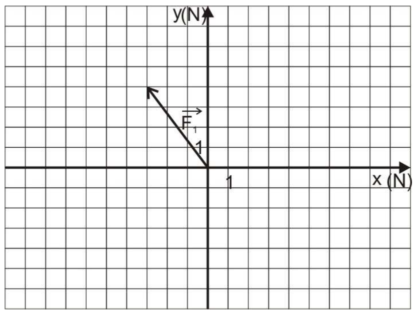
Blok 1: Rachunek wektorowy i jego zastosowanie w fizyce. Podstawowe wielkości fizyczne w kinematyce. Opis ruchu w różnych układach odniesienia. Ruch względny.

I. Rachunek wektorowy i jego zastosowanie w fizyce.

Wszystkie wielkości fizyczne są albo skalarami albo wektorami. **Skalar** ma tylko wartość (podajemy go jako liczbę wraz z jednostką), natomiast **wektor** ma wartość (zwaną inaczej długością wektora lub jego modułem, podawaną jako liczba nieujemna wraz z jednostką), kierunek i zwrot.

Każdy wektor można przedstawić **w układzie współrzędnych**, w którym osie są skalowane w tych samych jednostkach, co wartość wektora.

► ***Przykład 1.1:*** siłę $\vec{F}_1$ można przedstawić na rysunku:



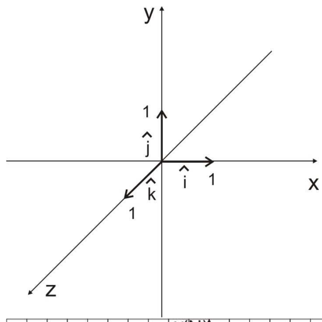
Ogólnie wektor $\vec{a}$ możemy zapisać w dwojaki sposób:

- poprzez **współrzędne** wektora $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$;

Współrzędne wektora mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne oraz przyjmować wartość zero.

- jako **sumę wektorów składowych** $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$:

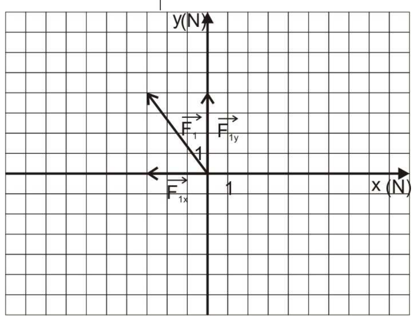
  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, gdzie $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ są wersorami prostokątnego układu współrzędnych, czyli wektorami o jednostkowej długości, odpowiednio równoległymi do osi układu współrzędnych i zwróconymi zgodnie z tymi osiami:



Współczynniki stojące przy wersorach są równe współrzędnym wektora.

► Zatem w Przykładzie 1 siłę $\vec{F}_1$ można zapisać:

- poprzez współrzędne $\vec{F}_1 = [-3\text{ N}, 4\text{ N}, 0\text{ N}]$
- jako sumę wektorów składowych: $\vec{F}_1 = -3\text{ N}\cdot\hat{i} + 4\text{ N}\cdot\hat{k}$,
  gdzie **wektorami składowymi** są:
  $\vec{F}_{1x} = -3\text{ N}\,\hat{i}$, $\vec{F}_{1y} = 4\text{ N}\,\hat{j}$, $\vec{F}_{1z} = 0\,\hat{k}$.



Często na jednym rysunku przedstawiamy różne wektorowe wielkości fizyczne (np. przemieszczenia i prędkości). Wówczas nakładamy na siebie wszystkie układy współrzędnych tak, aby ich osie pokrywały się. Dla uproszczenia zapisu wspólny układ współrzędnych opisujemy symbolami **x, y, z** i skalujemy bez zapisu jednostek fizycznych.

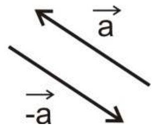
Projekt jest współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach programu operacyjnego KAPITAŁ LUDZKI

Wartość (długość) **wektora** $\vec{a}$ oznacza się $|\vec{a}|$ lub a. Wartość wektora $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ jest równa:

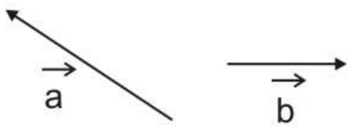
$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

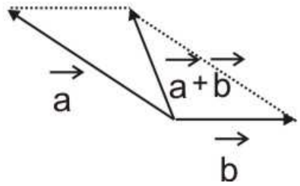
Wartość wektora jest zawsze dodatnia lub równa zeru.

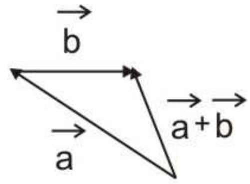
Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{a}$ jest wektor $-\vec{a}$.
Oba te wektory mają tę samą wartość, ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty.
Jeśli $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$, to $-\vec{a} = [-a_x, -a_y, -a_z]$



Sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor, który można skonstruować, korzystając z:







<u>dwa wektory</u> <u>metoda równoległoboku</u> <u>metoda wieloboku</u>

Jeśli $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to $\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$.

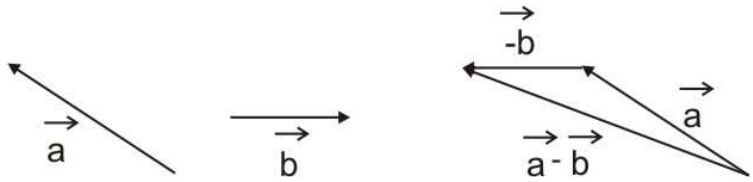
Długość wektora $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha}\ ,$$

gdzie α jest miarą kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Różnicą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor będący sumą wektora $\vec{a}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{b}$, czyli:

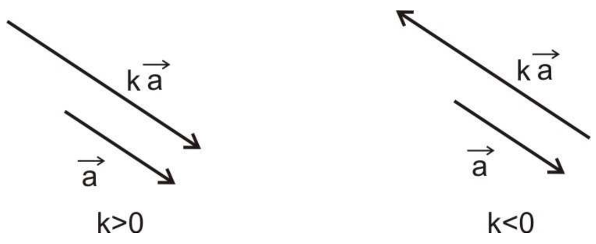
Jeśli $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i
$\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, to
$\vec{a} - \vec{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$.



Iloczynem wektora $\vec{a}$ **przez liczbę** k nazywamy wektor, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem wektora $\vec{a}$, a długość jest równa:

$$|k\cdot\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|,$$

natomiast zwrot jest:
- zgodny ze zwrotem wektora $\vec{a}$, jeśli $k > 0$
- przeciwny do zwrotu wektora $\vec{a}$, jeśli $k < 0$



Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest liczbą, którą możemy obliczyć na dwa sposoby:

- za pomocą współrzędnych: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$
- $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, gdzie α jest miarą kąta pomiędzy tymi wektorami.

Projekt jest współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach programu operacyjnego KAPITAŁ LUDZKI

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektorem, którą możemy obliczyć na dwa sposoby:

- za pomocą wyznacznika: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$
- obliczając jego długość: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\alpha|$, gdzie α jest miarą kąta pomiędzy tymi wektorami i wiedząc, że kierunek tego wektora jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (czyli prostopadły zarówno do $\vec{a}$, jak i do $\vec{b}$), a jego zwrot można określić z reguły śruby prawoskrętnej

Dwa wektory niezerowe są do siebie równoległe, wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn wektorowy jest równy zeru: $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$.
Dwa wektory niezerowe są do siebie prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=0$.

Równanie wektorowe.
W fizyce często mamy do czynienia z równaniami wektorowymi. Aby rozwiązać takie równania, najczęściej musimy przejść od postaci wektorowej do równań algebraicznych (współrzędnych), korzystając z twierdzenia o równości dwóch wektorów:

Dla $\vec{a}=[a_x,a_y,a_z]$ i $\vec{b}=[b_x,b_y,b_z]$, $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x\\ a_y=b_y\\ a_z=b_z\end{cases}$.

Nie można obliczać konkretnych wartości współrzędnych oraz długości wektorów bezpośrednio z równania wektorowego!

Żeby rozpisać równanie wektorowe na równania współrzędnych, trzeba najpierw wybrać układ współrzędnych; wybór jest dowolny, ale potem trzeba konsekwentnie się go trzymać.

Z jednego równania wektorowego otrzymujemy tyle równań algebraicznych, ile współrzędnych przestrzennych jest zaangażowanych w zadaniu (tzn. w ruchu po linii prostej jest zaangażowana tylko jedna współrzędna, w ruchu na płaszczyźnie - dwie współrzędne, w ruchu w przestrzeni – wszystkie trzy współrzędne).
.

►***Przykład 1.2***: II zasada dynamiki Newtona jest opisywana równaniem wektorowym $\vec{F}=m\cdot\vec{a}$. Jeśli ruch odbywa się w przestrzeni trójwymiarowej, to otrzymujemy trzy równania algebraiczne, które muszą być <u>spełnione jednocześnie</u>:

$\vec{F}=m\cdot\vec{a} \quad\Leftrightarrow\quad F_x=m\cdot a_x$ i $F_y=m\cdot a_y$ i $F_z=m\cdot a_z$.

W równaniach tych F_x, F_y, F_z *oraz* a_x, a_y, a_z *są współrzędnymi wektorów, mogą więc przyjmować wartości zarówno dodatnie jak i ujemne.*

Projekt jest współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach programu operacyjnego KAPITAŁ LUDZKI

Najczęściej upraszczamy sobie rozwiązywanie zadań, gdy zapisując równanie we współrzędnych, **jawnie** uwzględnimy ich znaki. Wówczas symbole lub liczby wstawiane do tych równań oznaczają **wartości**, a nie współrzędne składowych wektorów.

Znak **plus** wstawiamy w równaniu współrzędnych wtedy, gdy wiemy, że zwrot osi układu współrzędnych jest zgodny ze zwrotem odpowiedniej składowej wektora.
Znak **minus** wstawiamy w równaniu współrzędnych wtedy, gdy wiemy zwrot osi układu współrzędnych jest przeciwny do zwrotu odpowiedniej składowej wektora.

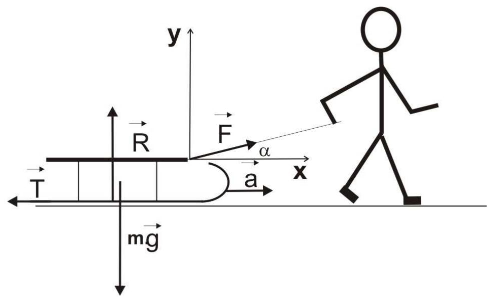
►***Przykład 1.3:*** Chłopiec ciągnie sanki po śniegu siłą o wartości $|\vec{F}|$. Rozpisz II zasadę dynamiki Newtona dla sanek, uwzględniając tarcie płoz o śnieg i oblicz przyspieszenie sanek.

Rozwiązanie:

$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$

OX: $|\vec{F}_x| - |\vec{T}| = m|\vec{a}_x|$,

OY: $|\vec{R}| + |\vec{F}_y| - m|\vec{g}| = m|\vec{a}_y| = 0$,



gdzie: $\vec{R}$ siła sprężystości (reakcji) podłoża, $m\vec{g}$ - siła ciężkości działająca na sanki, $\vec{T}$ - siła tarcia, $\vec{a}$ - przyspieszenie sanek.

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_x|^2 + |\vec{a}_y|^2} = \frac{|\vec{F}_x| - |\vec{T}|}{m} = \frac{F\cos\alpha - T}{m}$$

II. Podstawowe wielkości fizyczne w kinematyce.

Ruch polega na zmianie położenia ciała względem innego, dowolnie wybranego ciała lub układu ciał, zwanego układem odniesienia.

Tor ruchu to linia, którą ciało zakreśla w czasie ruchu.

Symbol Δ oznacza w fizyce <u>przyrost</u> (dodatni lub ujemny) albo inaczej mówiąc - <u>zmianę</u> wielkości fizycznej.

W przeważającej liczbie przykładów przyrost (zmiana) wielkości fizycznej następuje w pewnym czasie – możemy więc określić wielkość fizyczną w chwili początkowej (1) i w chwili końcowej (2). Przyrost tej wielkości definiuje się wtedy jako:

- $\Delta X = X_2 - X_1$, jeśli rozpatrywaną wielkością fizyczną jest skalar, X
- $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$, jeśli rozpatrywaną wielkością fizyczną jest wektor, $\vec{X}$

Projekt jest współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach programu operacyjnego KAPITAŁ LUDZKI

Droga to długość części toru, którą przebyło ciało.

Szybkość średnia to wielkość skalarna zdefiniowana wzorem:

$$u_{\acute{s}r} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

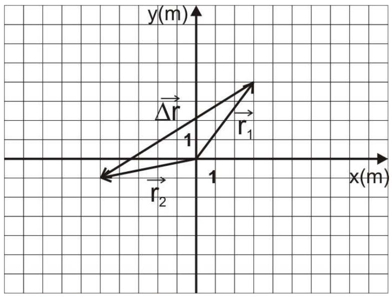
gdzie Δs - całkowita droga, którą przebyło ciało w czasie Δt .

Szybkość chwilowa (czyli po prostu **szybkość**) to wielkość skalarna zdefiniowana jako iloraz drogi przebytej przez ciało i czasu, w którym ta droga została przebyta, przy czym czas ten jest bardzo krótki (zmierza do zera):

$$u = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

Wektorem położenia ciała (lub **wektorem wodzącym**) jest wektor, którego początek znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec w punkcie w którym ciało znajduje się w danej chwili.

► ***Przykład 1.4:*** Na rysunku wektorami położenia są wektory $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$.



Przemieszczenie $\Delta\vec{r}$ jest wektorem opisującym zmianę położenia ciała w czasie ruchu od położenia początkowego, opisywanego wektorem położenia $\vec{r}_1$ do położenia końcowego, opisywanego wektorem położenia $\vec{r}_2$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Prędkość średnia jest wektorem zdefiniowanym jako:

$$\vec{v}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

gdzie $\Delta\vec{r}$ - całkowite przemieszczenie w czasie Δt .

*Wartość prędkości średniej najczęściej **nie jest** równa szybkości średniej ciała.*

Prędkość chwilowa (czyli po prostu **prędkość**) jest wektorem zdefiniowanym jako iloraz przemieszczenia ciała i czasu, w którym to przemieszczenie nastąpiło, przy czym czas ten jest bardzo krótki (zmierza do zera):

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

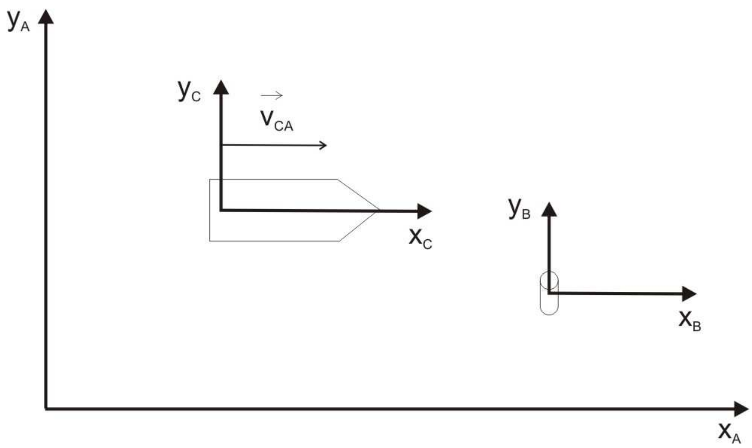
Prędkość chwilowa jest w każdym punkcie styczna do toru.
Wartość prędkości chwilowej jest zawsze równa szybkości chwilowej ciała.

Projekt jest współfinansowany z Europejskiego Funduszu Społecznego
w ramach programu operacyjnego KAPITAŁ LUDZKI

III. Opis ruchu w różnych układach odniesienia. Ruch względny.

Opisy ruchu tego samego ciała mogą się od siebie różnić, jeśli rozpatrujemy je z punktu widzenia różnych układów współrzędnych.

► ***Przykład 1.5:*** Po spokojnych wodach jeziora porusza się statek (C). W dnie jeziora zakotwiczono bojkę (B). Oblicz prędkość bojki w układzie odniesienia statku $\vec{v}_{BC}$, jeśli prędkość statku względem układu współrzędnych związanego z brzegiem jeziora (A) wynosi $\vec{v}_{CA}$.



Rozwiązanie:

- Pokazane na rysunku układy współrzędnych wiążemy z obiektami: układ współrzędnych (A) spoczywa względem brzegów jeziora, bojka nie porusza się w układzie (B), statek nie porusza się w układzie (C).
- Bojka nie porusza się także względem układu A, ale względem statku przesuwa się w lewo z prędkością $-\vec{v}_{CA}$.

Podczas rozwiązywania tego typu zadań najwygodniej jest skorzystać z <u>metody mnemotechnicznej</u>:

- Z każdym z obiektów wyróżnionych w zadaniu wiążemy jego własny układ współrzędnych i oznaczamy go literą. Tą samą literą oznaczamy sam obiekt. Obiekty spoczywają w swoich układach współrzędnych. Odpowiednie osie wszystkich układów współrzędnych są do siebie równoległe i tak samo zorientowane.
- Prędkość dowolnie wybranego obiektu B w układzie A oznaczamy: $\vec{v}_{BA}$ .Ważna jest kolejność liter!
- Obowiązuje $\vec{v}_{AA} = 0$ dla każdego A; $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$.
- Obowiązuje zasada składania prędkości: $\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AC}$ (zawsze **suma wektorowa**); dolne wskaźniki po prawej stronie równania wpisujemy tak, aby powtarzające się były obok siebie, a nie powtarzające się były w tej samej kolejności, co po lewej stronie równania (tak jakbyśmy „skreślali powtarzające się litery stojące obok siebie", czyli „$\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{B\cancel{A}} + \vec{v}_{\cancel{A}C}$"). Kolejność liter w alfabecie nie ma tutaj znaczenia.

► Wracając do ***Przykładu 1.5:*** $\vec{v}_{BC} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AC}$, ale bojka nie porusza się względem układu A, więc $\vec{v}_{BA} = 0$. Wiemy także, że $\vec{v}_{AC} = -\vec{v}_{CA}$. Stąd: $\vec{v}_{BC} = -\vec{v}_{CA}$ - jak już wcześniej wydedukowano.

Zgodnie z powyższą regułą, **prędkość względna** ciała A względem ciała B jest równa:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \,,$$

gdzie $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ są odpowiednio prędkością ciała A i prędkością ciała B w laboratoryjnym (spoczywającym względem Ziemi) układzie współrzędnych.