Matematyka:Matematyka I - ćwiczenia/Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna

Zadanie 1

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość:

(1) $$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2 .$$

Wskazówka

Do obu stron założenia indukcyjnego należy dodać brakujący wyraz.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość równości (1) dla $n = 1$.
   Lewa strona: $L = 1^3 + (2 \cdot 1 + 1)^3 = 28$.
   Prawa strona: $P = 2(1+1)^4 - (1+1)^2 = 28$. Zatem $L = P$.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$
   Teza indukcyjna: $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+3)^3 = 2(n+2)^4 - (n+2)^2$.
   Wychodzimy od założenia indukcyjnego i dodajemy do obu stron wyrażenie $(2n+3)^3$. Po lewej stronie otrzymamy w ten sposób lewą stronę tezy indukcyjnej, natomiast prawą przekształcimy w następujący sposób:

(2)
$$\begin{aligned}
2(n+1)^4 - (n+1)^2 + (2n+3)^3 &= \\
&= 2(n+1)^4 - (n+1)^2 + (2(n+1)+1)^3 \\
&= 2(n+1)^4 - (n+1)^2 + 8(n+1)^3 + 12(n+1)^2 + 6(n+1) + 1 \\
&= 2\underbrace{\left[(n+1)^4 + 4(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 4(n+1) + 1\right]}_{((n+1)+1)^4} - \underbrace{\left[(n+1)^2 + 2(n+1) + 1\right]}_{((n+1)+1)^2} \\
&= 2(n+2)^4 - (n+2)^2 .
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, co kończy dowód.

Zadanie 2

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$ prawdziwa jest równość:

(3) $$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \ldots \frac{1}{n^2-1} = \frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)} .$$

Wskazówka

Do obu stron założenia indukcyjnego należy dodać brakujący wyraz.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość równości (3) dla $n = 2$.
   Lewa strona: $L = \dfrac{1}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$.
   Prawa strona: $P = \dfrac{(3 \cdot 2 + 2)(2-1)}{4 \cdot 2(2+1)} = \dfrac{1}{3}$. Zatem $L = P$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

2. Wykonujemy krok indukcyjny.

   Założenie indukcyjne: $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots\frac{1}{n^2-1}=\frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$.

   Teza indukcyjna: $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{(3n+5)n}{4(n+1)(n+2)}$.

   Do obu stron założenia indukcyjnego dodajemy wyrażenie $\frac{1}{(n+1)^2-1}$. Po lewej stronie otrzymamy lewą stronę tezy indukcyjnej. Prawą zaś przekształcimy w poniższy sposób:

(4)
$$\begin{aligned}\frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2-1}&=\frac{(3n+2)(n-1)}{4n(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}\\&=\frac{(3n+2)(n-1)(n+2)+4(n+1)}{4n(n+1)(n+2)}=\frac{3n^3+5n^2-4n-4+4n+4}{4n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{(3n+5)n}{4(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, więc dowód indukcyjny jest zakończony.

Zadanie 3

Wykazać wzór de Moivre'a:

(5)
$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi\,,$$

dla dowolnego $\phi\in\mathbb{R}$ oraz $n\in\mathbb{N}$.

Wskazówka

Obie strony założenia indukcyjnego należy pomnożyć przez czynnik $(\cos\phi+i\sin\phi)$.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość równości (5) dla $n=1$.

   Lewa strona: $L=(\cos\phi+i\sin\phi)^1=\cos\phi+i\sin\phi$.

   Prawa strona: $P=\cos(1\cdot\phi)+i\sin(1\cdot\phi)=\cos\phi+i\sin\phi$. Zatem $L=P$.

2. Wykonujemy krok indukcyjny.

   Założenie indukcyjne: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$.

   Teza indukcyjna: $(\cos\phi+i\sin\phi)^{n+1}=\cos(n+1)\phi+i\sin(n+1)\phi$.

   Obie strony założenia indukcyjnego pomnożymy przez czynnik $(\cos\phi+i\sin\phi)$. Po lewej stronie otrzymujemy od razu lewą stronę tezy indukcyjnej. Otrzymaną prawą stronę przekształcimy wykorzystując wzory:

(6)
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,,$$

(7)
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,.$$

   Otrzymujemy:

(8)
$$\begin{aligned}(\cos n\phi+i\sin n\phi)(\cos\phi+i\sin\phi)&=\cos n\phi\cos\phi-\sin n\phi\sin\phi+i(\sin n\phi\cos\phi+\cos n\phi\sin\phi)\\&=\cos(n+1)\phi+i\sin(n+1)\phi\,,\end{aligned}$$

   gdzie przyjęliśmy $\alpha=n\phi$ oraz $\beta=\phi$.

Uzyskaliśmy tezę indukcyjną, co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 4

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność:

(9) $$\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots \frac{\sqrt{n}}{n-1} > \sqrt{n-1}\,.$$

Wskazówka

Do obu stron założenia indukcyjnego należy dodać brakujący wyraz.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość nierówności (9) dla $n = 2$.

   Lewa strona: $L = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

   Prawa strona: $P = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$. Zatem $L > P$.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.

   Założenie indukcyjne: $\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots \frac{\sqrt{n}}{n-1} > \sqrt{n-1}$.

   Teza indukcyjna: $\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots \frac{\sqrt{n+1}}{n} > \sqrt{n}$.

   Do obu stron założenia indukcyjnego dodamy wyrażenie $\frac{\sqrt{n+1}}{n}$. Po lewej stronie otrzymamy lewą stronę tezy indukcyjnej, a prawą przekształcimy w następujący sposób:

(10) $$\sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \frac{n-1}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{n} > \frac{n-1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n-1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,.$$

   Stąd wyciągamy wniosek, iż

   $\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots \frac{\sqrt{n+1}}{n} > \sqrt{n}$.

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, a tym samym wykazaliśmy prawdziwość nierówności w treści zadania.

Zadanie 5

Wiadomo, iż

(11) $$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|,$$

dla $x_1, x_1 \in \mathbb{R}$. Wykazać na tej podstawie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$ zachodzi także

(12) $$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\,.$$

Wskazówka

Należy wyjść od lewej strony tezy indukcyjnej i przekształcać ją, korzystając z założenia indukcyjnego.

Rozwiązanie

1. Prawdziwość nierówności (12) dla $n = 2$ wynika z samej treści zadania, więc nie musimy jej sprawdzać.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.

   Założenie indukcyjne: $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

   Teza indukcyjna: $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{n+1}|$.

   Aby wykazać tezę indukcyjną, lewą jej stronę zapiszemy w następujący sposób:

(13) $$|\underbrace{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}_{a} + \underbrace{x_{n+1}}_{b}| = |a + b| \leqslant |a| + |b|\,.$$

   gdzie skorzystaliśmy z nierówności (11) w treści zadania. Z założenia indukcyjnego wynika natomiast, że

(14) $$|a| = |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|\,,$$

i w konsekwencji

(15) $$|x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}| = |a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{n+1}|.$$

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, a więc wykazaliśmy również prawdziwość (12).

Zadanie 6

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

(16) $$(1+2+\ldots+n)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right) \geqslant n^2.$$

Wskazówka

Należy wyjść od lewej strony tezy indukcyjnej i przekształcać ją, korzystając z założenia indukcyjnego.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość nierówności (16) dla $n = 1$.
   Lewa strona: $L = 1 \cdot 1 = 1$.
2. *Prawa strona:*
3. $P = 1^2 = 1$
4. . Zatem
5. $L \geqslant P$
6. .
7. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: $(1+2+\ldots+n)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right) \geqslant n^2$.
   Teza indukcyjna: $(1+2+\ldots+(n+1))\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n+1}\right) \geqslant (n+1)^2$.
   Będziemy przekształcać poniżej lewą stronę tezy indukcyjnej:

(17) $$\begin{aligned}(1+2+\ldots+(n+1))\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n+1}\right) &= (1+2+\ldots+n)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right)\\ &+ (n+1)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right) + (1+2+\ldots+n)\frac{1}{n+1} + (n+1)\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Teraz wykorzystamy założenie indukcyjne w odniesieniu do pierwszego wyrazu po prawej stronie. Z kolei dla drugiego wyrazu możemy wykorzystać oszacowanie:

(18) $$(n+1)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{3}{2}(n+1).$$

Zastosujemy także znany wzór na sumę kolejnych liczb naturalnych:

(19) $$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zbierając to razem, otrzymujemy nierówność:

(20) $$\begin{aligned}&(1+2+\ldots+(n+1))\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n+1}\right)\\ &\geqslant n^2 + \frac{3}{2}(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + 1\\ &= n^2 + 2n + 1\frac{5}{2} > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy tezę indukcyjną i wykazaliśmy prawdziwość (16).

Zadanie 7

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

(21) $$(2n-1)!! \leqslant n^n .$$

Wskazówka

Obie strony założenia indukcyjnego należy pomnożyć przez brakujący czynnik.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy prawdziwość nierówności (21) dla $n=1$.
   Lewa strona: $L=(2\cdot 1-1)!!=1$.
   Prawa strona: $P=1^1=1$. Zatem $L \leqslant P$.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: $(2n-1)!! \leqslant n^n$.
   Teza indukcyjna: $(2n+1)!! \leqslant (n+1)^{n+1}$.
   Obie strony założenia indukcyjnego pomnożymy teraz przez czynnik $(2n+1)$. W wyniku tego otrzymamy nierówność:

(22) $$(2n-1)!!(2n+1)=(2n+1)!! \leqslant (2n+1)n^n .$$

Po lewej stronie otrzymaliśmy lewą stronę tezy indukcyjnej, a oszacowaniem prawej zajmiemy się poniżej. Jeśli wykorzystać wzór dwumienny Newtona, to można napisać:

(23)
$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}n^{n+1-k}1^k \\ &= \binom{n+1}{0}n^{n+1}+\binom{n+1}{1}n^n+\ldots+\binom{n+1}{n+1} > n^{n+1}+(n+1)n^n .\end{aligned}$$

Po prawej stronie możemy teraz rozpoznać prawą stronę (22):

(24) $$(2n+1)n^n = n\cdot n^n+(n+1)n^n = n^{n+1}+(n+1)n^n ,$$

i na mocy (23) otrzymujemy tezę indukcyjną, co kończy dowód.

Zadanie 8

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$ liczba postaci n^7-n jest podzielna przez 7.

Wskazówka

Należy tak przekształcić liczbę $(n+1)^7-(n+1)$, aby móc skorzystać z założenia indukcyjnego.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy, czy liczba n^7-n podzielna jest przez 7 dla $n=2$.
   Ponieważ $2^7-2=2(2^6-1)=2(64-1)=2\cdot 63=18\cdot 7$, więc podzielność ma miejsce.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: istnieje takie $l \in \mathbb{N}$, że $n^7-n=7\cdot l$.
   Teza indukcyjna: istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $(n+1)^7-(n+1)=7\cdot k$.
   Przekształćmy teraz lewą stronę tezy indukcyjnej, korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona:

(25)

$$\begin{aligned}(n+1)^7-(n+1) &= \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}n^{7-k}1^k-(n+1)\\ &= n^7+\binom{7}{1}n^6+\binom{7}{2}n^5+\binom{7}{3}n^4+\binom{7}{4}n^3+\binom{7}{5}n^2+\binom{7}{6}n+1-n-1\\ &= \underline{n^7}+7(n^6+n)+21(n^5+n^2)+35(n^4+n^3)-\underline{n}\\ &= 7(\underbrace{l+n^6+n+3n^5+3n^2+5n^4+5n^3}_{k}).\end{aligned}$$

Dokonując powyższych przekształceń skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego, zastępując dwa podkreślone wyrazy wielkością $7\cdot l$. W wyniku tego, po prawej stronie uzyskaliśmy prawą stronę tezy indukcyjnej, gdyż wyrażenie w nawiasie jest liczbą naturalną. Można je oznaczyć symbolem k. Dowód indukcyjny jest więc ukończony.

Zadanie 9

Wykazać, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ liczba postaci $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez 6.

Wskazówka

Należy tak przekształcić liczbę $(n+1)(n+2)(2n+3)$, aby móc skorzystać z założenia indukcyjnego.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy, czy liczba $n(n+1)(2n+1)$ podzielna jest przez 6 dla $n=1$.
   Ponieważ $1(1+1)(2\cdot 1+1)=6$, więc podzielność ma miejsce.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: istnieje takie $l\in\mathbb{N}$, że $n(n+1)(2n+1)=6\cdot l$.
   Teza indukcyjna: istnieje takie $k\in\mathbb{N}$, że $(n+1)(n+2)(2n+3)=6\cdot k$.
   Przekształćmy teraz lewą stronę tezy indukcyjnej w następujący sposób:

(26)

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(2n+3) &= (n+2)(n+1)(2n+1+2)\\ &= \underline{n(n+1)(2n+1)}+2(n+1)(2n+3)+2n(n+1)\\ &= 6\cdot l+2(n+1)(n+2n+3)=6\cdot l+6(n+1)^2=6[\underbrace{l+(n+1)^2}_{k}].\end{aligned}$$

Dokonując powyższych przekształceń skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego, zastępując podkreślony wyraz wielkością $6\cdot l$. W wyniku tego, po prawej stronie uzyskaliśmy prawą stronę tezy indukcyjnej, gdyż wyrażenie w nawiasie jest liczbą naturalną. Można je oznaczyć symbolem k. Tym samym zakończyliśmy dowód indukcyjny.

Uwaga

Czasami dowód indukcyjny jest żmudniejszy niż dowód wprost. Wystarczy bowiem napisać $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)(2n+4-3)=2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)$. Ponieważ spośród trzech kolejnych liczb naturalnych jedna jest podzielna przez trzy i spośród dwóch kolejnych liczb naturalnych jedna jest parzysta to liczba jest podzielna przez 6.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 10

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 2$ liczba postaci $4^n + 6n - 10$ jest podzielna przez 9.

Wskazówka

Należy tak przekształcić liczbę $4^{n+1} + 6(n+1) - 10$, aby móc skorzystać z założenia indukcyjnego.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy, czy liczba $4^n + 6n - 10$ podzielna jest przez 9 dla $n = 2$.
   Ponieważ $4^2 + 6 \cdot 2 - 10 = 18$, więc podzielność ma miejsce.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: istnieje takie $l \in \mathbb{N}$, że $4^n + 6n - 10 = 9 \cdot l$.
   Teza indukcyjna: istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $4^{n+1} + 6(n+1) - 10 = 9 \cdot k$.
   Przekształćmy teraz lewą stronę tezy indukcyjnej w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
4^{n+1} + 6(n+1) - 10 &= 4 \cdot \underline{4^n} + 6(n+1) - 10 = 4(9l - 6n + 10) + 6(n+1) - 10 \\
&= 36l - 24n + 40 + 6n - 4 = 9\underbrace{(4l - 2n + 4)}_{k}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Dokonując powyższych przekształceń skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego, zastępując podkreślony wyraz wielkością $9l - 6n + 10$. W wyniku tego, po prawej stronie uzyskaliśmy prawą stronę tezy indukcyjnej, gdyż wyrażenie w nawiasie jest liczbą naturalną. Można je oznaczyć symbolem k. Tym samym zakończyliśmy dowód indukcyjny.

Zadanie 11

Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wielomian:

$$
w_n(x) = (4n+3)x^{n+2} - (7n+6)x^{n+1} + (3n+2)x^n + 1, \tag{28}
$$

jest podzielny przez $(x-1)^2$.

Wskazówka

Należy tak przekształcić wielomian $w_{n+1}(x)$, aby wykorzystać założenie indukcyjne.

Rozwiązanie

1. Sprawdzamy, czy wielomian $w_0(x)$ podzielny jest przez $(x-1)^2$.
   Ponieważ $w_0(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$, więc podzielność ma miejsce.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: istnieje taki wielomian $q(x)$, że $w_n(x) = (x-1)^2 q(x)$.
   Teza indukcyjna: istnieje taki wielomian $p(x)$, że $w_{n+1}(x) = (x-1)^2 p(x)$.
   Przekształcimy teraz wielomian $w_{n+1}(x)$ w poniższy sposób:

$$
\begin{aligned}
w_{n+1}(x) &= (4n+7)x^{n+3} - (7n+13)x^{n+2} + (3n+5)x^{n+1} + 1 \\
&= \underline{(4n+3)x^{n+3}} + 4x^{n+3} - \underline{(7n+6)x^{n+2}} - 7x^{n+2} \\
&+ \underline{(3n+2)x^{n+1}} + 3x^{n+1} + \underline{x} - x + 1.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Zbierając razem cztery podkreślone wyrażenia widzimy, że mają one postać $x\,w_n(x)$, co pozwoli nam wykorzystać założenie indukcyjne. Otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
w_{n+1}(x) &= x\,w_n(x) + x^{n+1}(4x^2 - 7x + 3) - (x-1) \\
&= x(x-1)^2 q(x) + x^{n+1}(x-1)(4x-3) - (x-1) \\
&= x(x-1)^2 q(x) + (x-1)[x^{n+1}(4x-3) - 1].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka wobec wyzwań XXI wieku współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wielomian $x^{n+1}(4x-3)-1$ zeruje się dla $x=1$, więc można go zapisać w postaci: $(x-1)r(x)$, gdzie $r(x)$ jest także pewnym wielomianem. Pozwala nam to nadać wzorowi na $w_{n+1}(x)$ formę:

(31)
$$w_{n+1}(x) = (x-1)^2\underbrace{\left[x\,q(x)+r(x)\right]}_{p(x)}.$$

Wyrażenie w nawiasach prostokątnych znów jest wielomianem, co oznacza, że otrzymaliśmy tezę indukcyjną, a tym samym zakończyliśmy dowód indukcyjny.

Zadanie 12

Wykazać, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ wielomian:

(32)
$$w_n(x) = (n+2)x^{n+2}+(n+4)x^{n+1}+x^n+(-1)^n,$$

ma podwójne miejsce zerowe dla $x=-1$.

Wskazówka

Należy tak przekształcić wielomian $w_{n+1}(x)$, aby wykorzystać założenie indukcyjne.

Rozwiązanie

Zadanie w istocie sprowadza się do wykazania podzielności wielomianu $w_n(x)$ przez $(x+1)^2$. Możemy więc postępować tak, jak w poprzednim zadaniu.

1. Sprawdzamy, czy wielomian $w_0(x)$ podzielny jest przez $(x+1)^2$.
   Ponieważ $w_0(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2$, więc podzielność ma miejsce.
2. Wykonujemy krok indukcyjny.
   Założenie indukcyjne: $w_n(x)=(x+1)^2q(x)$, gdzie $q(x)$ jest pewnym wielomianem.
   Teza indukcyjna: istnieje wielomian $p(x)$ taki, że $w_{n+1}(x)=(x+1)^2p(x)$.
   Przekształcimy teraz wielomian $w_{n+1}(x)$ w następujący sposób:

(33)
$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) &= (n+3)x^{n+3}+(n+5)x^{n+2}+x^{n+1}+(-1)^{n+1}\\ &= \underline{(n+2)x^{n+3}}+x^{n+3}+\underline{(n+4)x^{n+2}}+x^{n+2}\\ &+\underline{x^{n+1}}+\underline{(-1)^n x}-(-1)^n x+(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Zbierając razem cztery podkreślone wyrażenia widzimy, że mają one postać $x\,w_n(x)$, co pozwoli nam wykorzystać założenie indukcyjne. Otrzymujemy:

(34)
$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) &= x\,w_n(x)+x^{n+2}(x+1)+(-1)^{n+1}(x+1)\\ &= x(x+1)^2q(x)+(x+1)\left[x^{n+2}+(-1)^{n+1}\right]. \end{aligned}$$

Wielomian $x^{n+2}+(-1)^{n+1}$ zeruje się dla $x=-1$, więc można go zapisać w postaci: $(x+1)r(x)$, gdzie $r(x)$ jest także pewnym wielomianem. Pozwala nam to nadać wzorowi na $w_{n+1}(x)$ formę:

(35)
$$w_{n+1}(x) = (x+1)^2\underbrace{\left[x\,q(x)+r(x)\right]}_{p(x)}.$$

Wyrażenie w nawiasach prostokątnych znów jest wielomianem, co oznacza, że otrzymaliśmy tezę indukcyjną, a tym samym zakończyliśmy dowód indukcyjny.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt *Fizyka wobec wyzwań XXI wieku* współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego