Zadanie 1. Stosując metodę indukcji matematycznej pokaż, że

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Zadanie 2. Metodą indukcji matematycznej udowodnij, że

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$,

(d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Zadanie 3. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy, że

(a) liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,

(b) liczba $4n^2 + 15n - 1$ jest podzielna przez 9,

(c) liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez 3,

(d) liczba $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ dzieli się przez 7.

Zadanie 4. Wykazać, że:

(a) dla każdego $n > 2$ zachodzi nierówność:

$$2^n > 2n + 1,$$

(b) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$4^n > n^3,$$

(c) dla każdego $n > 4$ zachodzi nierówność:

$$n^{n+1} > (n+1)^n,$$

(d) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Wykazać następujące własności symbolu Newtona

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, gdy $0 < k < n$,

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Korzystając z zasady indukcji matematycznej i poprzednich zadań uzasadnić, że

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$,

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$,

(d) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.