MATEMATYKA.
Zadania maturalne – poziom rozszerzony.

I. Liczby, zbiory, wartość bezwzględna.

1. Porównaj liczby a^b oraz b^a, gdzie $a=\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$, $b=\dfrac{81^{-1}\cdot\sqrt{3}}{27^{-2}\cdot\sqrt[4]{9}}$.

Rozw: $a^b>b^a$. [MRI2009/4pkt]

2. Oblicz wartość wyrażenia: $\left[(1{,}3)^{-1}:\left(\dfrac{169}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\cos 120^o+\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot tg\,225^o$ Rozw: 0. [MR/4pkt]

3. Uzasadnij, że $61^{16}<18^{24}$. [MR/3pkt]

4. Uzasadnij, że liczba $\log_3 2$ jest niewymierna. [MR/5pkt]

5. Wykaż, że wyrażenie 29^6-15^6 jest podzielne przez 14. [MR/3pkt]

6. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36. [MRV2011/4pkt]

7. Uzasadnij, że jeżeli dwie różne liczby naturalne m i n przy dzieleniu przez 7 mają takie same reszty, to różnica kwadratów liczb m i n jest podzielna przez 7. [MR/3pkt]

8. Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których część wspólna przedziałów $\left(-\infty;m^3+3\right\rangle$ oraz $\left\langle 3m^2+m;+\infty\right)$ (gdzie $m\in R$) jest zbiorem jednoelementowym. Rozw: $m\in\{-1{,}1{,}3\}$ [MR/3pkt]

9. Wykaż, że $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}=4$. [MR/3pkt]

10. Oblicz: $\sqrt{198-140\sqrt{2}}+\sqrt{198+140\sqrt{2}}$. Rozw: 20. [MR/3pkt]

11. Wykaż, że prawdziwa jest równość: $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$. [MRVI2013/4pkt]

12. Rozwiąż równanie $|x+3|+|x-1|=x+18$. Rozw: $x\in\left\{-\dfrac{20}{3};16\right\}$. [MR/4pkt]

13. Rozwiąż równanie: $|2x-3|-|x+2|=8-4\sqrt{x^2+4x+4}$. Rozw: $x\in\left\{-\dfrac{11}{5};-1\right\}$ [MR/4pkt]

14. Rozwiąż równanie: $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$. Rozw: $x\in\langle 1,2\rangle\cup\{5\}$ [MR/4pkt]

15. Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2+4x+4}\geq 11-\sqrt{x^2-6x+9}$. Rozw: $x\in\left(-\infty;-5\right\rangle\cup\left\langle 6;+\infty\right)$. [MRVI2013/5pkt]

16. Rozwiąż nierówność $|6-2x|-4 \le |5+3x|$. Rozw: $x \in (-\infty;-7\rangle \cup \left\langle -\frac{3}{5};+\infty\right)$. [MR/5pkt]

17. Rozwiąż nierówność: $||x+4|-3|<2$. Rozw: $x \in (-9;-5) \cup (-3;-1)$ [MR/3pkt]

18. Rozwiąż nierówność: $||x-1|-7|>3$. Rozw: $x \in (-\infty;-9) \cup (-3;-5) \cup (11;+\infty)$. [MR/3pkt]

19. Rozwiąż równanie: $||2x-1|-7|=4$. Rozw: $x \in \{-5,-1,2,6\}$. [MR/3pkt]

20. Rozwiąż nierówność: $|||x-1|-1|-1| \le 1$. Rozw: $x \in \langle -2,4\rangle$. [MR/3pkt]

21. Rozwiąż nierówność: $|x-2|+|x+1| \ge 3x-3$. Rozw: $x \in (-\infty;2\rangle$. [MRVI2012/4pkt]

22. Rozwiąż nierówność: $|2x-5|-|x+4| \le 2-2x$. Rozw: $x \in \left(-\infty;-7\right\rangle \cup \left\langle -1;\frac{11}{3}\right\rangle$. [MRV2013/4pkt]

23. Rozwiąż nierówność: $\frac{-5|x-2|}{2-x}+1>x$. Rozw: $x \in (-\infty;-4) \cup (2;6)$. [MR/4pkt]

24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|x+5|=m^3+2m^2-m-2$ ma rozwiązanie. Rozw: $m \in \langle -2;-1\rangle \cup \langle 1;+\infty)$. [MR/3pkt]

25. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|x^2+4x-5|=m$ ma dokładnie trzy rozwiązania. Rozw: $m \in \{9\}$. [MR/3pkt]

26. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{9x^2+6x+1}}{3x+1}+\frac{\sqrt{9x^2+6x^3+x^4}}{5x^2+15x}$ dla $x \in (-\infty,-3)$.

Rozw: $-\frac{4}{5}$. [MR/4pkt]

27. Dana jest funkcja

a) Napisz wzór tej funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

b) Narysuj wykres funkcji f.

c) Podaj zbiór wartości funkcji $g(x)=|f(x)|-3$.

d) Zapisz wzór funkcji $h(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej i narysuj jej wykres.

Rozw: a) $f(x)=\begin{cases} -2x-4 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4) \\ -x \Leftrightarrow x \in \langle -4;2) \\ 2x-6 \Leftrightarrow x \in \langle 2;+\infty) \end{cases}$

c) $Z_w=\langle -5;+\infty)$,

d) $h(x)=\begin{cases} 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0\rangle \cup \langle 3;+\infty) \\ -1 \Leftrightarrow x \in (0;3) \end{cases}$ [MR/6pkt]

28. Wyznacz zbiór rozwiązań równania: $|x+1|+|x-2|=p$ w zależności od parametru p.

Rozw: Dla $p\in(-\infty;3)$ brak rozwiązań, dla $p=3$ nieskończenie wiele rozwiązań, dla $p\in(3;+\infty)$ dwa rozwiązania. [MR/6pkt]

29. Rozwiąż równanie: $\sqrt{x^2-2x+1}-2|x+3|+x+7=0$. Rozw: $x\in\{-7\}\cup\langle 1;+\infty)$ [MR/4pkt]

30. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność: $\sqrt{x^2-4x+4}<5-3|x-2|$.

Rozw: $x\in\{1,2,3\}$. [MR/3pkt]

31. Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$. Rozw: $x\in\langle -3;1\rangle$. [MRV2010/4pkt]

32. Rozwiąż nierówność $|2x+8|-|x-3|<2$. Rozw: $x\in(-13;-1)$ [MR/4pkt]

33. Rozwiąż nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$. Rozw: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. [MRVIII2010/4pkt]

34. Wykaż, że wśród rozwiązań równania $|x+2|-|x-4|=6$ istnieje takie, które jest liczbą niewymierną. [MR/4pkt]

35. Rozwiąż nierówność $\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{|x|}{x}+\frac{|x-3|}{x-3}\ge 3$. Rozw: $x\in(3;+\infty)$ [MR/4pkt]

36. Rozwiąż nierówność $\frac{|x|}{x}+\frac{|x-2|}{x-2}<1+\frac{|x-1|}{x-1}$. Rozw: $x\in(-\infty;0)\cup(1,2)$. [MR/4pkt]

37. Rozwiąż nierówność $|x+3|+|3x+9|<|x+5|$. Rozw: $x\in\left(-3\frac{2}{5};-2\frac{1}{3}\right)$. [MRI2009/4pkt]

38. Oblicz, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań: $\begin{cases} x+y=m \\ 3x-2y=2m-1 \end{cases}$ jest para liczb x i y spełniająca warunek: $|x|\le\frac{1}{2}$ i $|y|\le\frac{1}{2}$. Rozw: $m\in\left\langle -\frac{3}{8};\frac{7}{8}\right\rangle$ [MR/6pkt]

39. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} (x-3)^2+y^2=9 \\ |x|+|y|\le 6 \end{cases}$ Rozw: $(3;3),(6;0),(3;-3)$. [MR/5pkt]

40. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x dla których wartość wyrażenia $\frac{x^4-4x^2+x+6}{x+2}$ jest liczbą całkowitą. Rozw: $x\in\{-6;-4;-3-1;0;2\}$ [MR/5pkt]

41. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x dla których wartość wyrażenia $\frac{(9x^2-4)(x+1)}{3x^3+2x^2-3x-2}$ jest liczbą całkowitą. Rozw: $x\in\{0;2\}$ [MR/4pkt]

42. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność $\binom{2n}{2}>2\cdot\binom{n}{1}$. [MR/4pkt]

43. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ spełniona jest równość $(n-2)\cdot(n-2)!+(n-1)\cdot(n-1)!+n\cdot n!=(n+1)!-(n-2)!$. [MR/4pkt]

44. Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb. Rozw: $\{-1,0,1,2\}$ [MRV2012/4pkt]

45. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x,y), które spełniają równanie: $(2x-y+1)(x-y+1)=7$. Rozw: $(6,6)$, $(-6,-12)$, $(-6,-4)$, $(6,14)$. [MR/5pkt]

46. Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne takie, że sześcian największej z nich jest równy sumie sześcianów trzech pozostałych liczb. Rozw: 3, 4, 5, 6. [MR/5pkt]

47. Wykaż, że jeżeli $x+y=4$ to $x^3+y^3 \geq 16$. [MR/4pkt]

48. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność: $a^2+4b^2+3c^2+13 \geq 2a+12b+6c$. [MR/4pkt]

49. Wykaż, ze jeżeli $x+y+z=0$ to $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\dfrac{1}{3}$. [MR/3pkt]

50. Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a+b=2c$ to $\dfrac{a}{a-c}+\dfrac{b}{b-c}=2$. [MRV2011/4pkt]

51. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność: $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$. [MRVI2012/3pkt]

52. Udowodnij, że jeżeli $a,b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$. [MR/4pkt]

53. Udowodnij, że jeżeli $a,b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $4a^3+b^3 \geq 3ab^2$. [MRV2012/3pkt]

54. Uzasadnij, że jeżeli $2a+b \geq 0$, to $2a^3+b^3 \geq 3a^2b$. [MRVI2013/3pkt]

55. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność: $\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. [MRVIII2010/4pkt]

56. Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie a i b spełniają warunek $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{b+3a}{a+3b}$, to $a=b$. [MR/4pkt]

57. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek $x^2+(|y|-2)^2=16$. [MR/3pkt]

58. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów (x,y), których współrzędne spełniają równanie: $x+|x|=y+|y|$. [MR/4pkt]

II. Funkcja: liniowa, kwadratowa, wielomianowa, wymierna.

1. Liczby x_1 x_2 $(x_1 \neq x_2)$ są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + 2mx + m = 0$. Narysuj wykres funkcji g określonej wzorem: $g(m) = x_1^2 + x_2^2$. Rozw: $g(m) = 4m^2 - 2m$, $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ [MR / 6pkt]

2. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego są pierwiastkami trójmianu $y = x^2 - bx + 70.$ Pole kwadratu o boku równym przeciwprostokątnej tego trójkąta jest równe 149. Wyznacz wartość współczynnika b. Rozw: b = 17. [MR/4pkt]

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m+1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż 2,5. Rozw: $m \in \left(-1;-\frac{2}{5}\right) \cup \left(2;5\right\rangle$. [MRVI2013/5pkt]

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$. Rozw: $m \in (-1;4)$ [MRVIII2010/5pkt]

5. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$. Rozw: $m \in \left(-3;-2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2};3\right)$ [MRV2010/5pkt]

6. Dla jakiej wartości parametru α suma kwadratów różnych pierwiastków równania $x^2 - 2x\sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$ jest równa 3? Rozw: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ gdzie $k \in C$. [MR/4pkt]

7. Dla jakiego $\alpha \in \langle 0,2\pi \rangle$ pierwiastki równania $x^2 - 2x\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 = 3$? Rozw: $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. [MR/5pkt]

8. Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12.$ Rozw: $m \in \left\{-\sqrt{14}; \sqrt{14}\right\}$. [MRV2012/6pkt]

9. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in R$, dla których równanie $x^2 - mx + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 46.$ Rozw: $m \in \left\{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\right\}$. [MR/5pkt]

10. Wyznacz wszystkie liczby $m \in R$ dla których równanie $x^2 + mx + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^3 + x_2^3 = 64$. Rozw: $m = -4$. [MR/6pkt]

11. Dla jakich wartości parametru m równanie $-x^2 + 4x = m$ ma dwa pierwiastki, z których każdy jest większy od 1. Rozw: $m \in (3;4)$ [MR / 6pkt]

12. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $2x^2 + (3-2m)x - m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że $|x_1 - x_2| = 3.$ Rozw: $m \in \left\{-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right\}$ [MRVI2012/5pkt]

13. Dla jakich wartości parametru a różnica pierwiastków równania $ax^2+x-2=0$ równa się trzy? Rozw: $a=-\frac{1}{9}$, $a=1$ [MR/5pkt]

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $5x^2-kx+1=0$ ma dwa różne pierwiastki, których różnica jest liczbą z przedziału $(0;1)$. Rozw: $k\in\left(-3\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)\cup\left(2\sqrt{5},3\sqrt{5}\right)$ [MR/4pkt]

15. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-mx+m-1=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $|x_1-x_2|>2\cdot x_1x_2$. Rozw: $m\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. [MR/5pkt]

16. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-4mx-m^3+6m^2+m-2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 takie, że $(x_1-x_2)^2<8(m+1)$. Rozw: $m\in(0;1)\cup(2;3)$ [MRV2011/6pkt]

17. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $mx^2+(m+3)x+4=0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma odwrotności jest mniejsza od 2. Rozw: $m\in(-11;0)\cup(0;1)\cup(9;+\infty)$ [MR/5pkt]

18. Dane jest równanie $2x^2-13x+m=0$. Wyznacz te wartości parametru m, dla których jeden z pierwiastków jest dwa razy większy od drugiego. Rozw: $m=18\frac{7}{9}$. [MR/5pkt]

19. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów dwóch różnych pierwiastków równania $x^2+(m-5)x+m-7=0$ jest najmniejsza? Rozw: $m=6$. [MR/5pkt]

20. Dane jest równanie $(x+3)\cdot\left[x^2+(p+4)x+(p+1)^2\right]=0$ z niewiadomą x.

a) Rozwiąż to równanie dla $p=1$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.

Rozw: a) $x\in\{-4,-3,-1\}$, b) $p\in(-\infty;-2)\cup\langle 2;+\infty)$. [MRI2009/6pkt]

21. Funkcja kwadratowa $f(x)=2x^2+bx+c$ jest malejąca w przedziale $(-\infty;4)$ i rosnąca w przedziale $(4;+\infty)$, a iloczyn jej miejsc zerowych wynosi 12.

a) Wyznacz współczynniki b i c.

b) Nie wyznaczając miejsc zerowych x_1 oraz x_2 oblicz wartość wyrażenia $x_1^2+x_2^2$

Rozw: a) $b=-16$, $c=24$, b) 40. [MR XII 2007 / 4pkt]

22. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+2(1-m)x+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2$.

Rozw: $m\in\left\langle 0;3-\sqrt{7}\right\rangle$. [MRV2013/6pkt]

23. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja: $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe. [MR/4pkt]

24. Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x)=|x|-x^2$. Rozw: $f_{\max}(-0{,}5)=f_{\max}(0{,}5)=0{,}25$. [MR/5pkt]

25. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2-4|x|$ i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$ w zależności od parametru m.

Rozw: $\begin{cases} 0 \Leftrightarrow m<-4 \\ 2 \Leftrightarrow m\in\{-4\}\cup(0;+\infty) \\ 3 \Leftrightarrow m=0 \\ 4 \Leftrightarrow m\in(-4;0) \end{cases}$ [MRVIII201/4pkt]

26. Dana jest funkcja $f(x)=-2|x-1|\cdot|3-x|$. Naszkicuj wykres tej funkcji. Na podstawie wykresu określ liczbę pierwiastków równania *f(x) = m,* w zależności od parametru *m*. Sporządź wykres funkcji *g(m)* przyporządkowującej zmiennej *m* liczbę pierwiastków badanego wyżej równania.

Rozw: $g(m)=\begin{cases} 0 \Leftrightarrow m\in(0;+\infty) \\ 2 \Leftrightarrow m\in\langle-\infty;-2\rangle\cup\{0\} \\ 3 \Leftrightarrow m=-2 \\ 4 \Leftrightarrow m\in(-2;0) \end{cases}$ [MR/7pkt]

27. Dane jest równanie kwadratowe z parametrem m postaci $x^2+mx-2x+1=0$. Funkcja f określa iloraz sumy pierwiastków tego równania przez pierwiastek z ich iloczynu, w zależności od wartości *m*. Podaj wzór funkcji *f*. Określ dziedzinę tej funkcji. Rozw: $f(m)=2-m$, $D_f=(-\infty;0\rangle\cup\langle4;+\infty)$ [MR/5pkt]

28. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^2-mx+2m$. Funkcja g przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej m najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle-1;1\rangle$. Wyznacz wzór funkcji g.

Rozw: $g(m)=\begin{cases} 3m+1 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-2) \\ -\frac{1}{4}m^2+2m \Leftrightarrow m\in\langle-2;2\rangle \\ m+1 \Leftrightarrow m\in(2;+\infty) \end{cases}$ [MR/5pkt]

29. Narysuj wykres funkcji określonej wzorem: $f(x)=\begin{cases} -2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1\rangle \\ -x^2+2x+1 \Leftrightarrow x\in(-1;2\rangle \\ \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x\in(2;+\infty) \end{cases}$

Korzystając z wykresu funkcji *f*:

a) podaj rozwiązanie nierówności $f(x)\geq 2$,

b) narysuj wykres funkcji określonej wzorem $g(x)=-f(x-2)$.

Rozw: a) $x\in\{1\}\cup\langle4;+\infty)$. [MR/6pkt]

30. Rozwiąż nierówność: $x^5+12x^2\leq 3x^4+4x^3$. Rozw: $x\in(-\infty;-2\rangle\cup\{0\}\cup\langle2;3\rangle$ [MR/3pkt]

31. Rozwiąż nierówność: $x^7+2x^5-3x^3\leq 0$. Rozw: $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle0;1\rangle$ [MR/3pkt]

32. Rozwiąż nierówność: $x^4+x^2\geq 2x$. Rozw: $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle1;+\infty)$. [MRV2012/4pkt]

33. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie spełniające nierówność: $x^3+90\leq 2\cdot(x+5)^2$

Rozw: $x\in\{2;3;4\}$ [MR/4pkt]

34. Dany jest wielomian trzeciego stopnia o współczynniku 1 przy najwyższej potędze . Pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 2. Wartość wielomianu w punkcie 1 jest równa -110. Wyznacz wzór tego wielomianu. Rozw: *W(x) = (x – 3)(x – 6)(x – 12).* [MR/5pkt]

35. Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dla argumentu 0 przyjmuje wartość 9. Liczby (-1) i 3 są pierwiastkami tego wielomianu, przy czym liczba 3 jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wyznacz wartości współczynników *a, b, c, d.* Rozw: $a = 1,\ b = -5,\ c = 3,\ d = 9.$ [MR/3pkt]

36. Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby 1, 3, 5. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24. [MRVI2013/4pkt]

37. Wyznacz wartości a i b współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ wiedząc, że $W(2) = 7$ oraz, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10. Rozw: $a = -5,\quad b = 9.$ [MRV2010/4pkt]

38. Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 24x + 9$ jest kwadratem wielomianu $P(x) = x^2 + cx + d.$ Oblicz a oraz b. Rozw: $a = -8, b = 22$ lub $a = 8, b = 10.$ [MRVI2012/4pkt]

39. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-1),\ (x+2),\ (x-3)$ daje reszty odpowiednio równe 5, 2, 27. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Rozw: $R(x) = 2x^2 + 3x.$ [MR/4pkt]

40. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x+3)$ jest równa 1 natomiast z dzielenia przez dwumian $(x-1)$ jest równa 5. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x+3)(x-1)$. Rozw: $R(x) = x + 4$ [MR/5pkt]

41. Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$, którego suma wszystkich współczynników jest równa 4, a suma współczynników przy potęgach parzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach nieparzystych. Wykaż, ze reszta $R(x)$ z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x+1)(x-1)$ jest równa $R(x) = 2x + 2.$ [MR/4pkt]

42. Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x-1),\ (x+1),\ (x+2)$ są odpowiednio równe 1, -1, 3. Znajdź resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2).$
Rozw: $R(x) = \frac{5}{3}x^2 + x - \frac{5}{3}.$ [MR/4pkt]

43. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.
Rozw: $m = 6,\quad x \in \left\{-2; \frac{1}{4}; 3\right\}.$ [MRV2013/4pkt]

44. Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ daje odpowiednio reszty 4, 3, 2.

Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $Q(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

Rozw: $R(x) = -x + 6$ [MR/4pkt]

45. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{2013} - 2x^{2012} + 2x^{2011} - 1$ przez $G(x) = x^3 - x$.

Rozw: $R(x) = -2x^2 + 3x - 1$. [MR/4pkt]

46. Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - x + b$ przy dzieleniu przez każdy z dwumianów: $(x+1)$, $(x-2)$, $(x+3)$ dają tę samą resztę. Wyznacz a i b. Rozw: $a = 1$, $b = -7$. [MR/5pkt]

47. Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden. Rozw: $(x^2 + x + 3)(x^2 + 5x - 3)$ [MRV2007/3pkt]

48. Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 12x - 9$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden. Rozw: $(x^2 + x - 1)(x^2 - 3x + 1)$ [MR/3pkt]

49. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 > 0$. [MR/4pkt]

50. Wykres funkcji g uzyskano z przesunięcia wykresu funkcji f danej wzorem $f(x) = \left|x^3 - 3\sqrt{2} \cdot x^2 - 2x + \sqrt{72}\right|$ o wektor o współrzędnych $\left[-2\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$. Podaj, dla jakich argumentów funkcja g osiąga najmniejszą wartość i ile ona wynosi. Rozw: $g\left(-3\sqrt{2}\right) = g\left(-\sqrt{2}\right) = g\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$ [MR/6pkt]

51. Wyznacz wszystkie te wartości parametru m $(m \in R)$, dla których zbiorem rozwiązań nierówności: $\frac{2m}{3-x} > 1$ jest przedział (3; 7). Rozw: m = -2. [MR/4pkt]

52. Uzasadnij, że dla każdej liczby dodatniej a prawdziwa jest nierówność $a^3 + \frac{3}{a} \geq 4$. [MR/5pkt]

53. Rozwiąż nierówność: $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \leq 0$. Rozw: $x \in (-3;0) - \{-2;-1\}$

[MR/6pt]

54. Wyznacz dziedzinę, a następnie uprość wyrażenie: $\dfrac{\dfrac{c^3 - 4c^2 - 17c + 60}{c^2 + c - 12} \cdot (c-2) + 7c - 59}{4c - 28}$.

Rozw: $D = R - \{-4,3,7\}$, $0{,}25(c+7)$ [MR/3pkt]

55. Rozwiąż równanie $\frac{x-m}{4-6x}-\frac{2x+m}{2x+1}=\frac{2-mx-7x^2}{6x^2-x-2}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których rozwiązanie równania jest liczbą należącą do przedziału $\left(-\infty;0\right\rangle$. Rozw: $x=\frac{5m-4}{2m-7}$, $m\in\left\langle\frac{4}{5};\frac{7}{2}\right)-\left\{\frac{5}{4}\right\}$. [MR/5pkt]

56. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{2|x|-1}{|x|+1}$, gdzie $x\in R$. Rozw: $Z_w=\left\langle-1;2\right)$. [MR/4pkt]

57. Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\frac{3|x|-2}{|x|+1}$. Korzystając z wykresu odczytaj przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 2. Rozw: $x\in(-4;4)$ [MR/3pkt]

58. Dane są funkcje $f(x)=\frac{2x+b}{ax+1}$ oraz $g(x)=\frac{ax+c}{ax+1}$ o których wiadomo, że ich wykresy mają punkt wspólny $P\left(-9;\frac{11}{13}\right)$, a miejscem zerowym funkcji *g* jest liczba $-\frac{5}{3}$. Wyznacz wartości parametrów *a*, *b*, *c*. Rozw: *a* = 3, *b* = - 4, *c* = 5. [MR/4pkt].

59. Para $\left(x_m;y_m\right)$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases}x-my=1\\mx-y=2\end{cases}$. Podaj dziedzinę funkcji $f(m)=\frac{x_m}{y_m}$ oraz naszkicuj jej wykres w układzie współrzędnych. Rozw: $f(m)=\frac{2m-1}{2-m}$, dla $m\in R-\{-1;1;2\}$ [MR/7pkt]

60. Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\frac{|x^2-4|}{2-|x|}$, a następnie określ, dla jakich wartości parametru *m* równanie $f(x)=m$ nie ma rozwiązania. Rozw: $m\in\left\langle-4;2\right)\cup\left\langle4;+\infty\right)$ [MR/4pkt]

61. Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\frac{|(x+3)(x-1)|}{x^3+4x^2+x-6}$. [MR / 7pkt]

62. Narysuj wykres funkcji $f(x)=\frac{|x^3-x^2|}{x^3-x^2}\cdot(x-2)^2$. [MR/4pkt]

III. Ciągi liczbowe.

1. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = |n-2| + |n-10|$. Sprawdź, które wyrazy tego ciągu są większe od 8. [MR/4pkt] Rozw: $n \in \{1,11,12,13,14,...\}$

2. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{6n^2+7n+2}{3n+2}$.

a) Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

b) Oblicz, które wyrazy tego ciągu są mniejsze od 17.

Rozw: $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ [MR/3pkt]

3. W ciągu arytmetycznym wyraz pierwszy jest równy 1, a ostatni -15. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu jeśli wiadomo, że drugi, trzeci i szósty są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Rozw: -63 [MR/5pkt]

4. Suma trzech liczb, będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 52. Jeżeli do pierwszej z nich dodamy 2, do drugiej 12, a do trzeciej 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz ten ciąg. Rozw: (4, 12, 36). [MR/4pkt]

5. Ciąg $(a,b,4)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(4,a,b)$ jest geometryczny. Oblicz a oraz b. Rozw: $a=-2, b=1$ lub $a=4, b=4$. [MR/4pkt]

6. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 63, a ich iloczyn jest równy 5832. Wyznacz ten ciąg. Rozw: (36, 18, 9), (9, 18, 36). [MR/5pkt]

7. O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a,b,c) jest arytmetyczny i $a+c-10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby. Rozw: $(a,b,c)=(26,5,-16)$ lub $(a,b,c)=(2,5,8)$ [MRV2010/5pkt]

8. Ciąg liczbowy (a,b,c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c. Rozw: $(9,11,13)$ lub $(33,11,-11)$. [MRV2013/5pkt]

9. Ciąg liczbowy (a,b,c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, natomiast ciąg $(a-5, b-4, c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c. Rozw: $(18,16,2)$ lub $(2,6,18)$. [MRVIII2010/5pkt]

10. Wyznacz trzywyrazowy ciąg geometryczny, w którym suma trzech kolejnych wyrazów jest równa 84, a ich iloczyn jest równy 13824. Rozw: $(48,24,12)$ lub $(12,24,48)$. [MR/5pkt]

11. Liczby niezerowe a, b, c są wyrazami ciągu geometrycznego o numerach odpowiednio p, q, r. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{a^r b^s c^p}{a^s b^p c^r}$. Rozw: 1. [MR/3pkt]

12. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.
Rozw: $(4,12,36)$, $\left(\frac{4}{9},-\frac{20}{9},\frac{100}{9}\right)$. [MRV2012/6pkt]

13. W ciągu arytmetycznym (a_n) $a_8=3$ i $a_{20}=27$.

a) Sprawdź, czy ciąg (a_8,a_{11},a_{20}) jest ciągiem geometrycznym.

b) Wyznacz taką wartość n, dla której suma n – początkowych wyrazów ciągu (a_n) ma wartość najmniejszą. Rozw: a) tak, b) 6. [MR/7pkt]

14. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_1=0$, a każdy następny wyraz ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest sumą numerów wszystkich wyrazów, poprzedzających dany wyraz. Zapisz wzór na wyraz ogólny tego ciągu. Rozw: $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$ [MR / 3pkt]

15. O ciągu (x_n) dla $n\geq 1$ wiadomo, że: ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=3^{x_n}$ dla $n\geq 1$ jest geometryczny o ilorazie 27 oraz, że $x_1+x_2+\ldots+x_n=145$. Oblicz x_1.
Rozw: 1. [MRV2011/4pkt]

16. W ciągu arytmetycznym (a_n), dla $n\geq 1$, dane są $a_1=-2$ oraz różnica $r=3$. Oblicz największe takie n, że $a_1+a_2+\ldots+a_n<2012$. Rozw: 37. [MRVI2012/5pkt]

17. Dany jest ciąg, którego wyraz ogólny określa wzór $a_n=\frac{3n^2+7n+2}{3n+1}$.

a) Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.
b) Wykaż, że ten ciąg jest arytmetyczny. [MR/3pkt]

18. Liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dodatnie i w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że prawdziwa jest równość: $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=\sqrt{a_1\cdot a_n}$. [MRVI2013/4pkt]

19. Niech S_n (S_k,S_m) oznacza sumę n (odpowiednio k, m) początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_i). Oblicz wartość wyrażenia:
$\frac{S_k}{k}(m-n)+\frac{S_m}{m}(n-k)+\frac{S_n}{n}(k-m)$. [MR/4pkt]

20. Ciąg (a,b,c) jest ciągiem arytmetycznym, w którym a, b, c oznaczają kolejno: długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu. Wiedząc dodatkowo, że $2a+2b+2c=24$ wyznacz wymiary prostopadłościanu o największym polu powierzchni całkowitej.
Rozw: $a=\frac{24}{11}$, $b=\frac{60}{11}$, $c=\frac{96}{11}$ [MR/6pkt]

21. Wyraz ogólny ciągu (a_n) dany jest wzorem $a_n = \frac{2+4+6+...+2n}{3n}$ dla $n \in N_+$.

a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Wyznacz takie dwa kolejne wyrazy tego ciągu, aby różnica ich sześcianów wynosiła $\frac{19}{27}$.

[MR/5pkt] Rozw: $m \in (-6;+\infty)$

22. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji kwadratowej o wzorze $f(x) = x^2 - (a+1)x + a^2$. Zbadaj, czy istnieje taka wartość parametru a, aby ciąg $(x_1 + x_2, \sqrt{2}, x_1 \cdot x_2)$ był ciągiem geometrycznym. [MR / 6 pkt]

23. Wyznacz liczbę x tak, aby ciąg $(\cos x, \cos^2 x, \cos 2\pi)$ był ciągiem arytmetycznym. Rozw: $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = 2k\pi$, $k \in C$ [MR/4pkt]

24. Wyraz ogólny ciągu a_n dany jest wzorem: $a_n = 5(p^2+1) \cdot 2^{2n+1}$.

a) Wykaż, ze dla każdej liczby rzeczywistej p ten ciąg jest geometryczny.

b) Oblicz, które wyrazy tego ciągu są mniejsze od 640 dla $p = 1$ i wyznacz te wyrazy.
[MR/5pkt] Rozw: $a_1 = 80$ i $a_2 = 320$

25. Dane są ciągi: arytmetyczny (a, x, b) i geometryczny (a, y, b) o dodatnich wyrazach. Wykaż, ze suma ciągu arytmetycznego jest nie mniejsza niż suma ciągu geometrycznego. [MR/5pkt]

IV. Trygonometria.

1. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ oblicz $\sin 2\alpha$. Rozw: $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$ [MR / 3pkt]

2. Nie używając tablic i kalkulatora sprawdź, czy liczba a jest większa od liczby b, jeżeli: $a = \frac{\cos 17^o \cos 6^o - \cos 73^o \sin 366^o}{\sin 473^o}$, $b = \left(2-\sqrt{3}\right)\sin 240^o$. Rozw: Tak. [MR / 7pkt]

3. Wykaż, że 1 nie jest wyrazem ciągu $a_n = \sin\frac{\pi\left(n^3 - n\right)}{2}$. [MR/4pkt]

4. Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ze sobą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta. Rozw: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. [MRI2009/4pkt]

5. Kąty α, β, γ trójkąta ABC spełniają zależność $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\beta}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $tg\frac{\alpha}{2} tg\frac{\gamma}{2}$. Rozw: $\frac{1}{2}$. [MR/4pkt]

6. Wykaż, że liczby a i b są równe, jeśli $a = 32\cos 20^o \cdot \cos 40^o \cdot \cos 80^o$ oraz $b = \left[\left(6 - 20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(6 + 20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$. [MR/4pkt]

7. Oblicz bez użycia kalkulatora $\cos^4 105^o - \sin^4 105^o$. Rozw: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. [MR/3pkt]

8. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot tg\beta}{\sin^3\beta}$ jeśli wiadomo, że kąty α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego. Rozw: 1. [MR / 4pkt]

9. Kąt α jest taki, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\left|\cos\alpha - \sin\alpha\right|$. Rozw: $\frac{\sqrt{2}}{3}$. [MRVI2012/5pkt]

10. Wykaż, że jeżeli $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. [MR/4pkt]

11. Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$. [MRVI2013/3pkt]

12. Sprawdź tożsamość: $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}$, dla $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in C$. [MR/5pkt]

13. Udowodnij, że jeżeli $\cos\alpha \neq \sin 7\alpha$ i $\cos 4\alpha \neq \sin 4\alpha$ to $\frac{\cos\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \sin 7\alpha} = \frac{\sin 4\alpha + \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha - \sin 4\alpha}$.
[MR/4pkt]

14. Rozwiąż równanie: $2tgx \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + tgx$ w przedziale $\langle 0;2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right\}$ [MRV2011/4pkt]

15. Rozwiąż równanie: $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0;2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{0;\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4};2\pi\right\}$ [MRV2013/4pkt]

16. Rozwiąż równanie: $2\cos^2 x - 2\cos^2 x \cdot \sin x = 1 - \sin x$ w przedziale $\langle 0;2\pi \rangle$. Rozw:
$x \in \left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$ [MR/4pkt]

17. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0;2\pi \rangle$. Rozw: $x \in \left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$ [MRVIII2010/4pkt]

18. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0;2\pi \rangle$. Rozw: $x \in \left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$ [MRV2010/4pkt]

19. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x + \sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$ należące do przedziału $\langle 0;2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{0;\frac{\pi}{4};\pi;\frac{5\pi}{4};2\pi\right\}$. [MR/4pkt]

20. Rozwiąż równanie: $\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x = 2.$

Rozw: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ gdzie $k \in C$. [MR/5pkt]

21. Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0;2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right\}$ [MRV2013/4pkt]

22. Rozwiąż równanie: $\frac{4}{\cos^2 3x + 4} = 2 - \frac{5}{\cos^2 3x + 5}$.

Rozw: $x \in \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$ [MR/5pkt]

23. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\frac{1}{tgx} - \cos x = \frac{1 - \sin x}{2\sin x}$ należące do przedziału $(0,2\pi)$.

Rozw: $x \in \left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$. [MR/5pkt]

24. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16}$ należące do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24} \right\}$. [MR/5pkt]

25. Rozwiąż równanie: $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

Rozw: $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ dla $k \in C$. [MRV2012/4pkt]

26. Rozwiąż równanie $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$ [MR/4pkt]

27. Rozwiąż równanie $2tgx \cos x + 1 = 2\cos x + tgx$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozw: $x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ [MR/4pkt]

28. Rozwiąż równanie: $3 \cdot 4^{-\sin^2 x} = 2^{\cos 2x} + 0{,}5$.

Rozw: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. [MR/4pkt]

29. Oblicz tg2x wiedząc, że $\frac{4\sin x + 2\cos x}{3\sin x - \cos x} = 2$. Rozw: $-\frac{4}{3}$ [MR/3pkt]

30. Oblicz sin2x, jeżeli: $\frac{3\sin x + 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} = 1$. Rozw: 1. [MR/3pkt]

31. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ należących do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$. Rozw: S = $\frac{3\pi}{4}$ [MR / 6pkt]

32. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ gdzie $x \in R$.

Rozw: $Z_w = \left\langle -3, \frac{3}{2} \right\rangle$ [MR/5pkt]

33. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{1}{\cos 2x + 4\sin^2 x}$ gdzie $x \in R$.

Rozw: $Z_w = \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle$. [MR/4pkt]

34. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2(3\cos^2 x + 1)^2 - 12(3\cos^2 x + 1) + 16$ gdzie $x \in R$. Rozw: $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 6$. [MR/4pkt]

35. Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$. [MRV2007/3pkt]

36. Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\dfrac{\cos x+|\sin x|}{\cos x}$ dla $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0\le f(x)<2$.

    Rozw: $x\in\left\langle-\dfrac{5\pi}{4};-\dfrac{3\pi}{4}\right\rangle\cup\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left\langle\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right\rangle$ [MR/4pkt]

37. Naszkicuj wykres funkcji y = sin2x w przedziale $\langle-2\pi;2\pi\rangle$. Naszkicuj wykres funkcji: $y=\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $\langle-2\pi;2\pi\rangle$ i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność: $\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}<0$.

    Rozw: $x\in\left(-\dfrac{3}{2};-\pi\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ [MR V 2006/4 pkt]

38. Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których rozwiązanie *(x; y)* układu równań:

$$\begin{cases} mx-4y=\cos^2 10^o+\cos^2 100^o+m \\ 2x+2y=-1 \end{cases}$$

spełnia warunki: *x>0* i *y<0.*

    Rozw: $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ [MR/5pkt]

39. Dana jest funkcja: $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$, $x\in R.$.
    a) Narysuj wykres funkcji *f*
    b) Rozwiąż równanie*: f(x)* = 1.

    Rozw: $x=2k\pi$, $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$. [MRV2005/4pkt]

40. Dane są funkcje: $f(x)=\left|2^{x-m}-1\right|+3$ oraz $g(x)=3\cos\dfrac{1}{2}x$. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji f i g mają jeden punkt wspólny?

    Rozw: $m=4k\pi$, gdzie $k\in C$ [MR/6pkt]

V. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.

1. Wiedząc, że $\log_c m = 2$, $\log_b m = 5$, $\log_a m = 10$ oblicz $\log_{abc} m$. Rozw: 1,25. [MR/4pkt]

2. Uzasadnij, że $2^{\log_2 3 - \log_8 27 + \log_{\frac{1}{4}} 9} > 0{,}33.$ [MR/4pkt]

3. Suma pierwiastków trójmianu $y = ax^2 + bx + c$ jest równa $\log_{a^2} c \cdot \log_{c^2} a$, gdzie $a \in R_+ - \{1\}$, $c \in R_+ - \{1\}$. Uzasadnij, że odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójmianu jest równa $\frac{1}{8}$. [MR / 3pkt]

4. Oblicz wartość funkcji $f(x) = \left|1 - 2^{x-3}\right|$ dla argumentu

$$x = \log_{13}\left(\log_{12}^2 8 + \log_{12} 64 \cdot \log_{12} 18 + \log_{12}^2 18 + 49^{\frac{1}{\log_3 7}}\right).$$

Rozw: $f(1) = \frac{3}{4}$. [MR/4pkt]

5. Wiedząc, że $a = \frac{\log 8}{\log 81}$ i $b = \frac{1}{\log 64}$ oblicz wartość wyrażenia $27^{4a} + 16^{3b}$. Wynik podaj w najprostszej postaci. Rozw: 612. [MR/4pkt]

6. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{2x+1} \frac{(2x+4)(6-x)}{x+5}$.

Rozw: $D = \left(-\frac{1}{2}; 6\right) - \{0\}$ [MR / 4pkt]

7. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{9-x^2}}$. Rozw: $m \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right\rangle \cup \left(-1; \frac{\sqrt{33}-1}{2}\right\rangle$

[MR/5pkt]

8. Oblicz wartość wyrażenia a^{-b}, jeśli: $a = \left(5^{\frac{\log_{100} 3}{\log 3}} \cdot 3^{\frac{\log_{100} 5}{\log 5}}\right)^{2\log_{15} 8}$ oraz $b = \sqrt[4]{36 - 16\sqrt{5}} \cdot \left(4 + 2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Rozw: $\frac{1}{64}$ [MR/6pkt]

9. W prostokątnym układzie współrzędnych przedstaw zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunki: $\frac{x+3}{\log_2(x+2)} = \log_{x+2}(y+2)$ i $y^2 \le 36$. [MR/5pkt]

10. Wykaż, że jeżeli $\log_a b$ (dla $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$) jest liczbą wymierną dodatnią, to liczba $\log_b a \cdot \log_{\frac{1}{b}} a$ też jest wymierna. [MR / 4pkt]

11. Wykaż, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi takimi, że $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ oraz $ab \neq 1$ to zachodzi równość: $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$. [MR/4pkt]

12. Sprawdź tożsamość (podaj odpowiednie założenia): $\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x}$. [MR/4pkt]

13. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi nierówność: $\log^2(\pi a) + \log^2(\pi + a) \geq \frac{2}{\log_{\pi+a} 10} - \log_\pi \pi$. [MR/4pkt]

14. Udowodnić, że jeżeli liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, to liczby $\frac{1}{\log_a A}$, $\frac{1}{\log_b A}$, $\frac{1}{\log_c A}$ dla $A \in (0;+\infty)$ tworzą ciąg arytmetyczny. [MR/5pkt]

15. Wykaż, że jeżeli $a, b \in (0,1)$ to prawdziwa jest nierówność: $4\log_b a + \log_a b \geq 4$. [MR/4pkt]

16. Wykaż, że liczby $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny oraz oblicz różnicę tego ciągu. Wyraź sumę 10 początkowych wyrazów tego ciągu w zależności od wyrazu drugiego. Rozw: 1; $S_{10} = 10a_2 + 35$. [MR/5pkt]

17. Udowodnij, że jeżeli $x \in R_+ - \{1\}$ to $(\log_2 x)^{-1} + (\log_3 x)^{-1} + \ldots + (\log_{1993} x)^{-1} = (\log_{1993!} x)^{-1}$. [MR/3pkt]

18. Dane są zbiory $A = \{x : x \in R \wedge |2^x - 1| < 3\}$, $B = \left\{x : x \in R \wedge x\log_3 4 + x \geq \frac{\log_2 3 + 2}{\log_2 3}\right\}$.

Wyznacz $A \cap B$. Rozw: $\langle 1; 2)$. [MR/4pkt]

19. Wykaż, że funkcja $f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ jest nieparzysta. [MR/4pkt].

20. Wiedząc, że $\log_5 3 = a$, oblicz wartość wyrażenia: $\log_{25} 3 + \log_9 \sqrt{5}$.

Rozw: $\frac{2a^2+1}{4a}$. [MR/4pkt]

21. Wiadomo, że $\log_6 2 = a$. Wyznacz $\log_{24} 36$ w zależności od a.

Rozw: $\frac{2}{2a+1}$ [MR / 4pkt]

22. Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \frac{|\log_2 x|}{\log_2 x}$. [MR/4pkt]

23. Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \log_2\left(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9\right) - \log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$. Rozw: $f(x) = \log_2(x+3) + 1$ dla $D = (-3;1)$ [MR/5pkt]

VI. Geometria analityczna.

1. Wyznacz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2+y^2+4x-6y=7$ nachylonych do osi OX pod takim kątem α, że $\sin\alpha=-2\cos\alpha$. Rozw: $y=-2x-11$, $y=-2x+9$ [MR/6pkt]

2. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ poprowadzonymi przez punkt $A=(2;0)$. Rozw: 90°. [MRV2011/4pkt]

3. Punkty $A=(2,0)$ i $B=(4,2)$ leżą na okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y-3)^2=10$. Wyznacz na tym okręgu taki punkt *C*, aby trójkąt *ABC* był trójkątem równoramiennym o podstawie *AB*. Rozw: $C=\left(1-\sqrt{5},3+\sqrt{5}\right)$ lub $C=\left(1+\sqrt{5},3-\sqrt{5}\right)$. [MRVI2013/4pkt]

4. Znajdź taki punkt *C*, leżący na prostej $y=x+1$, aby pole trójkąta *ABC*, którego wierzchołkami są punkty *C*, $A=(2,1)$, $B=(5,2)$ było równe 5. Rozw: $C=(7,6)$ lub $C=(-3,-4)$. [MR/6pkt]

5. Jeden z końców odcinka leży na paraboli $y=x^2$, a drugi na prostej o równaniu $y=2x-6$. Wykaż, że długość tego odcinka jest nie mniejsza od $\sqrt{5}$. Sporządź odpowiedni rysunek. [MRI2009/5pkt]

6. Punkty $A=(-3,-2)$ i $C=(5,2)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu *ABCD*, którego bok ma długość 5. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu. Rozw: $B=(2,-2)$, $D=(0,2)$. [MR/5pkt]

7. Punkt $A=(2,-3)$ jest wierzchołkiem rombu *ABCD* o polu równym 300. Punkt $S=(3,4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu. Rozw: $C=(4,11)$, $B=(24,1)$, $D=(-18,7)$. [MRVIII2010/6pkt]

8. Bok kwadratu opisanego na okręgu o równaniu $x^2+y^2=25$ zawiera się w prostej o równaniu $x+2y-5=0$. Oblicz współrzędne wierzchołków tego kwadratu. Rozw: $A=(3,1)$, $B=(-1,3)$, $C=(-3,-1)$, $D=(1,-3)$. [MR/5pkt]

9. Prosta o równaniu $3x-4y-36=0$ przecina okrąg o środku $S=(3,12)$ w punktach *A* i *B*. Długość odcinka *AB* jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu. Rozw: $(x-3)^2+(y-12)^2=625$. [MRV2013/4pkt]

10. Obliczyć pole figury ograniczonej osią *OX* oraz prostymi stycznym poprowadzonymi przez punkt $A(0;2)$ do okręgu o środku w punkcie $S(-4;-5)$ i promieniu długości $3\sqrt{5}$. Rozw: 30. [MR/5pkt]

11. Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A=(1;4)$ i $B=(-6;3)$ leży na osi OX.

a) Wyznacz równanie tego okręgu.

b) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

Rozw: a) $(x+2)^2+y^2=25$, b) $y=-7x+10$, $y=-7x-10$. [MRI2009/7pkt]

12. Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $A=(0;2)$ i $B=(2;0)$ oraz jest styczny do prostej l w punkcie $C=(1;a)$, gdzie $a>1$. Wyznacz równanie prostej l.

Rozw: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$. [MRVI2012/4pkt]

13. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $\frac{7}{5}$, który przechodzi przez punkty wspólne okręgów o równaniach $x^2-4x+y^2+2y+4=0$ i $x^2-4x+y^2+12y+19=0$.

Rozw: $(x-2)^2+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$ lub $(x-2)^2+\left(y+\frac{13}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$. [MR/6pkt]

14. Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi OX. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
Rozw: (3; 9), $(3-\sqrt{3};6)$, $(3+\sqrt{3};6)$ [MRV2007/7pkt]

15. Punkt $A=(-2;5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.
Rozw: $C=(-3;-2)$ lub $C=(5;6)$. [MRV2010/6pkt]

16. Punkt $A=(3;4)$ jest wierzchołkiem kąta prostego w równoramiennym trójkącie prostokątnym ABC. Przeciwprostokątna tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y=-2x+15$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta ABC.
Rozw: $B=(4;7)$, $C=(6;3)$. [MR/5pkt]

17. Dane są punkty $A=(1;3)$ i $B=(-4;-2)$. Wyznacz taki punkt $C=(x;y)$ gdzie $x\in(-1;2)$ leżący na paraboli o równaniu $y=x^2$, aby pole trójkąta ABC było największe.

Rozw: $C=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. [MR/6pkt]

18. Na płaszczyźnie dane są punkty $A=(3;-2)$, $B=(11;4)$. Na prostej o równaniu $y=8x+10$ znajdź punkt P, dla którego suma $|AP|^2+|BP|^2$ jest najmniejsza.

Rozw: $P=(-1;2)$ [MRVI2012/4pkt]

19. Dane są punkty $A=(1;5)$, $B=(9;3)$ i prosta k o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne punktu C leżącego na prostej k, dla którego suma $|AC|^2+|BC|^2$ jest najmniejsza. Rozw: $C=(4;5)$. [MRVIII2010/5pkt]

20. W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P=\left(\frac{1}{2}m+\frac{5}{2};m\right)$, gdzie $m\in\langle -1;7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q=\left(\frac{55}{2};0\right)$.

    Rozw: $f_{\min}(7)=511{,}25$; $f_{\max}(-1)=651{,}25$. [MRV2012/6pkt]

21. Punkty B = (5, 6) i C = (0, 6) są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy AB *i* CD są prostopadłe do prostej k o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+1$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu, wiedząc, że punkt D należy do prostej k. Rozw: A= (1; -2) lub A = (3; 2) oraz D = (-2; 2). [MR/5pkt]

22. Z punktu $A=(-9;12)$ poprowadzono styczne do okręgu o równaniu $x^2-12x+y^2+16y=25$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności. Rozw: 20. [MR/5pkt]

23. Obrazem trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(1;3)$, $B=(2;-3)$, $C=(-1;4)$ w jednokładności o środku $S=(2;1)$ i skali $k=-3$ jest trójkąt KLM. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta KLM. Rozw: $K=(5;-5)$, $L=(2;13)$, $M=(11;8)$. [MR/5pkt]

24. W jednokładności o środku S i skali k obrazem okręgu o równaniu $(x+3)^2+(y+1)^2=1$ jest okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-2)^2=9$. Oblicz współrzędne środka S jednokładności.

    Rozw: $S=\left(-6;-\frac{5}{2}\right)$ lub $S=\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$. Rozw: $S=(-3;-2)$, k = 3. [MR/5pkt]

25. Oblicz współrzędne środka S i skalę k jednokładności, w której obrazem odcinka PR jest odcinek P_1R_1 i wiadomo, że $P=(-2;1)$, $R_1=(3;1)$, $\vec{SP_1}=[3,9]$ i $\vec{SR}=[2,1]$. [MR/6pkt]

26. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty $A=(1;2)$, $B=(5;4)$, $C=(3;6)$, $D=(0;8)$. Przez punkt D poprowadzono prostą l prostopadłą do prostej AB. Znajdź na prostej l taki punkt E, aby pole trójkąta ABC było równe polu trójkąta ABE.

    Rozw: $E_1=\left(\frac{7}{5};\frac{26}{5}\right)$, $E_2=\left(\frac{19}{5};\frac{2}{5}\right)$. [MR/5pkt]

27. Udowodnij, że jeśli punkt D jest środkiem ciężkości trójkąta ABC to $\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}=0$. [MR/4pkt]

28. Punkty K, L, M są środkami boków BC, CA i AB trójkąta ABC. Wykaż, że $\vec{AK}+\vec{BL}+\vec{CM}=\vec{0}$. [MR/4pkt]

VII. Geometria płaszczyzny.

1. Wykaż, że dla każdego równoległoboku jest spełniony warunek: *suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa podwojonej sumie kwadratów długości jego boków*. [MR/5pkt]
2. Niech a i b będą długościami kolejnych boków równoległoboku *ABCD,* zaś p i r długościami jego przekątnych. Wykaż, że $a^2+b^2 \geq pr.$ [MR/5pkt]
3. Liczby α i β są miarami kątów ostrych w trójkącie prostokątnym. Wykaż, że: $\cos\alpha+\cos\beta>1.$ [MR/3pkt]
4. Długości boków (a,b,c) trójkąta tworzą ciąg geometryczny, przy czym kąt trójkąta leżący naprzeciwko boku długości b ma miarę 60^o. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta. Rozw: $60^o, 60^o$. [MR/5pkt]
5. W trójkącie *ABC*, w którym $|AC|=5,$ $|BC|=4\sqrt{2}$ i $|AB|=7$ na boku *AB* wybrano taki punkt *D*, że $|AD|=2.$ Oblicz sinus kąta *ADC.*

   Rozw: $\frac{4\sqrt{17}}{17}.$ [MR/5pkt]
6. Prosta przechodząca przez środek jednego z boków trójkąta równobocznego i tworząca z tym bokiem kąt ostry α dzieli ten trójkąt na czworokąt i trójkąt. Stosunek pola czworokąta do pola trójkąta jest równy 5: 3. Oblicz tangens kąta α.
   Rozw: $3\sqrt{3}$. [MR/4pkt]
7. Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=17$ i $|BC|=10.$ Na boku *AB* leży punkt *D* taki, że $|AD|:|DB|=3:4$ oraz $|DC|=10.$ Oblicz pole trójkąta *ABC*. Rozw: 84. [MRV2013/5pkt]
8. Punkt D jest punktem wewnętrznym trójkąta. Wykaż, że: $2(|AD|+|BD|+|CD|)>|AB|+|BC|+|AC|.$ [MR/3pkt]
9. Trójkąt ostrokątny, którego boki mają długości 17 i 16 ma pole równe 64. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Rozw: $\frac{17\sqrt{65}}{16}.$ [MR/5pkt]
10. Podstawa *AB* trójkąta równoramiennego *ABC* ma długość 8 oraz $|\angle BAC|=30^o.$ Oblicz długość środkowej *AD* tego trójkąta. Rozw: $\frac{4\sqrt{21}}{3}$. [MRV2011/4pkt]
11. Boki trójkąta mają długość 5, 12, 15. Wyznacz długość części dwusiecznej średniego kąta trójkąta zawartej w tym trójkącie. Rozw: $4\sqrt{3}.$ [MR/6pkt]
12. Suma długości dwóch boków trójkąta równa się 4, a kąt między tymi bokami ma miarę 120^o. Oblicz najmniejszą wartość sumy kwadratów długości wszystkich boków tego trójkąta. Rozw: 20. [MRVI2103/4pkt]
13. W równoległoboku ABCD kąt ostry ma miarę $\alpha=30^o$, zaś dłuższy bok ma długość 8. Promień koła opisanego na ΔABD ma długość R = 4. Oblicz pole równoległoboku. Rozw: $P=8\sqrt{3}.$ [MR/4pkt]

14. W równoległoboku $ABCD$ miara kąta ostrego jest równa 30^o, a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej równoległoboku. Rozw: 4. [MRVI2013/5pkt]

15. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, aby $|CE| = 2|DF|$. Oblicz wartość $x = |DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze. Rozw: $x = 0{,}25$. [MRV2010/4pkt]

16. W trójkącie prostokątnym ABC (kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym), dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a,$ $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D. Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia. [MR XII 2005/4pkt]

17. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a,$ $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyraź pole trójkąta AED za pomocą a i b. Rozw: $P_{\Delta AED} = \dfrac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$. [MRV2012/5pkt]

18. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ (który nie jest równoległobokiem). Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P i Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \| PN$. [MRV2011/3pkt]

19. Wykaż, że jeżeli w czworokącie $ABCD$ dwusieczne kątów przy wierzchołkach A i C przecinają dwusieczne kątów przy wierzchołkach B i D w czterech różnych punktach, to punkty te leżą na pewnym okręgu. [MR/4pkt]

20. W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24,$ $|CD| = 15,$ $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych. Rozw: $d_1 = 25,$ $d_2 = 20,$ $P = 234$. [MRVI2012/5pkt]

21. Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu R=$5\sqrt{2}$ wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$. Rozw: 60^o, 45^o, 120^o, 135^o. [MRXII2005/8pkt]

22. Dany jest czworokąt ABCD. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\dfrac{|AS|}{|DS|} = \dfrac{|BS|}{|CS|}$. [MR/4pkt]

23. Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Wiadomo, że $|AB| = |BC|,$ $|AD| = 2\sqrt{3},$ $|DC| = 3 - \sqrt{3}$ oraz przekątna $|AC| = 3\sqrt{2}$. Oblicz pole tego czworokąta. Rozw: $P = \dfrac{9+6\sqrt{3}}{2}$ [MR/4pkt]

24. W trapez wpisano okrąg o promieniu 3cm. Miary kątów przy dłuższej podstawie tego trapezu wynoszą 30^o i 60^o. Oblicz pole tego trapezu. Rozw: $P = 12\left(3 = \sqrt{3}\right)$ [MR/4pkt]

25. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny ABCD o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\dfrac{|CS|}{|SB|} = \dfrac{2}{5}$. Wyznacz długość ramienia

tego trapezu. Oblicz cosinus kąta CBD.

Rozw: $|BC| = \frac{7\sqrt{10}r}{10}$, $\cos(<CBD) = \frac{61\sqrt{89}}{623}$. [MRV2006/6 pkt]

26. Trapez *ABCD* ma kąty proste przy wierzchołkach *A* i *D*. Punkt *O* jest środkiem okręgu wpisanego w ten trapez. Oblicz obwód trapezu, jeżeli wiadomo, że $|OC| = 6$ i $|OB| = 8$. Rozw: 39,2. [MR/4pkt]
27. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraź pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Rozw: $P(c) = c \cdot \sqrt{-3(c^2 - 40c + 300)}$, $D = (15;30)$. [MRI2009/6pkt]
28. Trapez równoramienny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest opisany na okręgu o promieniu *r*. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$. [MRV2013/4pkt]

29. W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoległe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku 5:11. Oblicz długości podstaw trapezu. Rozw: 7; 1. [MR/4pkt]

30. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 9 i 12, a kąt między ramieniem trapezu i dłuższą podstawą ma miarę 60^o. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie. Rozw: $R = \sqrt{39}$. [MR/6pkt]
31. W trapez równoramienny o przekątnej 13cm można wpisać okrąg. Odcinek łączący środki ramion trapezu mają długość 12cm. Oblicz długości ramienia i pole trapezu.
Rozw: *c* = 12cm, *P* = 60cm^2. [MR/5pkt]
32. W półkole o promieniu r wpisano trapez równoramienny o krótszej podstawie długości a. Oblicz długość przekątnej trapezu. Rozw: $d = \sqrt{2r^2 + ar}$. [MR/4pkt]

33. Na trapezie opisano okrąg, którego średnica jest jedną z podstaw trapezu. Przekątna trapezu ma długość 12, a długość okręgu wynosi 13π. Oblicz pole trapezu. Rozw: $P = 51\frac{21}{169}$. [MR/5pkt]
34. Czworokąt ABCD wpisany jest w koło oraz wiadomo, że $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CD| = 4$ oraz miara kąta ABC wynosi 60^o. Oblicz długość przekątnej AC. Oblicz długość boku AD tego czworokąta. Rozw: $|AC| = \sqrt{37}$, $|AD| = 3$. [MR/4pkt]

35. Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego tego rombu. Rozw: 60^o. [MRV2007/4pkt]
36. Dany jest trójkąt o bokach długości 1; 1,5; 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta. [MRV2007/3pkt]
37. Dany jest trapez o podstawach *a*, *b*, gdzie *a*>*b*. Wyznacz długość odcinka łączącego środki przekątnych tego trapezu. Rozw: $x = \frac{a-b}{2}$ [MRXII2007/4pkt]

VIII. Stereometria.

1. Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa. Rozw: 1. [MRV2011/4pkt]

2. Suma krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Dla jakiej długości krawędzi podstawy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa będzie największe? Rozw: $a = \frac{4}{3}$. [MR/5pkt]

3. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną. Rozw: $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. [MRVIII2010/5pkt]

4. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej równe jest sumie pól obu podstaw. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej. Rozw: $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.[MR/4pkt]

5. W prostopadłościanie długości krawędzi no wspólnym wierzchołku są równe a, b, c, zaś długość przekątnej prostopadłościanu jest równa d. Wykaż, że $a+b+c \le d\sqrt{3}$. [MR/4pkt]

6. Podstawą graniastosłupa prostego o objętości V jest równoległobok o bokach długości a i b. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest nie mniejsze niż $2V\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. [MR/4pkt]

7. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym krawędź podstawy jest dwa razy krótsza od krawędzi bocznej. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy. Rozw: $\frac{\sqrt{5}}{15}$ [MR/6pkt]

8. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami o przyprostokątnych długości 12cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Rozw: $V = 288cm^3, P_c = 72\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2$ [MR/4pkt]

9. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest 2α. Wyznacz objętość ostrosłupa. Rozw: $V = \frac{a^3 \cdot \cos x}{12\sqrt{4\sin^2 x - 1}}$. [MRV2010/5pkt].

10. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|CA| = 8$. Wszystkie ściany boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąt 60^o. Oblicz objętość ostrosłupa. Rozw: $V = 5\sqrt{3}$. [MR/6pkt]

11. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden z boków ma długość 6, a kąty przyległe do niego mają miary 45^o i 105^o. Wysokość ostrosłupa ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi. Rozw: $V = 18 + 18\sqrt{3}$. [MR/5pkt]

12. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości 4, krawędzie boczne mają długości 2, 4, $2\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Rozw: $V = \frac{4\sqrt{5}}{3}$. [MR/6pkt]

13. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 39$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Rozw: 4320. [MRVI2012/5pkt]

14. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Rozw: $V = 1760\sqrt{210}$. [MRV2012/5pkt]

15. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|AB| = a$, $|\angle ACB| = 90^o$, $|\angle CAB| = \alpha$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze β. Wyznacz objętość tego ostrosłupa. Rozw: $V = \frac{1}{24}a^3 \sin 2\alpha \cdot tg\beta$. [MR/5pkt]

16. W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa. Rozw: $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$. [MRV2013/4pkt]

17. Długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego prawidłowego są równe a. Przez wierzchołek ostrosłupa i środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy poprowadzono płaszczyznę. Wyznacz sinus kąta nachylenia wyznaczonego przekroju do podstawy ostrosłupa. Rozw: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. [MR/5pkt]

18. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $\frac{|AC|}{|AS|}=\frac{6}{5}$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Rozw: $\frac{4\sqrt{82}}{41}$.

[MRV2011/6pkt]

19. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają równą długość. Zaznacz na rysunku kąt utworzony przez dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa i oblicz cosinus tego kąta. Rozw: $-\frac{1}{3}$. [MRI2009/4pkt]

20. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4, a wysokość ostrosłupa jest równa 8. Wyznacz cosinus kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa. Rozw: $-\frac{1}{17}$. [MR/6pkt]

21. W prawidłowym ostrosłupie czworokątnym o wysokości długości h kąt pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozw: $V=\frac{2}{3}h^3\left(tg^2\alpha-1\right)$ [MR/5pkt]

22. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, a jego przekrój płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy ma pole równe 9π. Uzasadnij, że objętość tego stożka jest większa od 48. Wykonaj rysunek pomocniczy i zaznacz na nim przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy. [MR/5pkt]

IX. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.

1. Rozwiąż równanie: $\binom{n}{n-3} = n - 2$. Rozw: 3. [MR/3pkt]

2. Na zakończenie obozu wędrownego każdy uczestników podarował wszystkim obozowiczom swoje zdjęcie. W sumie podarowano 600 zdjęć. Ile osób było na obozie? Rozw: 25osób. [MR/4pkt]

3. Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i trzy trójki. Rozw: 192 080. [MRV2011/4pkt]

4. Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12. Rozw: 280. [MRV2012/4pkt]

5. Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5. Rozw: 1920. [MRV2013/3pkt]
6. Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15. Rozw: 180. [MRVI2012/3pkt]
7. Ile jest liczb naturalnych siedmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4? Rozw: 84. [MR/5pkt]

8. Ile podzbiorów trzyelementowych ma zbiór A, jeśli wiadomo, że zawiera on dokładnie 121 podzbiorów o najwyżej dwóch elementach. Rozw: 455. [MR/4pkt]

9. Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie symetryczną kostką sześcienną, na ściankach której znajdują się cyfry 3, 4, 5, 6, 7, 8. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma oczek, uzyskana z dwóch rzutów, nie przekracza liczby 14. Rozw: $\frac{11}{12}$ [MR / 3pkt]

10. Dziesięć osób rozdzielono na drużyny po 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą w przeciwnych drużynach. Rozw: $\frac{5}{9}$ [MR/4pkt]

11. Oblicz prawdopodobieństwo, że w pięciu rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma uzyskanych liczb oczek będzie równa 8. Rozw: $P(A) = \frac{35}{6^5}$. [MR/5pkt]

12. Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego. Rozw: $\frac{1}{35}$. [MRVIII2010/4pkt]

13. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3. Rozw: $\frac{1}{3}$. [MRV2010/4pkt]

14. W klasie IIIa jest 10 dziewcząt i 15 chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo wybranej delegacji trzyosobowej tej klasy będzie co najwyżej jedna dziewczyna. Rozw: $\frac{301}{460}$ [MR/5pkt]

15. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7. Rozw: $\frac{27}{70}$ [MR/4pkt]

16. Ze zbioru *Z = {1, 2, 3, ...2n},* gdzie $n \in N_+$ wylosowano dwie liczby. Zdarzenie A oznacza, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą. Oblicz, dla jakiej wartości *n* prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe $\frac{5}{11}$. Rozw: *n* = 6. [MR / 5pkt]

17. Z urny, w której znajduje się *n* kul, w tym 5 białych, losujemy dwie kule bez zwracania. Wyznacz *n*, tak aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było równe $\frac{2}{21}$. Rozw: $n = 15$. [MR/5pkt]

18. W urnie są kule białe i trzy razy więcej kul czarnych. Losujemy jednocześnie dwie kule. Wyznacz liczbę kul białych w tej urnie, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania pary kul tego samego koloru jest równe $\frac{3}{5}$. Rozw: 4. [MR/6pkt]

19. Ze zbioru liczb $Z = \{1,2,3,...,41\}$ wylosowano trzy liczby bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą. Rozw: $\frac{267}{533}$. [MR/4pkt]

20. Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60. Rozw: $\frac{5}{108}$. [MRV2013/4pkt]

21. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A' \cap B')$, jeśli $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$. Rozw: $\frac{1}{12}$. [MRI2009/4pkt]

22. A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w przestrzeni Ω Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0{,}9$ i $P(B) = 0{,}7$ to $P(A \cap B') \leq 0{,}3$. (B' to zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*). [MRV2011/3pkt]

23. Zdarzenia losowe *A*, *B* są zawarte w Ω oraz $P(A \cap B') = 0{,}7$ (*A'* oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *A*, *B'* oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*). Wykaż, że $P(A' \cap B) \leq 0{,}3$. [MRV2012/3pkt]

24. Zdarzenia losowe *A, B* są zawarte w Ω oraz $P(A \cap B') = 0{,}1$ i $P(A' \cap B) = 0{,}2$. Wykaż, że $P(A \cap B) \leq 0{,}7$ (*A'* oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *A* , *B'* oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*). [MRVI2012/3pkt]