1. Zasada indukcji matematycznej – przykłady

Przykład 1. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Niech $W(n)$ oznacza zdanie $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Wówczas $W(1)$ jest postaci $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, więc jest zdaniem prawdziwym. Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie $W(k)$. Pokażemy, że prawdziwe jest zdanie $W(k+1)$. Zdanie $W(k+1)$ jest postaci

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Korzystając z prawdziwości zdania $W(k)$ (korzystając z założenia indukcyjnego) mamy

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+k+(k+1) &= (1+2+3+\ldots+k)+k+1 \overset{\text{z zał. ind.}}{=}\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Zatem prawdziwe jest zdanie $W(k+1)$. Na mocy zasady indukcji prawdziwe jest zdanie $W(n)$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$. Stąd równość $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 2. Pokazać, że $6 \mid 13^n-7$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Rozważmy zbiór

$$A=\{n\in\mathbb{N} : 6 \mid 13^n-7\}.$$

Pokażemy, że $1\in A$. Mamy $13^1-7=6$, więc $6\mid 6$, skąd $1\in A$.

Załóżmy teraz, że $k\in A$. Pokażemy, że $k+1\in A$. Z założenia indukcyjnego (tzn., że $k\in A$) wiemy, że istnieje liczba całkowita j taka, że $13^k-7=6j$. Zatem

$$\begin{aligned}13^{k+1}-7 &= 13\cdot 13^k-7=13(13^k-7+7)-7=\\ &= 13(13^k-7)+13\cdot 7-7=13(13^k-7)+12\cdot 7 \overset{\text{z zał. ind.}}{=}\\ &= 13\cdot 6j+12\cdot 7=6(13j+14).\end{aligned}$$

Stąd liczba $13^{k+1}-7$ jest podzielna przez 6, co oznacza, że $k+1\in A$. Na mocy zasady indukcji $A=\mathbb{N}$, czyli $6\mid 13^n-7$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Przykład 3. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Niech $W(n)$ oznacza nierówność (1). Wówczas zdanie $W(1)$ jest postaci $\frac{1}{1^2}\leqslant 2-\frac{1}{1}$, czyli $1\leqslant 1$. Jest to zdanie prawdziwe. Załóżmy teraz, że prawdziwe jest zdanie $W(k)$. Pokażemy, że prawdziwe jest zdanie $W(k+1)$, czyli zdanie postaci

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{k+1}.$$

Mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} &\overset{\text{z zał. ind.}}{\leqslant} 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\\ &= 2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\leqslant\\ &\leqslant 2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}=2-\frac{\cancel{k}\cancel{(k+1)}}{\cancel{k}(k+1)^{\cancel{2}}}=\\ &= 2-\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

Zatem prawdziwe jest zdanie $W(k+1)$. Na mocy zasady indukcji matematycznej własność $W(n)$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n mamy $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Pokażemy najpierw, że rozważana podzielność zachodzi dla $n = 1$. Liczba $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ jest podzielna przez 9. Załóżmy, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej k mamy $9 \mid 4^k + 15k - 1$, tzn. istnieje liczba całkowita j taka, że $4^k + 15k - 1 = 9j$. Wówczas dla $k+1$ mamy

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = \\ &= 4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 14 = \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18 \overset{\text{z zał. ind.}}{=} \\ &= 4 \cdot 9j + 9(-5k + 2) = \\ &= 9(4j - 5j + 2). \end{aligned}$$

Zatem liczba $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ jest podzielna przez 9. Na mocy zasady indukcji $9 \mid 4^n + 15n - 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

2. Zasada indukcji matematycznej – zadania

Zadanie 1. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 2. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3}.$$

Zadanie 3. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Zadanie 4. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadanie 5. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Zadanie 6. Metodą indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}.$$

Zadanie 7. Udowodnić stosując metodę indukcji matematycznej, że

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.
2. Liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3 dla dowolnej liczby naturalnej n.
3. Liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
4. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.
5. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba 3^{4n+2} jest podzielna przez 10.

6. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3.
7. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.
8. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 7.
9. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez 8.
10. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.
11. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ suma $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 8. Udowodnić stosując metodę indukcji matematycznej, że prawdziwe są następujące nierówności (dla podanego warunku):

1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
$$3^{n+1} > 4n + 7.$$
2. Dla $n \in \mathbb{N}$
$$2^n > n.$$
3. Dla $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \geqslant 5$
$$2^n > n^2.$$
4. Dla $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \geqslant 3$
$$3^n > n \cdot 2^n.$$
5. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
6. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$