajnie przyspieszonym z różnymi przyspieszeniami.

Z powyższych wykresów odczytujemy następujące informacje:

- obydwa ciała poruszają się w tę samą stronę (np. w prawo) bo ich prędkości mają ten sam znak (a więc i ten sam zwrot),
- szybkość początkowa v_o obydwu ciał jest jednakowa,
- przyspieszenie ciała nr 1 jest dwa razy większe niż ciała nr 2, gdyż: tgα_1 = 2 tgα_2 (ale $\alpha_1 \neq 2 \cdot \alpha_2$),
- szybkość względna tych ciał, mierzona jako długość pionowych odcinków miedzy liniami wykresów, rośnie.

Dla ruchu bez prędkości początkowej (v_o=0) poprzedni wzór przyjmuje postać:

$v(t) = a \cdot t$	v – szybkość końcowa (po upływie czasu t) w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej a – przyspieszenie t - czas	 Najprostszy wykres prędkości w ruchu jednostajnie przyspieszonym (v_o=0).

→ Szybkość średnią w ruchu jednostajnie przyspieszonym można obliczać na dwa sposoby:

- tak jak w każdym ruchu prostoliniowym dzieląc całą drogę przebytą przez ciało przez cały czas ruchu:

$$\boxed{v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

lub

- jako średnią arytmetyczną z szybkości początkowej i szybkości końcowej:

$$v_{śr} = \frac{v_0 + v}{2}$$

v_0 - szybkość początkowa

v - szybkość końcowa

Drugi sposób można stosować tylko do niektórych rodzajów ruchu (np. dla ruchów jednostajnie zmiennych).

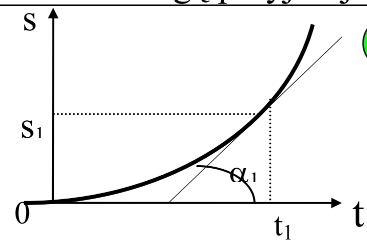
b) droga

Równanie drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	s(t) – droga przebyta w czasie t ruchem jednostajnie przyspieszonym s_0 – droga początkowa v_0 –szybkość początkowa a - przyspieszenie

Najczęściej przyjmujemy $s_o = 0$ otrzymując wzór:

$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	s(t) – droga przebyta w czasie t ruchem jednostajnie przyspieszonym v_0 –szybkość początkowa a - przyspieszenie

Dla ruchu bez prędkości początkowej (v_o= 0) wzór na drogę przyjmuje postać:

$s(t) = \frac{at^2}{2}$	s(t) – droga przebyta w czasie t ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej a - przyspieszenie	 Wykres drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym (v_0 = 0). Sens fizyczny ma tylko dodatnia gałąź paraboli, gdyż nie ma ujemnego czasu.

Z wykresu drogi s(t) można odczytać wartość prędkości w danym momencie czasu t_1 jako tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu w punkcie o współrzędnych s_1,t_1 :

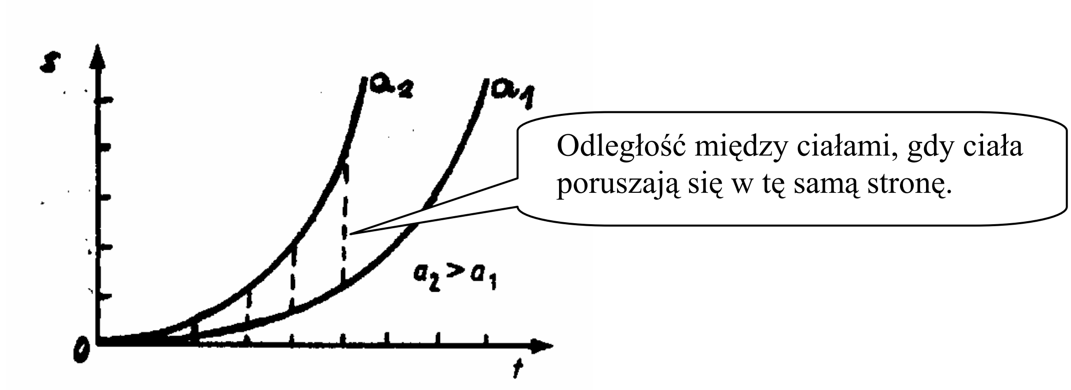
$$v(t_1)=\mathrm{tg}\alpha_1$$

Wraz z upływem czasu kąt α jest coraz większy (wykres jest coraz bardziej stromy), więc wartość prędkości też jest coraz większa.

Przy pomocy wzoru $s(t) = \frac{at^2}{2}$ łatwo można wyznaczyć przyspieszenie ciała mierząc przebytą drogę i czas ruchu:

$$\boxed{a = \frac{2 \cdot s}{t^2}}$$

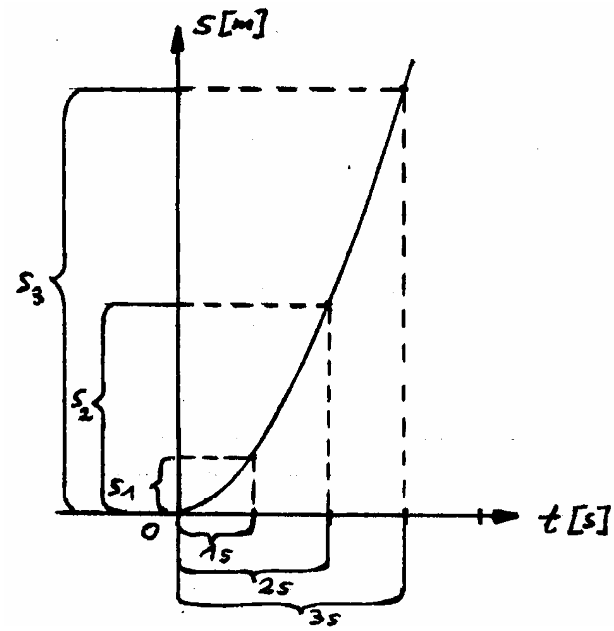
Animacja:
badanie ruchu jednostajnie przyspieszonego.



Wykresy drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym dla dwóch ciał poruszających się z różnymi przyspieszeniami.

Długość pionowych odcinków między liniami wykresów określa odległość między ciałami, która jak widać szybko rośnie. (Zakładamy, że ciała poruszają się w te samą stronę).

→Stosunki dróg przebywanych ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej $v_o = 0$.



Drogi przebyte kolejno: w pierwszej sekundzie ruchu, w pierwszych dwóch sekundach, pierwszych trzech sekundach ruchu jednostajnie przyspieszonego ($v_0 = 0$).

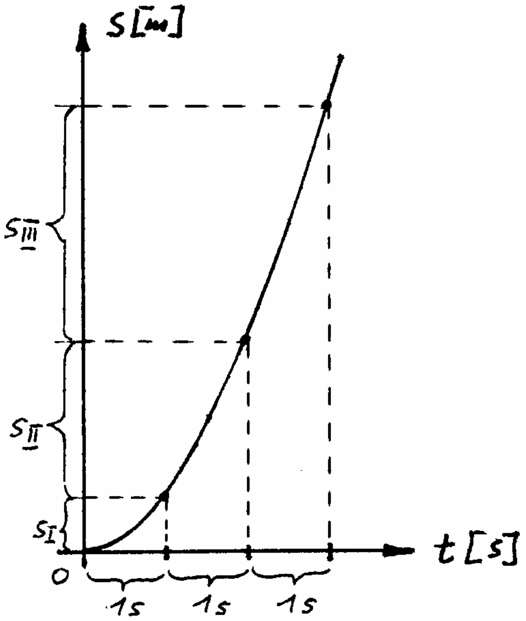
W ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej ($v_o = 0$) drogi przebyte kolejno:

w pierwszej sekundzie ruchu s_1,
w pierwszych dwóch sekundach s_2,
w pierwszych trzech sekundach s_3, itd.

mają się do siebie jak kwadraty kolejnych liczb naturalnych.

zał. ruch jednostajnie przyspieszony, bez prędkości początkowej: $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 \ldots = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 \ldots$	s_1 – droga w pierwszej sekundzie ruchu s_2 – droga w pierwszych dwóch sekundach s_3 – w pierwszych trzech sekundach itd.

Drogi s_1, s_2, s_3, itd. obliczamy ze wzoru $s(t)=\frac{at^2}{2}$ podstawiając za czas 1sekundę, 2 sekundy, 3 sekundy itd.



Drogi przebyte w kolejnych sekundach ruchu jednostajnie przyspieszonego ($v_0 = 0$).

W ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej (v_o= 0) drogi przebyte w kolejnych jednakowych przedziałach czasu (np. w kolejnych sekundach): s_I, s_{II}, s_{III}, itd. mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste.

zał. ruch jednostajnie przyspieszony, bez prędkości początkowej: $s_I : s_{II} : s_{III} : s_{IV} \ldots = 1:3:5:7\ldots$	s_I – droga w pierwszej sekundzie ruchu s_{II} – droga w drugiej sekundzie ruchu s_{III} – droga w trzeciej sekundzie itd.

Drogi S_{II}, S_{III}, S_{IV} liczymy następująco :

$$S_{II} = S_2 - S_1$$
$$S_{III} = S_3 - S_2$$
$$S_{IV} = S_4 - S_3$$

itd.

gdzie:

$S_1 = S_I$ - droga przebyta w pierwszej sekundzie ruchu,

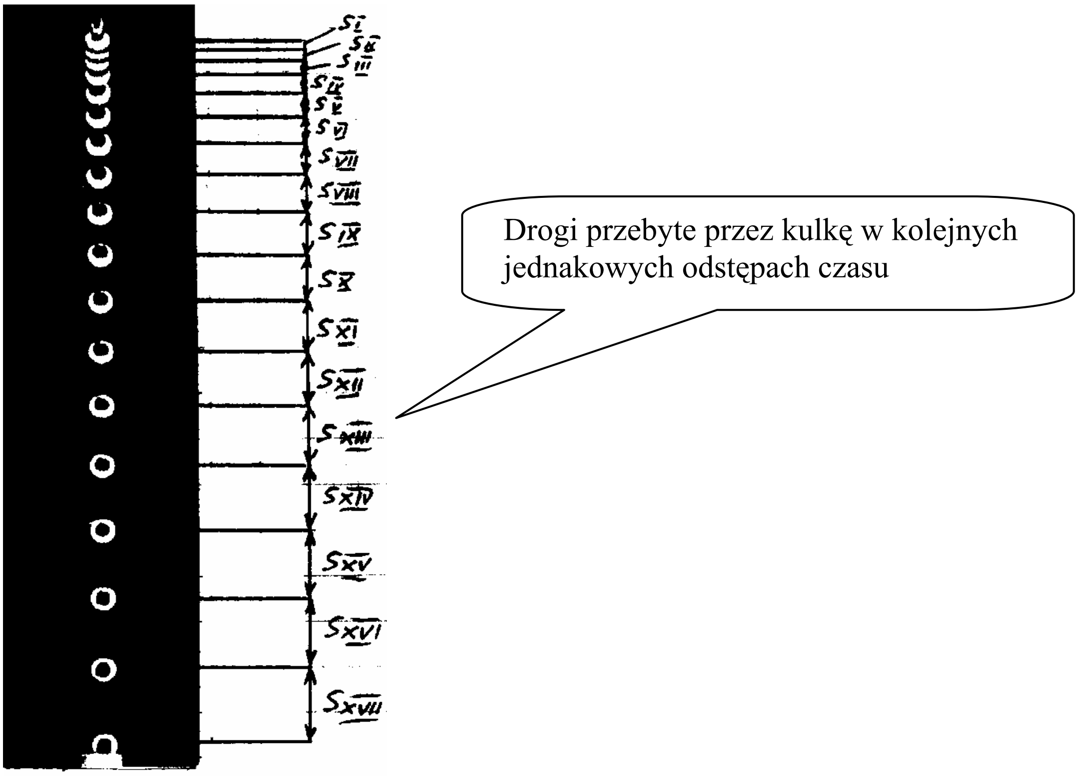
S_2 - droga przebyta w pierwszych dwóch sekundach,

S_3 - droga przebyta w pierwszych trzech sekundach ruchu

itd.

Powyższą zależność można potwierdzić doświadczalnie wykonując zdjęcie stroboskopowe spadającej swobodnie kulki.

Zdjęcie stroboskopowe to zdjęcie wykonane przy użyciu lampy stroboskopowej, która daje krótkie błyski światła w równych bardzo krótkich odstępach czasu (np. co 1/20 sekundy). Dzięki temu można zarejestrować kolejne położenia poruszającego się ciała w równych odstępach czasu.



Zdjęcie stroboskopowe spadającej swobodnie kulki (ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej).

c) położenie

Obierając układ współrzędnych tak, aby oś OX leżała na prostej, wzdłuż której porusza się ciało, równanie drogi można zastąpić analogicznym równaniem położenia

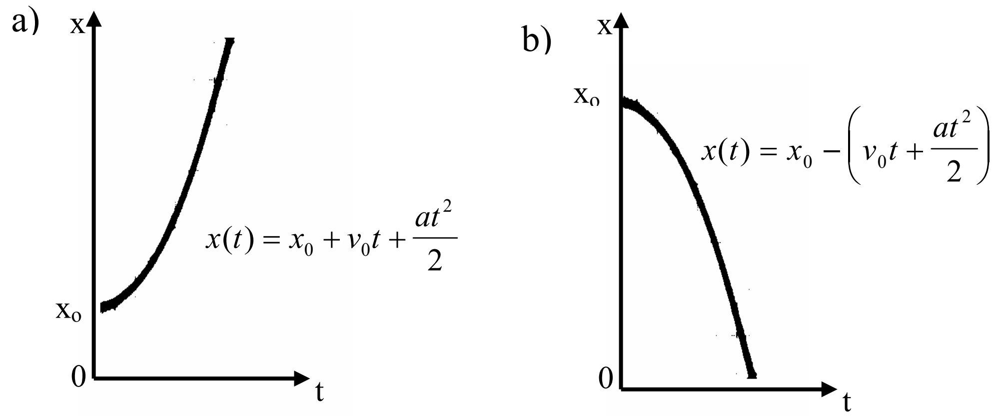
- gdy ciało oddala się od początku układu współrzędnych:

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	x- położenie x_0- położenie początkowe v_0- prędkość początkowa *a*- przyspieszenie t - czas

lub

- gdy ciało zbliża się do początku układu współrzędnych:

$x(t) = x_0 - \left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)$	x- położenie x_0- położenie początkowe v_0- prędkość początkowa *a*- przyspieszenie t - czas

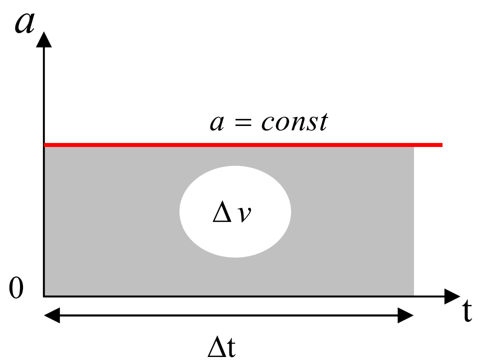


Wykresy położenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym: a) gdy ciało oddala się od początku układu współrzędnych, b) gdy ciało zbliża się do początku układu współrzędnych.

Wykres b) może być również wykresem wysokości h(t) dla spadającego swobodnie ciała.

d) przyspieszenie

W ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym przyspieszenie jest stałe: $\vec{a} = const$, a zwrot wektora przyspieszenia jest zgodny ze zwrotem wektora prędkości.



Wykres przyspieszenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Z wykresu przyspieszenia a(t) w ruchu jednostajnie przyspieszonym można odczytać wartość przyrostu prędkości: $\Delta v = v - v_0 = a \cdot \Delta t$

jako pole powierzchni figury zawartej pod wykresem. Gdy ruch odbywa się bez prędkości początkowej (v_o = 0), pole powierzchni tej figury wyznacza wartość prędkości końcowej ciała v.

2.6 Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony

Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony jest to ruch, którego torem jest linia prosta, w którym szybkość liniowo maleje a przyspieszenie jest stałe: $\vec{a} = const$.

W ruchu opóźnionym zwrot wektora przyspieszenia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości. Jeżeli prędkość jest dodatnia (bo wektor $\vec{v}$ jest zwrócony w prawo), to przyspieszenie jest ujemne (bo wektor przyspieszenia $\vec{a}$ jest zwrócony w lewo).

Przyspieszenie w ruchu opóźnionym jest czasami nazywane opóźnieniem.

Przykładem ruchu prostoliniowego jednostajnie opóźnionego jest ruch jaki wykonuje ciało wyrzucone pionowo do góry w próżni wznosząc się na maksymalną wysokość lub ruch kuli toczącej się pod górę równi pochyłej.

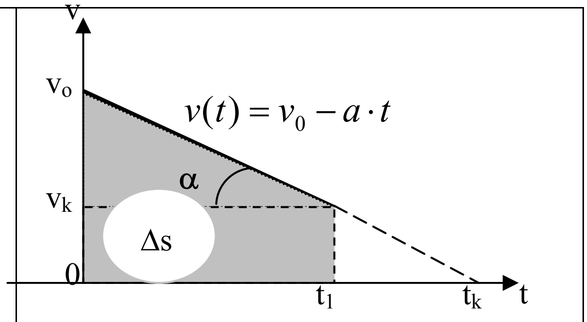
a) prędkość

→ W ruchu jednostajnie opóźnionym prostoliniowym wartość prędkości (szybkości) v równomiernie (liniowo) maleje. Wektor prędkości $\vec{v}$ leży na prostej, po której porusza się ciało, więc kierunek i zwrot wektora prędkości jest stały.

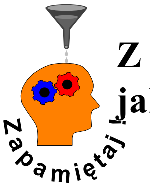
$v = v_0 - a \cdot \Delta t$	v – szybkość końcowa (po upływie czasu Δt) w ruchu jednostajnie opóźnionym v_0 – szybkość początkowa a – wartość przyspieszenia (zawsze dodatnia) Δt - czas

Ponieważ prędkość jest dodatnia, przed przyspieszeniem jest znak minus gdyż wektory: $\vec{v}$ i $\vec{a}$ mają przeciwne zwroty.

Prostsza postać wzoru:

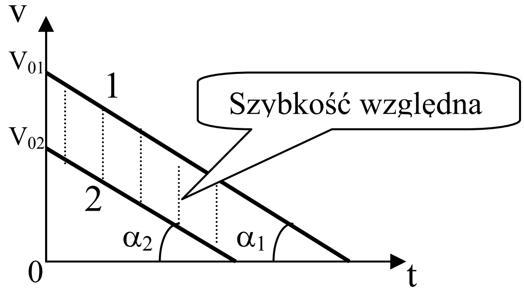
$v(t) = v_0 - a \cdot t$	v – szybkość końcowa (po upływie czasu t) w ruchu jednostajnie opóźnionym v_0 – szybkość początkowa a – wartość przyspieszenia (zawsze dodatnia) t - czas	 Wykres prędkości w ruchu jednostajnie opóźnionym.

Z wykresu prędkości v(t) można odczytać drogę przebytą przez ciało, jako pole powierzchni figury zawartej pod linią wykresu (tak jak w poprzednio omawianych ruchach). Pole trapezu zaznaczonego na naszym wykresie określa drogę przebytą przez ciało w czasie t_1, w którym szybkość zmniejszyła się do v_k. Natomiast pole całego trójkąta wyznacza drogę przebytą do chwili zatrzymania, po upływie czasu t_k.



Z wykresu prędkości v(t) można odczytać wartość przyspieszenia (opóźnienia) a **jako tangens kąta α nachylenia linii wykresu**:

$$\boxed{a = tg\alpha}$$



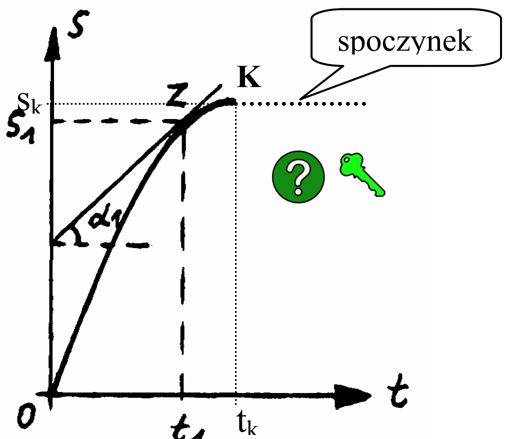
Wykresy prędkości w ruchu jednostajnie opóźnionym dla dwóch ciał poruszających się z takimi samymi opóźnieniami.

Z powyższych wykresów odczytujemy, że:
- obydwa ciała mają takie samo opóźnienie, gdyż kąty nachylenia linii wykresów są równe: $\alpha_1 = \alpha_2$, więc zgodnie z powyższym wzorem opóźnienia też są równe: $a_1 = a_2$,
- ciało nr 1 ma większą szybkość początkową: $v_{01} > v_{02}$,
- szybkość względna ciał, odczytana jako długość pionowych odcinków między liniami wykresów, jest stała.

b) droga

Równanie drogi w ruchu jednostajnie opóźnionym $$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$$	s(t) – droga przebyta w czasie t ruchem jednostajnie opóźnionym s_0 – droga początkowa v_0 –szybkość początkowa a - przyspieszenie

Najczęściej przyjmujemy $s_o = 0$ otrzymując wzór:

$$s(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$	s(t) – droga przebyta w czasie t ruchem jednostajnie opóźnionym v_0 –szybkość początkowa a - przyspieszenie	 Wykres drogi w ruchu jednostajnie opóźnionym.

Ponieważ we wzorze na drogę przy zmiennej t^2 jest znak minus, na wykresie mamy część paraboli zwróconej ramionami w dół. Sens fizyczny ma tylko rosnąca część paraboli, gdyż droga nie może zmniejszać się wraz z upływem czasu.

Z wykresu możemy odczytać:

- szybkość ciała w danej chwili t_1

  Z wykresu drogi s(t) można odczytać szybkość w danym momencie czasu t_1 jako tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu w punkcie Z o współrzędnych s_1,t_1 (tak jak w ruchu jednostajnie przyspieszonym):

$$v(t_1)=\mathrm{tg}\alpha_1$$

- wraz z upływem czasu wartość kąta α zmniejsza się (wykres jest coraz mniej stromy), więc wartość prędkości też maleje, do zera w chwili t_k,
- współrzędne punktu K, gdzie wykres osiąga maksimum określają czas, po którym ciało się zatrzyma:

$$t_k = \frac{v_0}{a}$$

  i drogę jaką przebędzie do chwili zatrzymania:

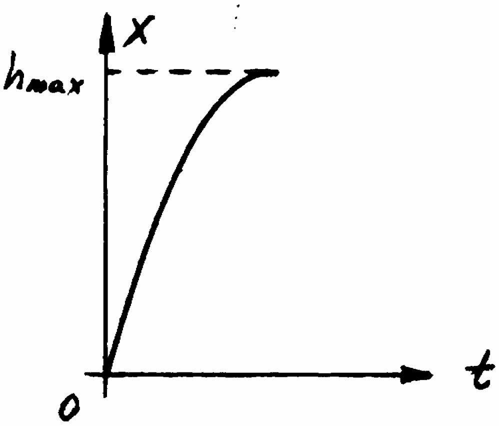
$$s_k = \frac{v_0^2}{2a}$$

- po upływie czasu t_k ciało będzie w spoczynku, co ilustruje na wykresie pozioma linia przerywana (czas płynie do przodu a przebyta droga pozostaje stała).

c) położenie

Równanie położenia w ruchu jednostajnie opóźnionym ma taką samą postać jak równanie drogi:

$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$	x- położenie x_0- położenie początkowe v_0- prędkość początkowa a- przyspieszenie t - czas

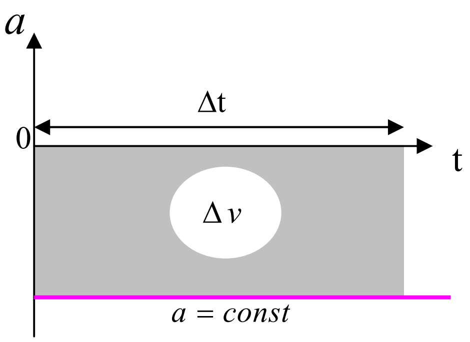


Animacja: ruch jednostajnie opozniony. Wpisz initial position (polozenie poczatkowe): 0,00
initial velocity (predkosc poczatkowa): np. 10,00
acceleration (przyspieszenie): np. -1,0
(po zatrzymaniu samochód porusza sie ruchem jednostajnie przyspieszonym w lewo).

Wykres położenia w ruchu jednostajnie opóźnionym (np. dla kulki wyrzuconej pionowo do góry, do momentu osiągnięcia maksymalnej wysokości h_{max}.

d) przyspieszenie (opóźnienie)

W ruchu jednostajnie opóźnionym prostoliniowym przyspieszenie (nazywane też opóźnieniem) jest stałe $\vec{a} = const$, a zwrot wektora przyspieszenia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości. Ponieważ na poprzednich wykresach prędkości prędkość jest dodatnia, to przyspieszenie musi być teraz ujemne.



Wykres przyspieszenia w ruchu jednostajnie opóźnionym.

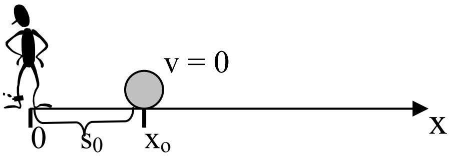
Z wykresu przyspieszenia *a(t)* w ruchu jednostajnie opóźnionym można odczytać ubytek prędkości :

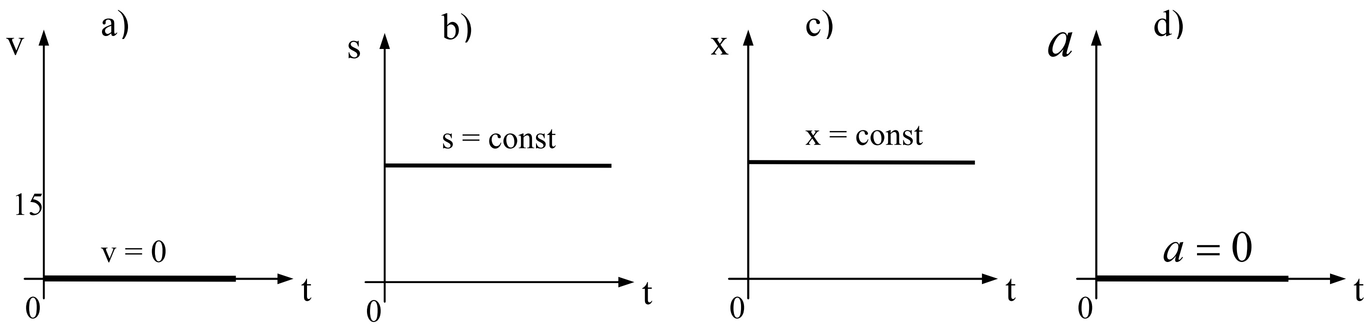
$$\Delta v = v_0 - v = a \cdot \Delta t$$

jako pole powierzchni prostokąta zawartego między linią wykresu a osią czasu. Jeżeli szybkość końcowa jest równa zero: v = 0, pole tego prostokąta wyznacza szybkość początkową ciała v_o.

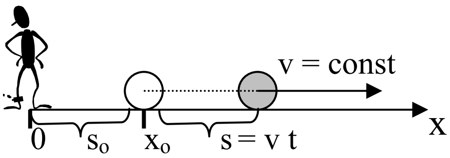
2.8. Zestawienie wykresów ilustrujących spoczynek i ruchy prostoliniowe.

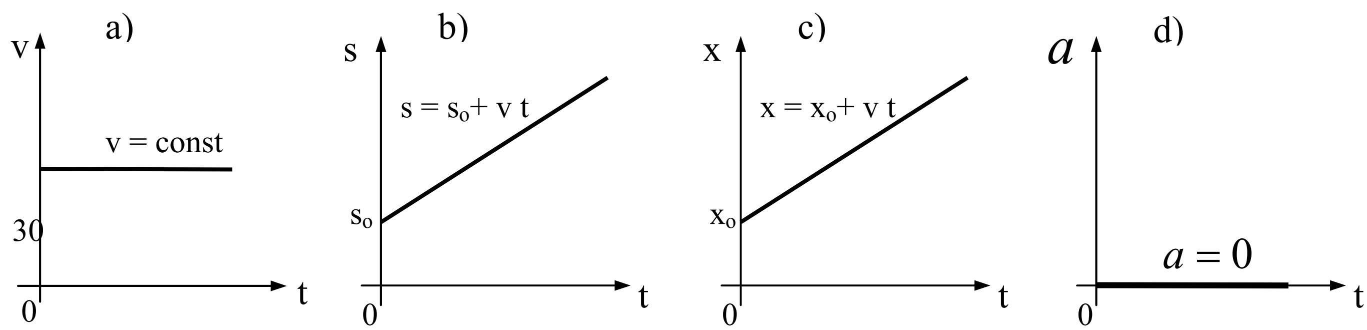
- Spoczynek



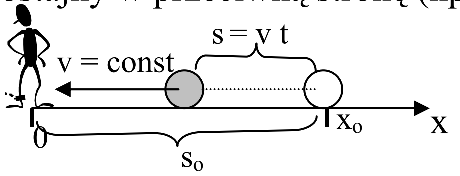


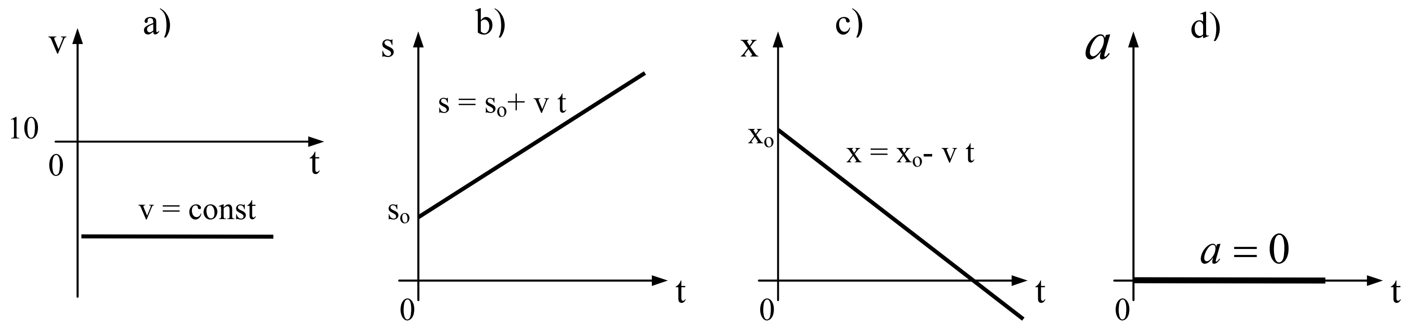
- Ruch jednostajny (np. w prawo)



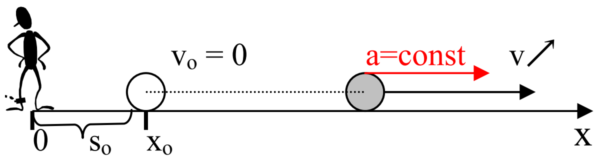


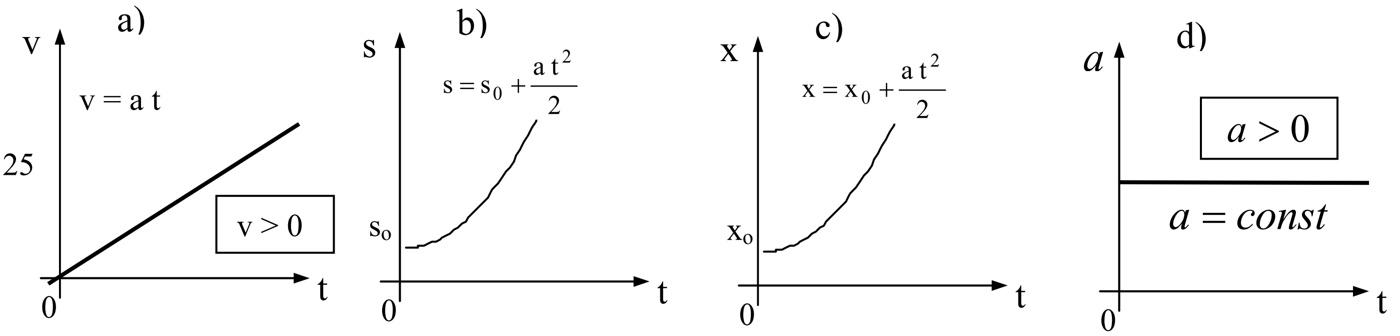
- Ruch jednostajny w przeciwną stronę (np. w lewo)



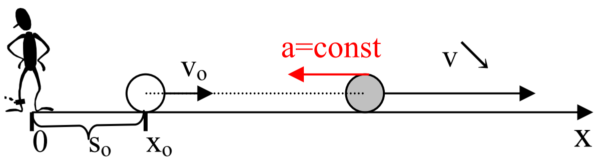


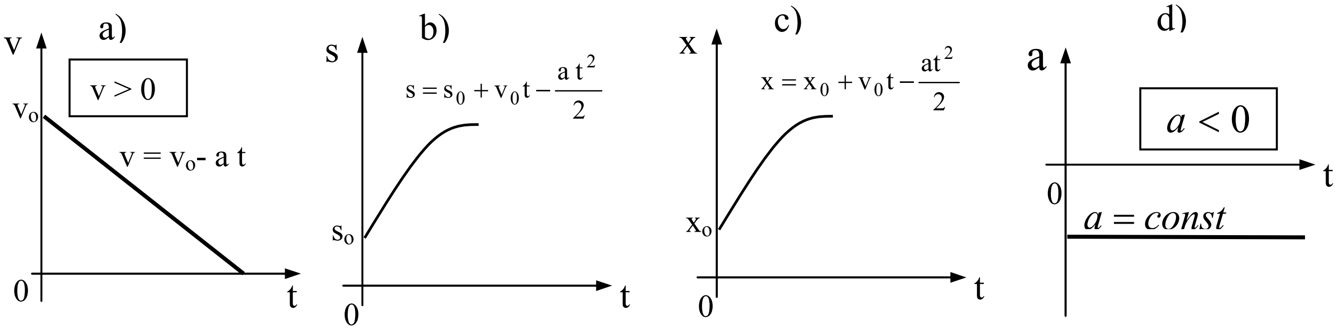
- Ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej ($v_0 = 0$)



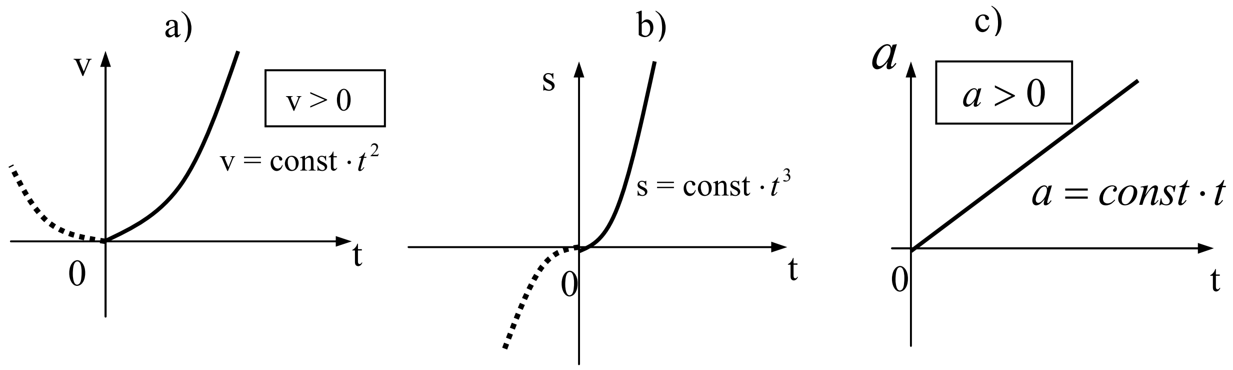


- Ruch jednostajnie opóźniony

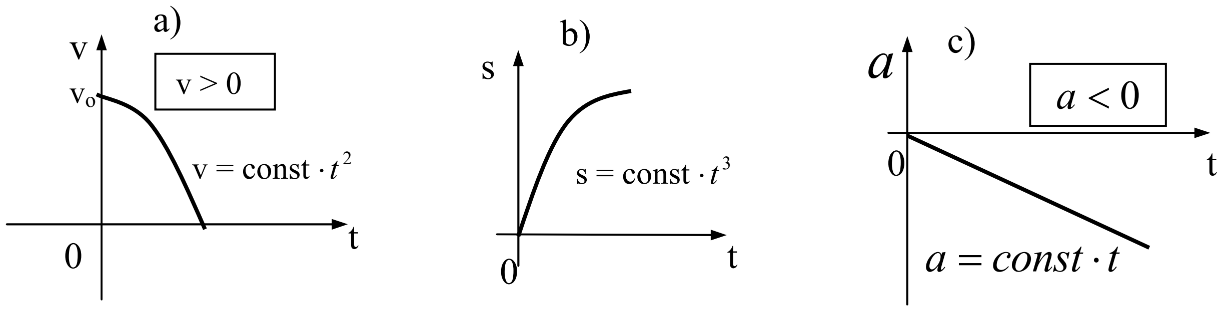




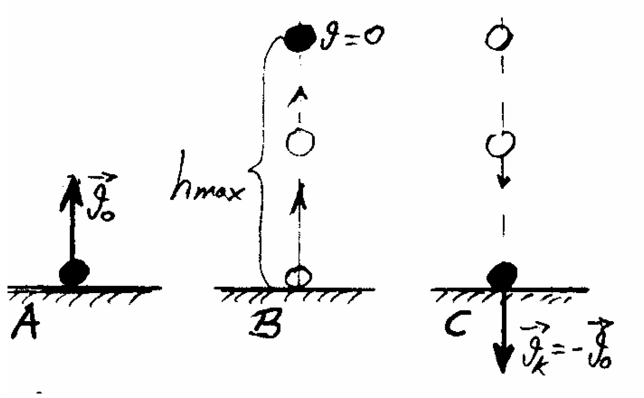
- Ruch niejednostajnie przyspieszony – przykład (wykresy mogą mieć inny kształt)

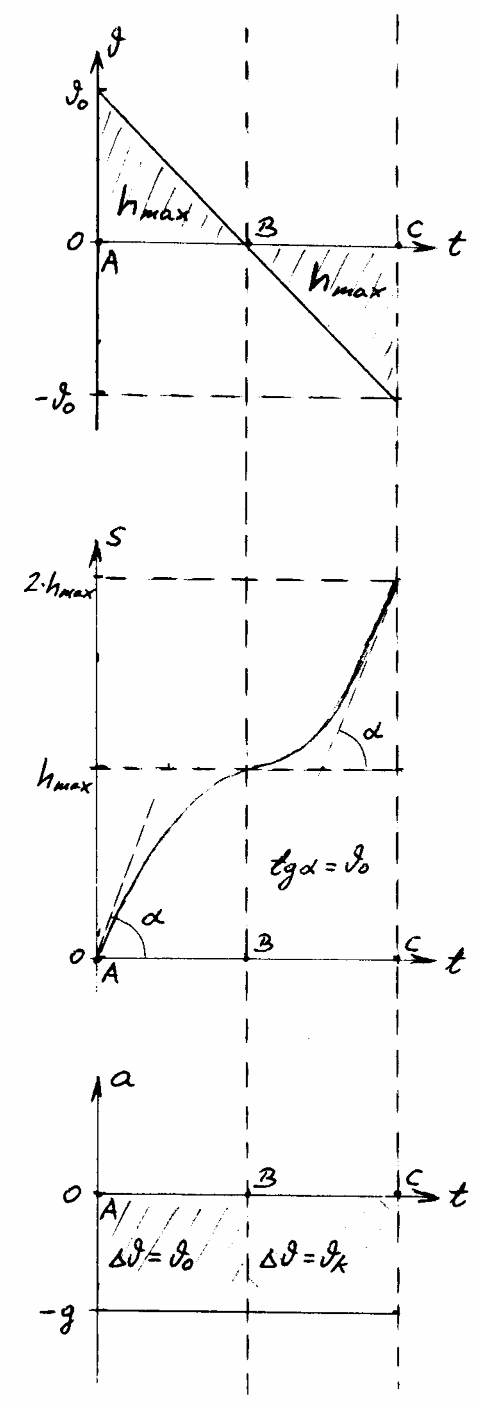


- Ruch niejednostajnie opóźniony – przykład (wykresy mogą mieć inny kształt)



Wykresy ilustrujące dany rodzaj ruchu są ze sobą ściśle powiązane, przedstawmy to na przykładzie wykresów ilustrujących ruch ciała wyrzuconego pionowo do góry (opór powietrza pomijamy). Poszczególne etapy tego ruchu przedstawia rysunek.





Z wykresu prędkości v(t) odczytujemy:
W chwili początkowej A ciało zostało wyrzucone pionowo do góry z prędkością początkową v_0. W czasie od A do B ciało wznosi się do góry ruchem jednostajnie opóźnionym. Wartość prędkości maleje liniowo od prędkości v_0 do zera na maksymalnej wysokości h_{max} osiągniętej w chwili B. Wartość prędkości jest dodatnia, gdyż wektor $\vec{v}$ jest zwrócony do góry.
W czasie od B do C ciało spada swobodnie poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. Wartość prędkości jest ujemna (bo wektor $\vec{v}$ jest zwrócony w dół) i rośnie po wartościach ujemnych od zera do $-v_0$. Czas wznoszenia t_{AB} jest taki sam jak czas spadania t_{BC}. Ciało wraca na poziom wyrzucenia z prędkością o takiej samej wartości jak w chwili wyrzucenia: v_0.
Pole zakreślonej figury przedstawia przebytą drogę, która jest równa wysokości maksymalnej h_{max} osiągniętej w fazie wznoszenia AB oraz wysokości z jakiej z jakiej spadło ciało w drugiej fazie ruchu BC.

Z wykresu drogi s(t) odczytujemy:
Droga przebyta przez ciało podczas całego ruchu rośnie – również w drugiej fazie ruchu, gdy wysokość maleje.
W pierwszej fazie ruchu od A do B droga rośnie coraz wolniej, bo wykres jest coraz mniej stromy. W drugiej fazie ruchu od B do C droga rośnie coraz szybciej, bo wykres jest coraz bardziej stromy. Droga przebyta w pierwszej fazie ruchu (równa h_{max}) jest taka sama jak w drugiej fazie (też równa h_{max}). Kąty nachylenia stycznej do wykresu w chwili początkowej A i w chwili końcowej C są takie same – równe α. Prędkości ciała w tych momentach są więc też równe ($tg\alpha = v_0$).

Z wykresu przyspieszenia *a(t)* odczytujemy:
Przyspieszenie podczas całego ruchu jest stałe i ma wartość ujemną gdyż wektor przyspieszenia $\vec{g}$ jest zwrócony w dół (g – to przyspieszenie ziemskie, o którym jest mowa w rozdziale 3.4).
Pole zakreślonej figury w części AB wykresu przedstawia zmianę prędkości, która jest równa prędkości początkowej v_0. Pole figury w części BC wykresu przedstawia taką samą zmianę prędkości, równą prędkości w chwili końcowej v_k ($v_k = v_0$).

40

Animacja:
ruch jednostajny po okregu

2.9. Ruch po okręgu

a) jednostajny

Ruch jednostajny po okręgu jest to ruch, którego torem jest okrąg a wartość prędkości jest stała: v = const (np. ruch jaki wykonuje koniec wskazówki zegara).

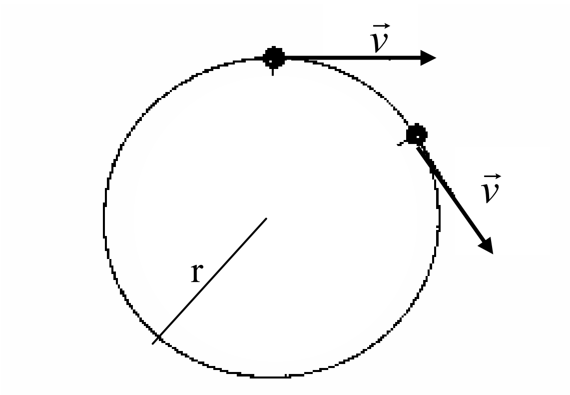
Stałe są również: okres T i częstotliwość f ruchu.

Wielkości opisujące ruch po okręgu są zdefiniowane w rozdziale 2.2.

Uwaga !

- Prędkość liniowa v

  W ruchu jednostajnym po okręgu wartość prędkości liniowej jest stała: $v = const$, lecz wektor prędkości liniowej nie jest stały : $\vec{v} \neq const$, gdyż pozostając stale styczny do okręgu musi zmieniać swój kierunek.



Wektory prędkości liniowej w ruchu jednostajnym po okręgu.

$v = \dfrac{2\pi\, r}{T}$	v – wartość prędkości liniowej r – promień okręgu T - okres

Powyższy wzór otrzymujemy podstawiając do wzoru : $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ dane dotyczące jednego obiegu po okręgu: $\Delta s = 2\pi r$ (długość okręgu) i $\Delta t = T$ (okres ruchu).

lub

po podstawieniu $\dfrac{1}{T} = f$:

$v = 2\pi rf$	v – wartość prędkości liniowej r – promień okręgu f - częstotliwość

- Prędkość kątowa ω

  W ruchu jednostajnym po okręgu wektor prędkości kątowej jest stały : $\vec{\omega} = const$, więc prędkość kątowa średnia jest równa prędkości chwilowej $\vec{\omega}_{ŚR} = \vec{\omega}$.

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	ω - wartość prędkości kątowej T - okres

Powyższy wzór otrzymujemy podstawiając do wzoru definicyjnego: $\vec{\omega} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$ dane dotyczące jednego obiegu po okręgu: $\Delta\phi = 2\pi$ (kąt pełny w radianach) i $\Delta t = T$ (okres ruchu).

Po podstawieniu $\dfrac{1}{T} = f$:

$\omega = 2\pi f$	ω - wartość prędkości kątowej f - częstotliwość

z porównania poprzednich wzorów otrzymujemy związek między wartością prędkości liniowej i prędkością kątowej:

$v = \omega \cdot r$	v – wartość prędkości liniowej ω - wartość prędkości kątowej r – promień okręgu

- Droga kątowa $\Delta\phi$

$\Delta\Phi = \omega \cdot \Delta t$	$\Delta\Phi$ – droga kątowa ω - prędkość kątowa Δt - czas

Powyższy wzór otrzymujemy ze wzoru: $\vec{\omega} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$.

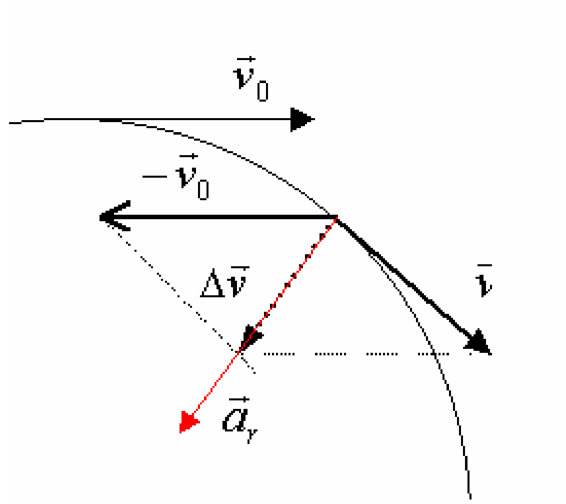
Po podstawieniu $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

$\Delta\Phi = \dfrac{2\pi}{T}\Delta t$	$\Delta\Phi$ – droga kątowa T - okres ruchu Δt - czas

- Przyspieszenie dośrodkowe a_r

W ruchu jednostajnym po okręgu, wskutek zmiany kierunku wektora prędkości liniowej, występuje przyrost prędkości $\Delta\vec{v}$ i przyspieszenie $\vec{a}_r$ zwrócone wzdłuż promienia do środka okręgu nazywane przyspieszeniem dośrodkowym.

Wartość przyspieszenia dośrodkowego jest stała: a_r = const, lecz wektor przyspieszenia dośrodkowego nie jest stały (gdyż zmienia się jego kierunek): $\vec{a}_r \neq$ const.



Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu.

$a_r = \dfrac{v^2}{r}$	a_r – przyspieszenie dośrodkowe v - prędkość liniowa r - promień okręgu

Po podstawieniu $v = \omega \cdot r$:

$a_r = \omega^2 r$	a_r – przyspieszenie dośrodkowe ω - prędkość kątowa r - promień okręgu

Po podstawieniu $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$:

$a_r = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r$	a_r – przyspieszenie dośrodkowe T - okres r - promień okręgu

Po podstawieniu $\dfrac{1}{T} = f$:

$a_r = 4\pi^2 f^2 r$	a_r – przyspieszenie dośrodkowe f - częstotliwość r - promień okręgu

- Przyspieszenie kątowe ε

Ponieważ w ruchu jednostajnym po okręgu prędkość kątowa jest stała: $\vec{\omega} = const$, przyspieszenie kątowe jest równe zero:

$$\boxed{\varepsilon = 0}$$

b) jednostajnie zmienny

<u>Ruch jednostajnie zmienny po okręgu</u> jest to ruch, którego torem jest okrąg, wartość prędkości kątowej zmienia się liniowo wraz z upływem czasu, a przyspieszenie kątowe jest stałe: ε=const.

- Prędkość kątowa ω(t)

Wartość prędkości kątowej liniowo rośnie (w ruchu jednostajnie przyspieszonym) lub liniowo maleje (w ruchu jednostajnie opóźnionym).

$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon\, t$	ω – prędkość kątowa końcowa ω_0 – prędkość kątowa początkowa ε - przyspieszenie kątowe t - czas

„+” dla ruchu jednostajnie przyspieszonego,
„- ” dla ruchu jednostajnie opóźnionego.

- Droga kątowa Δϕ(t)

$\Delta\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$	$\Delta\phi$ – kąt zakreślony po czasie t ω_0 – prędkość kątowa początkowa ε - przyspieszenie kątowe

„+” dla ruchu jednostajnie przyspieszonego,
„- ” dla ruchu jednostajnie opóźnionego.

- Przyspieszenie kątowe ε i przyspieszenie liniowe $\vec{a}_s$

W ruchu jednostajnie zmiennym po okręgu przyspieszenie katowejest stałe

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = const$$

Oprócz przyspieszenia dośrodkowego a_r, występuje przyspieszenie liniowe $\vec{a}_s$ styczne do okręgu, które jest powiązane z przyspieszeniem kątowym ε następującą zależnością:

$a_s = \varepsilon \cdot r$	a_s – przyspieszenie styczne do okręgu ε - przyspieszenie kątowe r - promień okręgu

c) niejednostajnie zmienny

W ruchu niejednostajnie zmiennym po okręgu prędkość kątowa ω zmienia się w taki sposób, że przyspieszenie kątowe nie jest stałe: ε ≠ const).

Wzory opisujące ruch niejednostajnie zmienny wymagają zastosowania pochodnych i całek – działań z zakresu matematyki wyższej.

2.10. Zestawienie wielkości i wzorów opisujących ruch prostoliniowy i ruch po okręgu

ruch prostoliniowy	**ruch po okręgu**	**związki między wielkościami**
przemieszczenie $\Delta\vec{r}$	droga kątowa $\Delta\vec{\varphi}$	$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$
droga Δs	zakreślony kąt (droga kątowa) $\Delta\varphi$	$\Delta s = \Delta\varphi \cdot r$
prędkość $\vec{v}_{śr} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	prędkość kątowa $\vec{\omega} = \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
przyspieszenie $\vec{a} \overset{df}{=} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$	$\vec{a}_s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$
droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym		
$\Delta s = v_0\Delta t + \dfrac{a(\Delta t)^2}{2}$	$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t + \dfrac{\varepsilon \cdot (\Delta t)^2}{2}$	
droga w ruchu jednostajnie opóźnionym		
$\Delta s = v_0\Delta t - \dfrac{a(\Delta t)^2}{2}$	$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t - \dfrac{\varepsilon \cdot (\Delta t)^2}{2}$	
prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym		
$v = v_0 + a \cdot \Delta t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon\,\Delta t$	
prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym		
$v = v_0 - a \cdot \Delta t$	$\omega = \omega_0 - \varepsilon\,\Delta t$	