

Rozwiązywanie belek prostych i przegubowych – wyznaczanie reakcji i wykresów sił przekrojowych

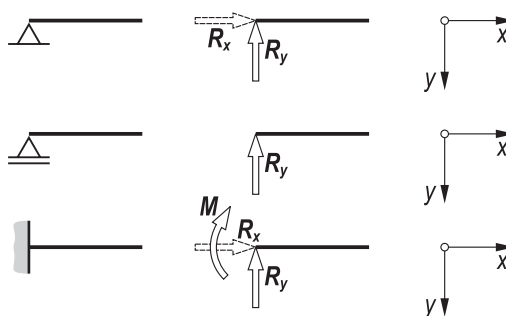
6

Obciążenie belki mogą stanowić siły skupione P , momenty skupione M oraz obciążenia ciągłe q (rys. 6.1).



Rys. 6.1

Przed przystąpieniem do wyznaczenia wykresów sił przekrojowych konieczne jest wyznaczenie reakcji. W tym celu, rozpatrywaną belkę uwalnia się z więzów, zastępując podpory/utwierdzenia odpowiednimi reakcjami (rys. 6.2).



Rys. 6.2

Wartość reakcji określamy wykorzystując równania równowagi statycznej:

— suma rzutów sił na oś x jest równa zero

$$\sum P_{ix} = 0 \quad (6.1a)$$

— suma rzutów sił na oś y jest równa zero

$$\sum P_{iy} = 0 \quad (6.1b)$$

— suma momentów względem dowolnego punktu jest równa zero

$$\sum M_i = 0 \quad (6.1c)$$

W przypadku belek prostych obciążonych poprzecznie względem osi belki, reakcja pozioma jest zawsze równa zero, dlatego równanie (6.1a) pomija się.

Wielkości przekrojowe to siła tnąca T oraz moment gnący M .

Siła tnąca (poprzeczna) T w danym przekroju jest sumą rzutów sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju na kierunku styczny do przekroju.

Moment gnący (zginający) M w danym przekroju jest sumą momentów obciążeń zewnętrznych działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju względem środka masy tego przekroju.

Sposób określania dodatniego znaku siły tnącej oraz momentu gnącego przedstawiono na rys. 6.3. Linia przerywaną oznaczono włókna uprzywilejowane (dolne).



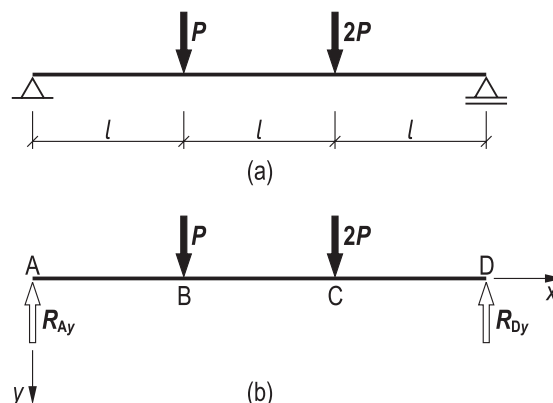
Rys. 6.3

W zadaniach prezentowanych w niniejszym rozdziale, przyjęto następującą konwencję dotyczącą sporządzania wykresów sił tnących i momentów gnących. Dodatnie wartości momentów gnących M będziemy odkładać po stronie włókien uprzywilejowanych, natomiast dodatnie wartości sił tnących T – po stronie włókien nieuprzywilejowanych.

Cechy charakterystyczne wykresów sił przekrojowych są następujące:

- siła skupionej P stanowiącej obciążenie belki odpowiada skok o wartości P na wykresie sił tnących;
- momentowi skupionemu M stanowiącemu obciążenie belki odpowiada skok o wartości M na wykresie momentów gnących;
- jeżeli siła tnąca T ma wartość stałą (dodatnią/ujemną) w danym przedziale, to moment gnący w rozpatrywanym przedziale opisany funkcją liniową (rosnącą/malejącą);
- jeżeli siła tnąca T jest równa zero w danym przedziale, to moment gnący w rozpatrywanym przedziale jest stały;
- jeżeli siła tnąca T ma wartość liniowo zmienną w danym przedziale, to moment gnący w rozpatrywanym przedziale opisany funkcją kwadratową.

Na rys. 6.4a przedstawiono przykład belki obciążonej dwiema siłami skupionymi. Schemat obliczeniowy — po uwolnieniu z więzów — ilustruje rys. 6.4b.



Rys. 6.4

Wartość reakcji wyznaczamy wykorzystując warunki równowagi (6.1b) i (6.1c):

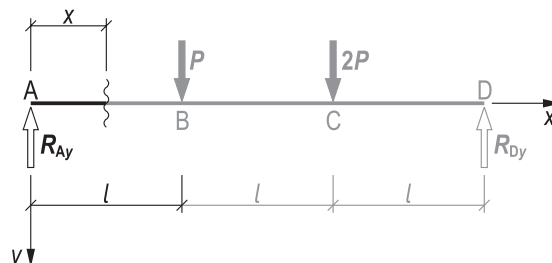
$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} - R_{Dy} + P + 2P = 0$$

$$\Sigma M_{iA} = 0: \quad R_{Dy} \cdot 3l - P \cdot l - 2P \cdot 2l = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{4}{3}P \quad R_{Dy} = \frac{5}{3}P$$

W rozpatrywanej belce możemy wyróżnić trzy przedziały – AB, BC i CD. W każdym z tych przedziałów wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M zgodnie z definicją. Przykład rozwiązano od lewej strony:

— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.5)



Rys. 6.5

Siła tnąca w przekroju oddalonym o wartość x od punktu A jest równa sumie rzutów sił zewnętrznych działających po lewej stronie rozpatrywanego przekroju na kierunku styczny do przekroju. Zapiszemy zatem:

$$T(x) = R_{Ay} = \frac{4}{3}P$$

Siła tnąca ma wartość stałą w całym przedziale AB.

Z kolei, moment gnący w rozpatrywanym przekroju jest sumą momentów obciążeń zewnętrznych działających po lewej stronie przekroju względem środka masy tego przekroju. Zapiszemy to w następujący sposób:

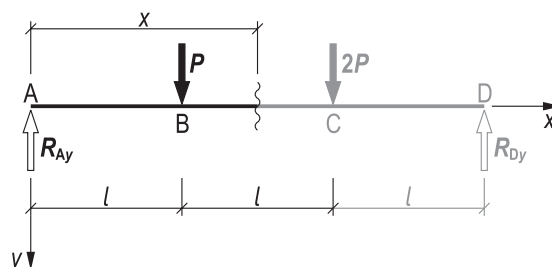
$$M(x) = R_{Ay} x = \frac{4}{3}P x$$

Moment gnący zmienia się liniowo z przedziale AB – jego wartości na krańcach przedziału są równe:

$$M(x=0) = \frac{4}{3}P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{4}{3}P \cdot l = \frac{4}{3}Pl$$

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.6)



Rys. 6.6

Postępując analogicznie, jak w poprzednim przedziale, możemy zapisać:

$$T(x) = R_{Ay} - P = \frac{4}{3}P - P = \frac{1}{3}P$$

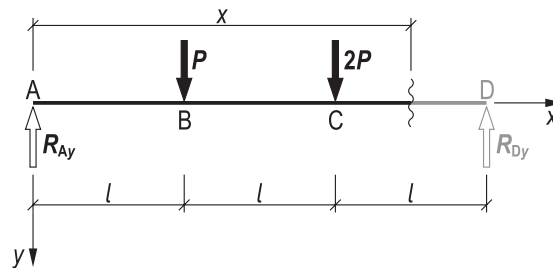
$$M(x) = R_{Ay} x - P(x-l) = \frac{1}{3}P x + Pl$$

$$M(x=l) = \frac{1}{3}P \cdot l + Pl = \frac{4}{3}Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{1}{3}P \cdot 2l + Pl = \frac{5}{3}Pl$$

— przedział CD: $2l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.7)

Postępując analogicznie, jak w dwóch poprzednich przedziałach, zapiszemy:



Rys. 6.7

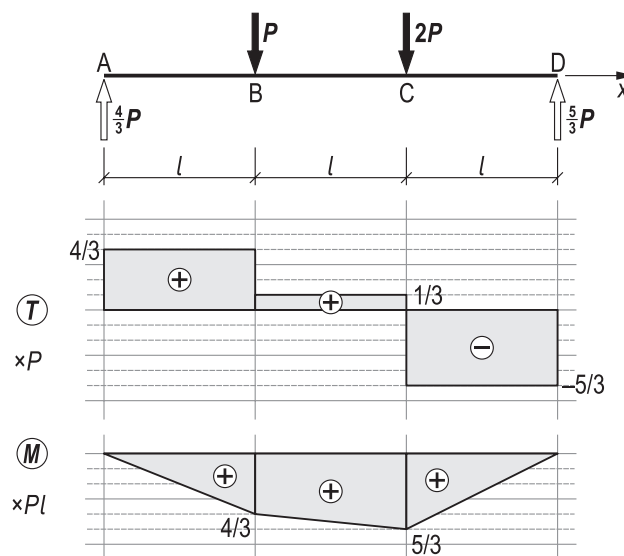
$$T(x) = R_{Ay} - P - 2P = \frac{4}{3}P - P - 2P = -\frac{5}{3}P$$

$$M(x) = R_{Ay} x - P(x-l) - 2P(x-2l) = -\frac{5}{3}P x + 5Pl$$

$$M(x=2l) = -\frac{5}{3}P \cdot 2l + 5Pl = \frac{5}{3}Pl$$

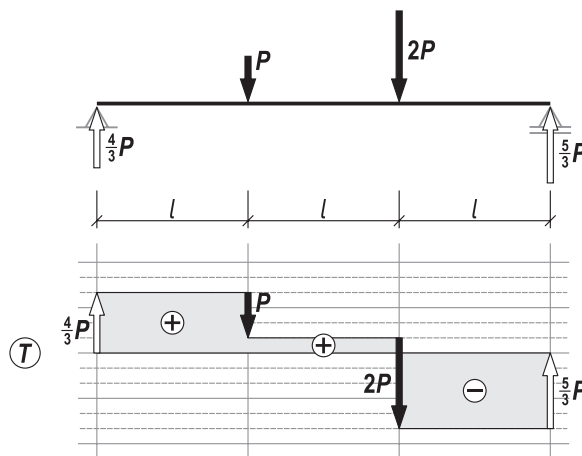
$$M(x=3l) = -\frac{5}{3}P \cdot 3l + 5Pl = 0$$

Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.8.



Rys. 6.8

Na rys. 6.9 przedstawiono wykres sił tnących T , wraz z naniesionymi siłami skupionymi i reakcjami, ułatwiający interpretację wyników.



Rys. 6.9

Pochodna momentu gnącego M względem x jest równa sile tnącej T , co możemy zapisać następująco:

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Z kolei pochodna siły tnącej (poprzecznej) T względem x jest równa natężeniu obciążenia ciągłego:

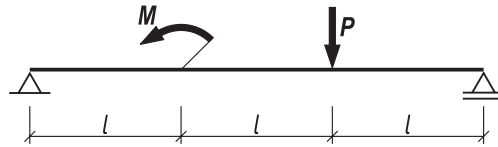
$$-q = \frac{dT}{dx}$$

W związku z powyższym wykresy sił przekrojowych, przedstawione na rys. 6.8 i 6.9, możemy zinterpretować następująco:

- w przedziale AB siła tnąca ma wartość stałą dodatnią ($\frac{4}{3}P$), dlatego moment gnący w tym przedziale rośnie liniowo – tangens nachylenia prostej opisującej przebieg zmian momentu gnącego jest równy $\frac{4}{3}P$;
- w przedziale BC siła tnąca ma wartość stałą dodatnią ($\frac{1}{3}P$), mniejszą niż w przedziale AB, dlatego moment gnący w przedziale BC rośnie liniowo, przy czym kąt nachylenia prostej jest mniejszy, niż w przedziale AB – tangens nachylenia prostej opisującej przebieg zmian momentu gnącego jest równy $\frac{1}{3}P$;
- w przedziale CD siła tnąca ma wartość stałą ujemną ($-\frac{5}{3}P$), dlatego moment gnący w tym przedziale maleje liniowo – tangens nachylenia prostej opisującej przebieg zmian momentu gnącego jest równy $-\frac{5}{3}P$;
- w przekroju B występuje skok wartości siły tnącej T równy P , co odpowiada sile skupionej P stanowiącej obciążenie rozpatrywanej belki w tym punkcie;
- w przekroju C występuje skok wartości siły tnącej T równy $2P$, co odpowiada sile skupionej $2P$ stanowiącej obciążenie rozpatrywanej belki w tym punkcie;
- rozpatrywana belka nie jest obciążona momentem skupionym, dlatego też nie występują skoki wartości na wykresie momentów gnących.

Zadanie 6.1.

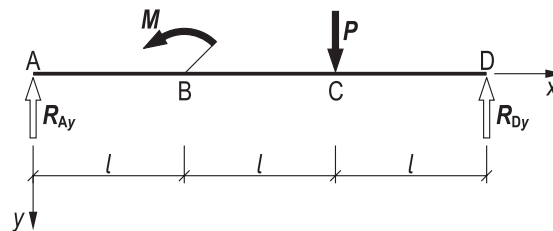
Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.10. Dane: P , l , $M = Pl$.



Rys. 6.10

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.11) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c).



Rys. 6.11

$$\Sigma P_{iy} = 0 : \quad -R_{Ay} - R_{Dy} + P = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Dy} = P$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 : \quad R_{Dy} \cdot 3l + M - P \cdot 2l = 0$$

$$3R_{Dy}l + Pl - 2Pl = 0$$

$$3R_{Dy}l = Pl$$

$$R_{Dy} = \frac{1}{3}P$$

$$R_{Ay} = P - R_{Dy} = P - \frac{1}{3}P = \frac{2}{3}P$$

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

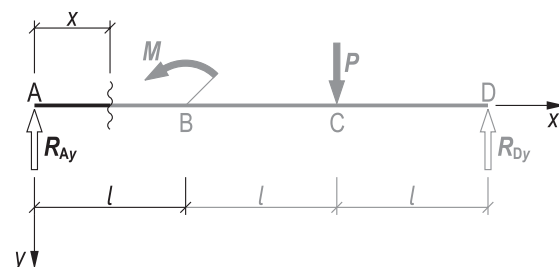
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.12)

$$T(x) = R_{Ay} = \frac{2}{3}P$$

$$M(x) = R_{Ay} x = \frac{2}{3}Px$$

$$M(x=0) = \frac{2}{3}P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{2}{3}P \cdot l = \frac{2}{3}Pl$$



Rys. 6.12

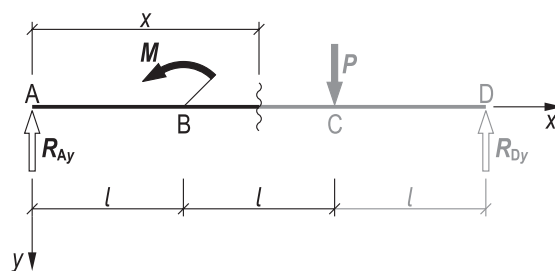
— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.13)

$$T(x) = R_{Ay} = \frac{2}{3}P$$

$$M(x) = R_{Ay} x - M = \frac{2}{3} P x - P l$$

$$M(x=l) = \frac{2}{3} P \cdot l - P l = -\frac{1}{3} P l$$

$$M(x=2l) = \frac{2}{3} P \cdot 2l - P l = \frac{1}{3} P l$$



Rys. 6.13

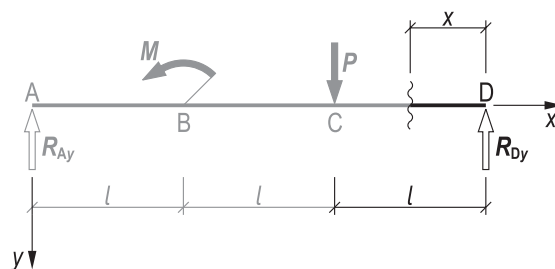
— przedział CD: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.14)

$$T(x) = -R_{Dy} = -\frac{1}{3} P$$

$$M(x) = R_{Dy} x = \frac{1}{3} P x$$

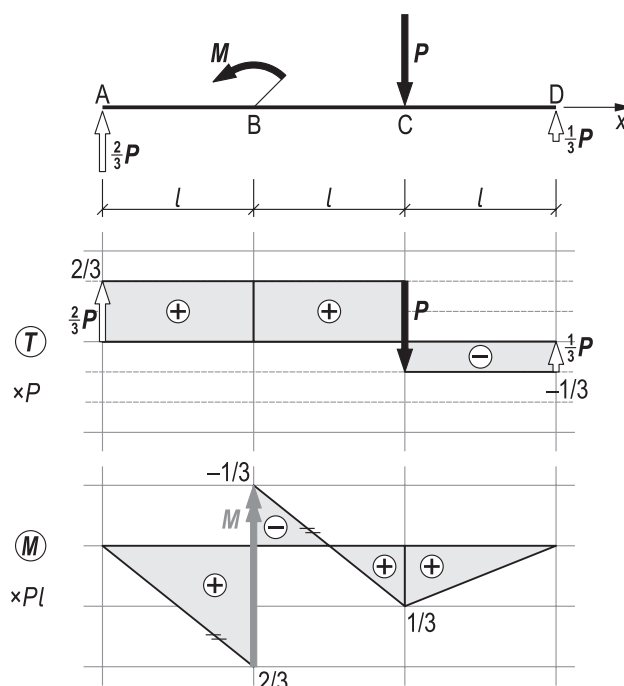
$$M(x=0) = \frac{1}{3} P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{1}{3} P \cdot l = \frac{1}{3} P l$$



Rys. 6.14

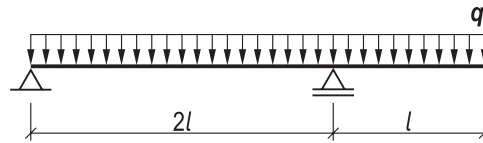
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.15.



Rys. 6.15

Zadanie 6.2.

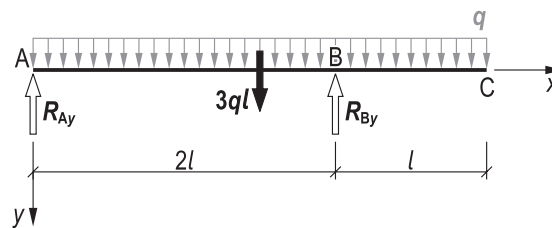
Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.16. Dane: q , l .



Rys. 6.16

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.17) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągłe zastępujemy siłą skupioną o wartości $3ql$.



Rys. 6.17

$$\Sigma P_{iy} = 0 : \quad -R_{Ay} - R_{By} + q \cdot 3l = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 3ql$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 : \quad R_{By} \cdot 2l - (q \cdot 3l) \cdot \frac{3}{2}l = 0$$

$$2R_{By}l - \frac{9}{2}ql^2 = 0$$

$$R_{By} = \frac{9}{4}ql$$

$$R_{Ay} = 3ql - R_{By} = 3ql - \frac{9}{4}ql = \frac{3}{4}ql$$

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

— przedział AB: $0 \leq x \leq 2l$ (rys. 6.18)

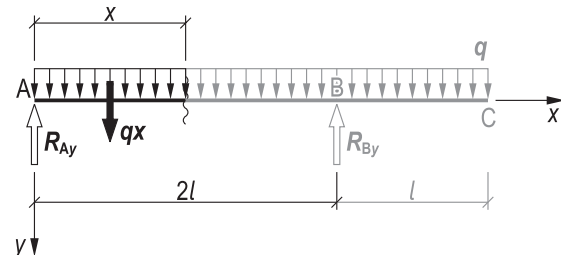
$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{3}{4}ql - qx$$

$$T(x=0) = \frac{3}{4}ql - q \cdot 0 = \frac{3}{4}ql$$

$$T(x=2l) = \frac{3}{4}ql - q \cdot 2l = -\frac{5}{4}ql$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} = \frac{3}{4}qlx - q \frac{x^2}{2}$$

$$M(x=0) = \frac{3}{4}ql \cdot 0 - q \frac{0^2}{2} = 0$$



Rys. 6.18

$$M(x=2l) = \frac{3}{4}ql \cdot 2l - q \frac{(2l)^2}{2} = -\frac{1}{2}ql^2$$

Określamy położenie przekroju, w którym siła tnąca jest równa zero:

$$\frac{3}{4}ql - qx = 0$$

$$x = \frac{3}{4}l$$

W tym przekroju moment gnący osiąga lokalne ekstremum, równe:

$$M\left(x = \frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{4}ql \cdot \frac{3}{4}l - q \frac{\left(\frac{3}{4}l\right)^2}{2} = \frac{9}{32}ql^2$$

— przedział BC: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.19)

$$T(x) = qx$$

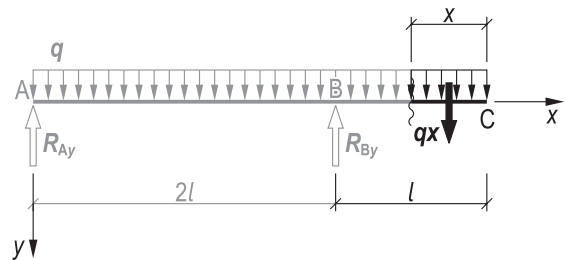
$$T(x=0) = q \cdot 0 = 0$$

$$T(x=l) = q \cdot l = ql$$

$$M(x) = -qx \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2}$$

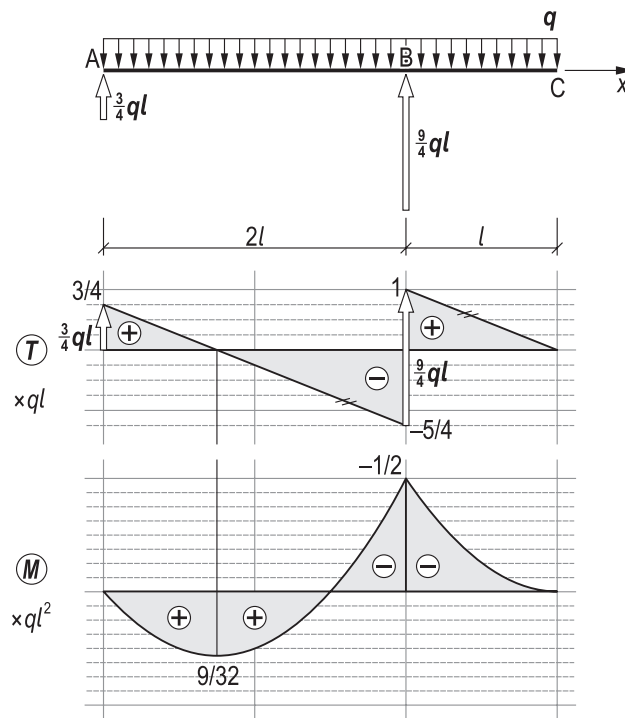
$$M(x=0) = -q \frac{0^2}{2} = 0$$

$$M(x=l) = -q \frac{l^2}{2} = -\frac{1}{2}ql^2$$



Rys. 6.19

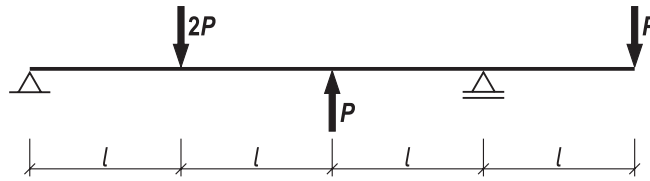
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.20.



Rys. 6.20

Zadanie 6.3.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.21. Dane: P , l .



Rys. 6.21

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.22) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c):

$$\Sigma P_{iy} = 0 : \quad -R_{Ay} - R_{Dy} + 2P - P + P = 0$$

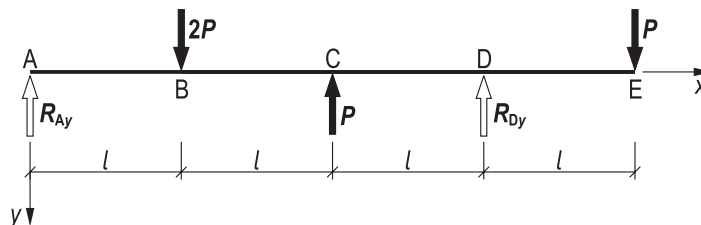
$$R_{Ay} + R_{Dy} = 2P$$

$$\Sigma M_{iA} = 0 : \quad R_{Dy} \cdot 3l - 2P \cdot l + P \cdot 2l - P \cdot 4l = 0$$

$$3R_{Dy}l - 4Pl = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{4}{3}P$$

$$R_{Ay} = 2P - R_{Dy} = 2P - \frac{4}{3}P = \frac{2}{3}P$$



Rys. 6.22

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.23)

$$T(x) = R_{Ay} = \frac{2}{3}P$$

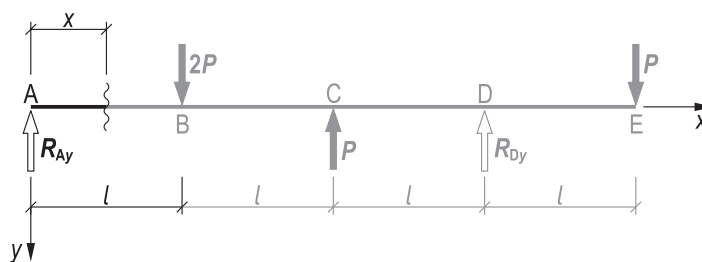
$$M(x) = R_{Ay} x = \frac{2}{3}P x$$

$$M(x=0) = \frac{2}{3}P \cdot 0 = 0$$

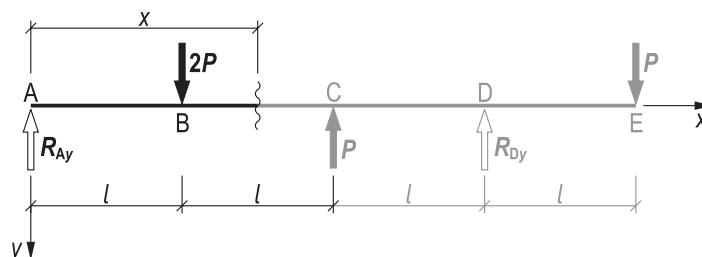
$$M(x=l) = \frac{2}{3}P \cdot l = \frac{2}{3}Pl$$

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.24)

$$T(x) = R_{Ay} - 2P = \frac{2}{3}P - 2P = -\frac{4}{3}P$$



Rys. 6.23



Rys. 6.24

$$M(x) = R_{Ay} x - 2P(x-l) = \frac{2}{3} P x - 2P x + 2Pl = -\frac{4}{3} P x + 2Pl$$

$$M(x=l) = -\frac{4}{3} P \cdot l + 2Pl = \frac{2}{3} Pl$$

$$M(x=2l) = -\frac{4}{3} P \cdot 2l + 2Pl = -\frac{2}{3} Pl$$

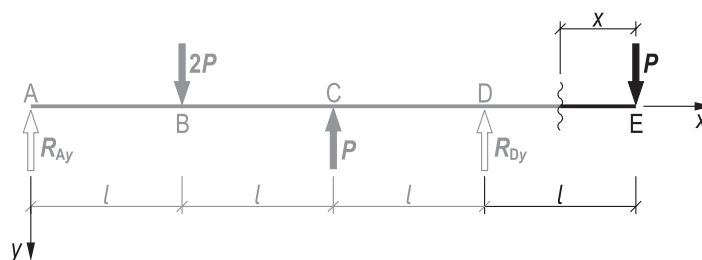
— przedział DE: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.25)

$$T(x) = P$$

$$M(x) = -Px$$

$$M(x=0) = -P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = -P \cdot l = -Pl$$



Rys. 6.25

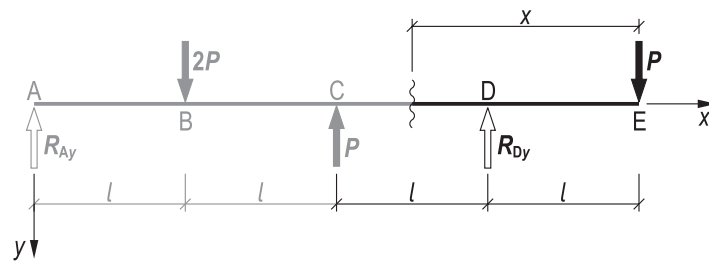
— przedział CD: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.26)

$$T(x) = P - R_{Dy} = P - \frac{4}{3} P = -\frac{1}{3} P$$

$$M(x) = -Px + R_{Dy}(x-l) = -Px + \frac{4}{3} P x - \frac{4}{3} Pl = \frac{1}{3} P x - \frac{4}{3} Pl$$

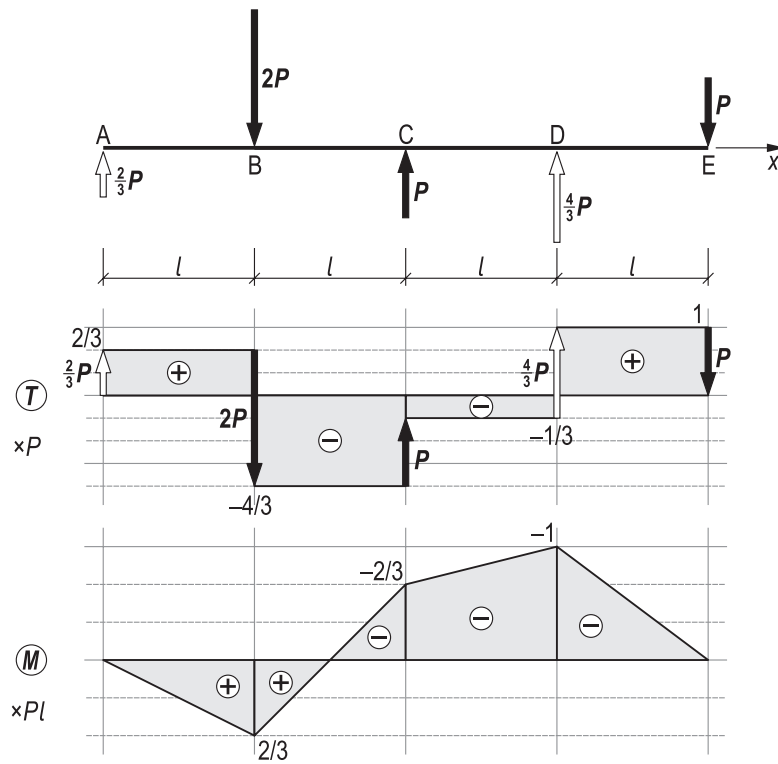
$$M(x=l) = \frac{1}{3} P \cdot l - \frac{4}{3} Pl = -Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{1}{3} P \cdot 2l - \frac{4}{3} Pl = -\frac{2}{3} Pl$$



Rys. 6.26

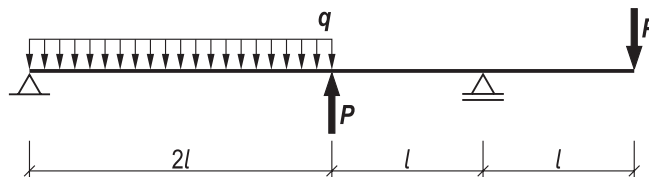
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.27.



Rys. 6.27

Zadanie 6.4.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.28. Dane: P , l , $q = P/l$.



Rys. 6.28

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.29) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągłe zastępujemy siłą skupioną o wartości $2P$.

$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} - R_{Cy} + q \cdot 2l - P + P = 0$$

$$-R_{Ay} - R_{Cy} + 2P = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} = 2P$$

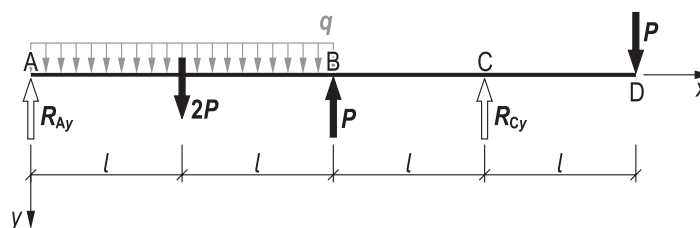
$$\Sigma M_{iA} = 0: \quad R_{Cy} \cdot 3l - (q \cdot 2l) \cdot l + P \cdot 2l - P \cdot 4l = 0$$

$$3R_{Cy}l - 2Pl + 2Pl - 4Pl = 0$$

$$3R_{Cy}l = 4Pl$$

$$R_{Cy} = \frac{4}{3}P$$

$$R_{Ay} = 2P - R_{Cy} = 2P - \frac{4}{3}P = \frac{2}{3}P$$



Rys. 6.29

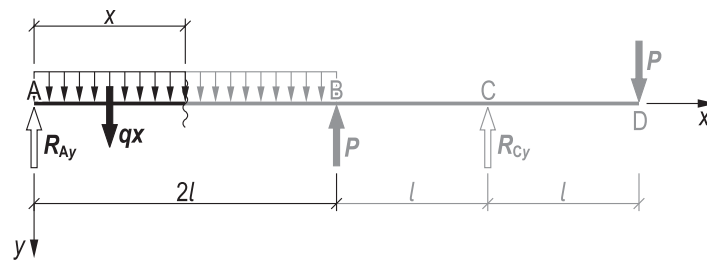
Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq 2l$ (rys. 6.30)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{2}{3}P - \frac{P}{l}x$$

$$T(x=0) = \frac{2}{3}P - \frac{P}{l} \cdot 0 = \frac{2}{3}P$$

$$T(x=2l) = \frac{2}{3}P - \frac{P}{l} \cdot 2l = -\frac{4}{3}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{2}{3}Px - \frac{P}{2l}x^2$$



Rys. 6.30

$$M(x=0) = \frac{2}{3}P \cdot 0 - \frac{P}{2l} \cdot 0^2 = 0$$

$$M(x=2l) = \frac{2}{3}P \cdot 2l - \frac{P}{2l} \cdot (2l)^2 = \frac{4}{3}Pl - 2Pl = -\frac{2}{3}Pl$$

Określamy położenie przekroju, w którym siła tnąca jest równa zero:

$$\frac{2}{3}P - \frac{P}{l}x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}l$$

W tym przekroju moment gnący osiąga lokalne ekstremum, równe:

$$M\left(x = \frac{2}{3}l\right) = \frac{2}{3}P \cdot \frac{2}{3}l - \frac{P}{2l} \left(\frac{2}{3}l\right)^2 = \frac{4}{9}Pl - \frac{2}{9}Pl = \frac{2}{9}Pl$$

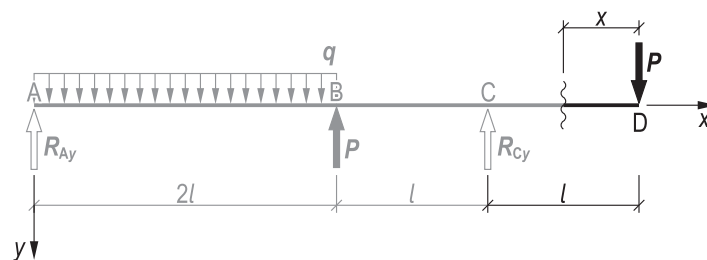
— przedział CD: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.31)

$$T(x) = P$$

$$M(x) = -Px$$

$$M(x=0) = -P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = -P \cdot l = -Pl$$



Rys. 6.31

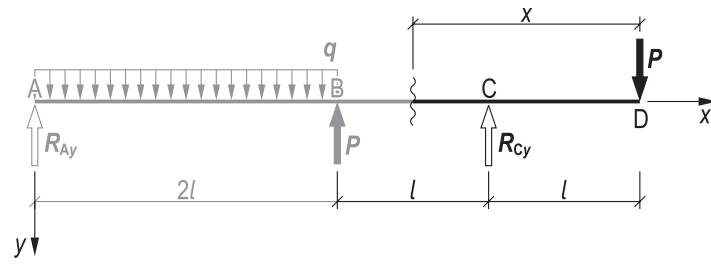
— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.32)

$$T(x) = P - R_{Cy} = P - \frac{4}{3}P = -\frac{1}{3}P$$

$$M(x) = -Px + R_{Cy}(x-l) = -Px + \frac{4}{3}Px - \frac{4}{3}Pl = \frac{1}{3}Px - \frac{4}{3}Pl$$

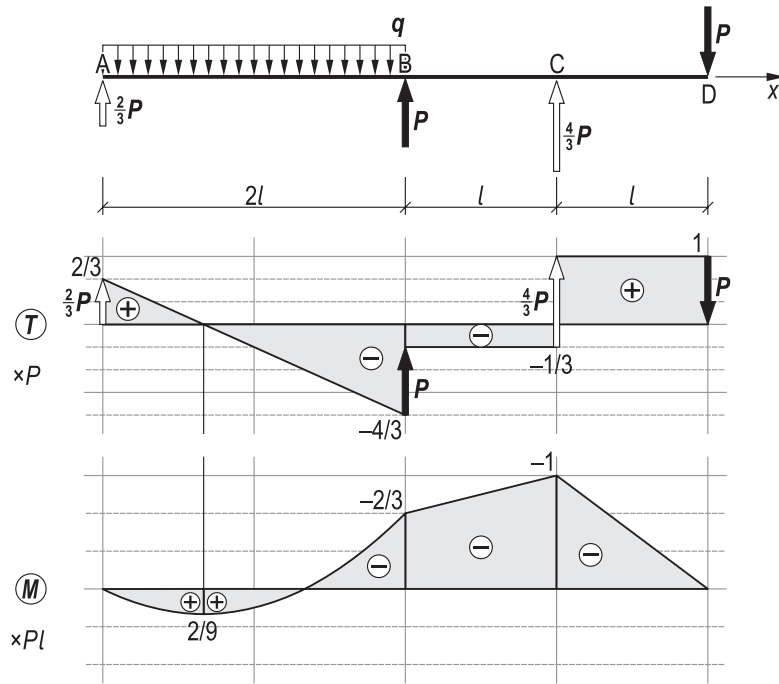
$$M(x=l) = \frac{1}{3}P \cdot l - \frac{4}{3}Pl = -Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{1}{3}P \cdot 2l - \frac{4}{3}Pl = -\frac{2}{3}Pl$$



Rys. 6.32

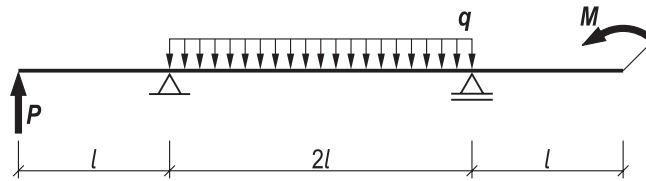
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.33.



Rys. 6.33

Zadanie 6.5.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.34. Dane: P , l , $q = P/l$, $M = 2Pl$.



Rys. 6.34

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.35) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągle zastępujemy siłą skupioną o wartości $2P$.

$$\Sigma P_{iy} = 0 : \quad -R_{By} - R_{Cy} - P + q \cdot 2l = 0$$

$$-R_{By} - R_{Cy} - P + 2P = 0$$

$$R_{By} + R_{Cy} = P$$

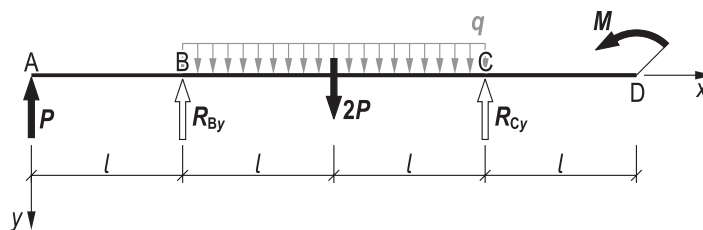
$$\Sigma M_{iB} = 0 : \quad R_{Cy} \cdot 2l + M - P \cdot l - (q \cdot 2l) \cdot l = 0$$

$$2R_{Cy}l + 2Pl - Pl - 2Pl = 0$$

$$2R_{Cy}l = Pl$$

$$R_{Cy} = \frac{1}{2}P$$

$$R_{By} = P - R_{Cy} = P - \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}P$$



Rys. 6.35

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.36)

$$T(x) = P$$

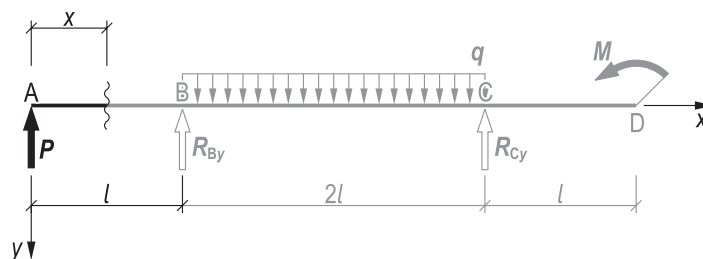
$$M(x) = Px$$

$$M(x=0) = P \cdot 0 = 0$$

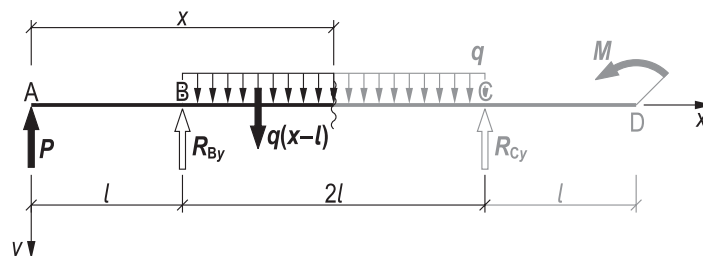
$$M(x=l) = P \cdot l = Pl$$

— przedział BC: $l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.37)

$$T(x) = P + R_{By} - q(x-l) = P + \frac{1}{2}P - \frac{P}{l}(x-l) = \frac{3}{2}P - \frac{P}{l}x + P = \frac{5}{2}P - \frac{P}{l}x$$



Rys. 6.36



Rys. 6.37

$$T(x=l) = \frac{5}{2}P - \frac{P}{l} \cdot l = \frac{3}{2}P$$

$$T(x=3l) = \frac{5}{2}P - \frac{P}{l} \cdot 3l = -\frac{1}{2}P$$

$$\begin{aligned} M(x) &= Px + R_{By}(x-l) - q \frac{(x-l)^2}{2} = Px + \frac{1}{2}P(x-l) - \frac{P}{2l}(x^2 - 2xl + l^2) = \\ &= Px + \frac{1}{2}Px - \frac{1}{2}Pl - \frac{P}{2l}x^2 + Px - \frac{1}{2}Pl = -\frac{P}{2l}x^2 + \frac{5}{2}Px - Pl \end{aligned}$$

$$M(x=l) = -\frac{P}{2l} \cdot l^2 + \frac{5}{2}P \cdot l - Pl = -\frac{1}{2}Pl + \frac{5}{2}Pl - Pl = Pl$$

$$M(x=3l) = -\frac{P}{2l} \cdot (3l)^2 + \frac{5}{2}P \cdot 3l - Pl = -\frac{9}{2}Pl + \frac{15}{2}Pl - Pl = 2Pl$$

Określamy położenie przekroju, w którym siła tnąca jest równa zero:

$$\frac{5}{2}P - \frac{P}{l}x = 0$$

$$x = \frac{5}{2}l$$

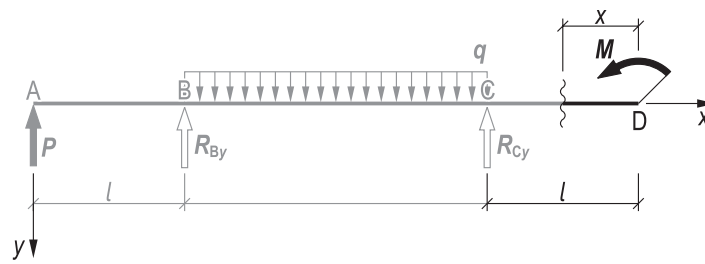
W tym przekroju moment gnący osiąga lokalne ekstremum, równe:

$$M\left(x = \frac{5}{2}l\right) = -\frac{P}{2l} \cdot \left(\frac{5}{2}l\right)^2 + \frac{5}{2}P \cdot \frac{5}{2}l - Pl = -\frac{25}{8}Pl + \frac{25}{4}Pl - Pl = \frac{17}{8}Pl$$

— przedział CD: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.38)

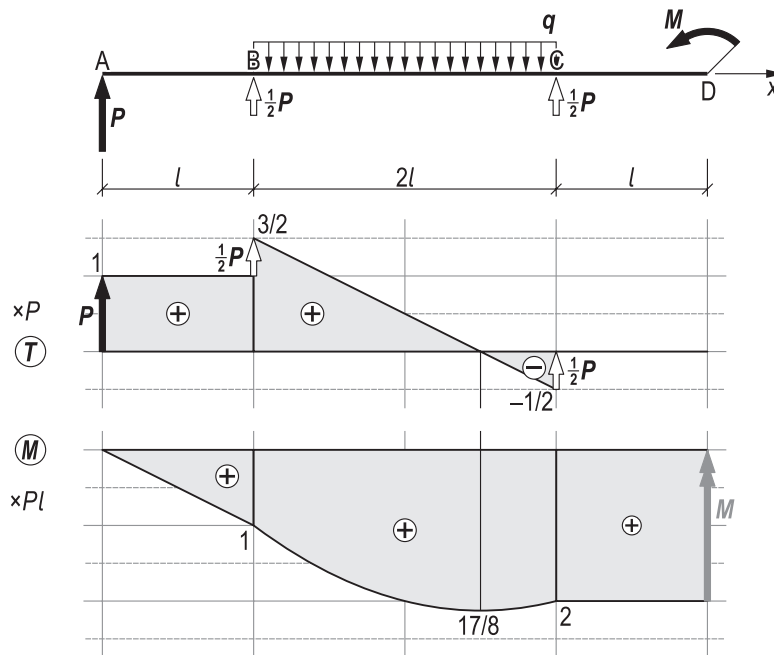
$$T(x) = 0$$

$$M(x) = M = 2Pl$$



Rys. 6.38

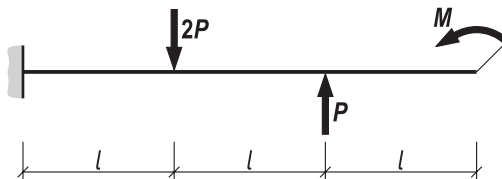
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.39.



Rys. 6.39

Zadanie 6.6.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.40. Dane: P , l , $M = Pl$.



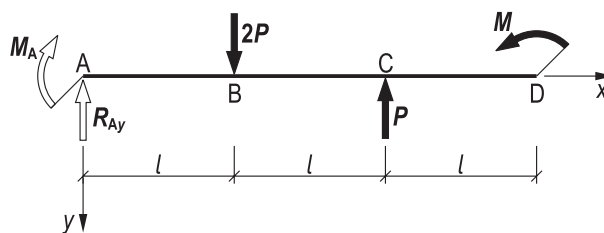
Rys. 6.40

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.41) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c):

$$\begin{aligned}\Sigma P_{iy} = 0: \quad & -R_{Ay} + 2P - P = 0 \\ & R_{Ay} = P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{iA} = 0: \quad & -M_A + M - 2P \cdot l + P \cdot 2l = 0 \\ & -M_A + Pl - 2Pl + 2Pl = 0 \\ & M_A = M = Pl\end{aligned}$$



Rys. 6.41

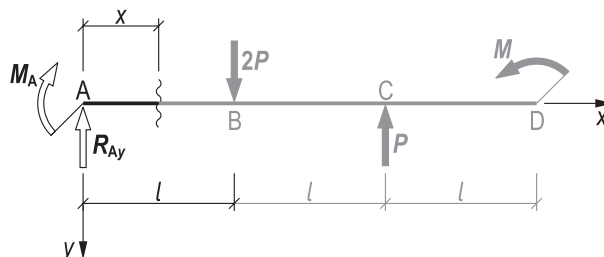
Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.42)

$$T(x) = R_{Ay} = P$$

$$M(x) = M_A + R_{Ay} x = Pl + P x$$

$$M(x=0) = Pl + P \cdot 0 = Pl$$

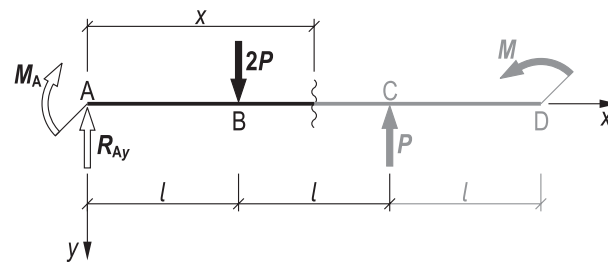
$$M(x=l) = Pl + P \cdot l = 2Pl$$



Rys. 6.42

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.43)

$$T(x) = R_{Ay} - 2P = P - 2P = -P$$



Rys. 6.43

$$M(x) = M_A + R_{Ay} x - 2P(x-l) = Pl + Px - 2Px + 2Pl = 3Pl - Px$$

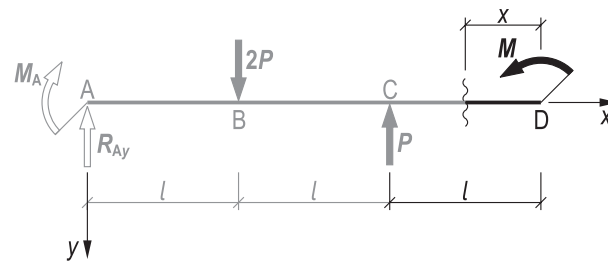
$$M(x=l) = 3Pl - P \cdot l = 2Pl$$

$$M(x=2l) = 3Pl - P \cdot 2l = Pl$$

— przedział CD: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.44)

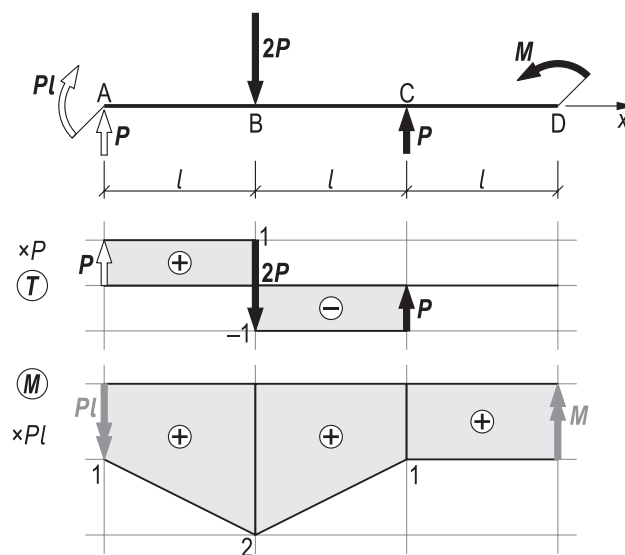
$$T(x) = 0$$

$$M(x) = M = Pl$$



Rys. 6.44

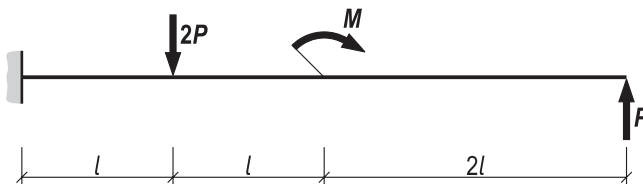
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.45.



Rys. 6.45

Zadanie 6.7.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.46. Dane: P , l , $M = Pl$.



Rys. 6.46

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.47) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c):

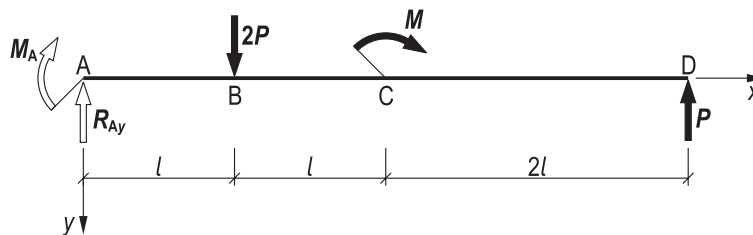
$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} + 2P - P = 0$$

$$R_{Ay} = P$$

$$\Sigma M_{iA} = 0: \quad -M_A - M - 2P \cdot l + P \cdot 4l = 0$$

$$-M_A - Pl - 2Pl + 4Pl = 0$$

$$M_A = Pl$$



Rys. 6.47

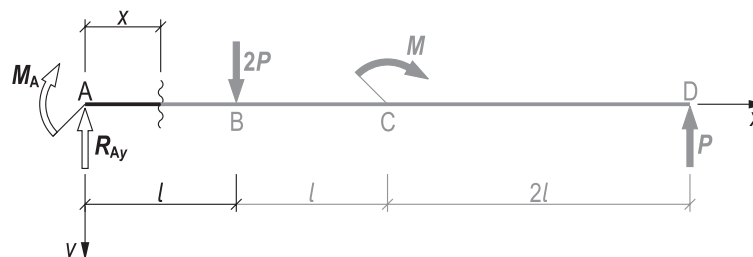
Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.48)

$$T(x) = R_{Ay} = P$$

$$M(x) = M_A + R_{Ay} x = Pl + P x$$

$$M(x=0) = Pl + P \cdot 0 = Pl$$

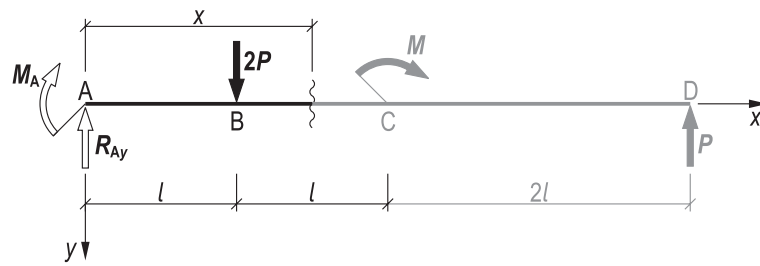
$$M(x=l) = Pl + P \cdot l = 2Pl$$



Rys. 6.48

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.49)

$$T(x) = R_{Ay} - 2P = P - 2P = -P$$



Rys. 6.49

$$M(x) = M_A + R_{Ay} x - 2P(x-l) = Pl + Px - 2Px + 2Pl = 3Pl - Px$$

$$M(x=l) = 3Pl - P \cdot l = 2Pl$$

$$M(x=2l) = 3Pl - P \cdot 2l = Pl$$

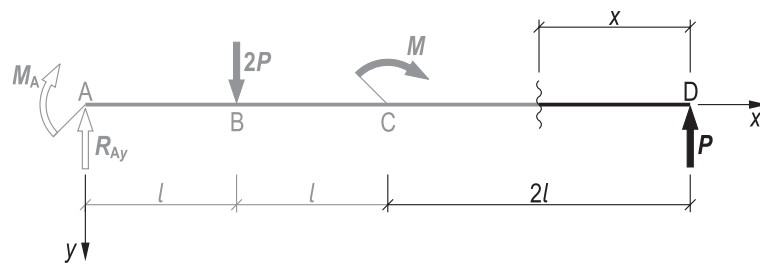
— przedział CD: $0 \leq x \leq 2l$ (rys. 6.50)

$$T(x) = -P$$

$$M(x) = Px$$

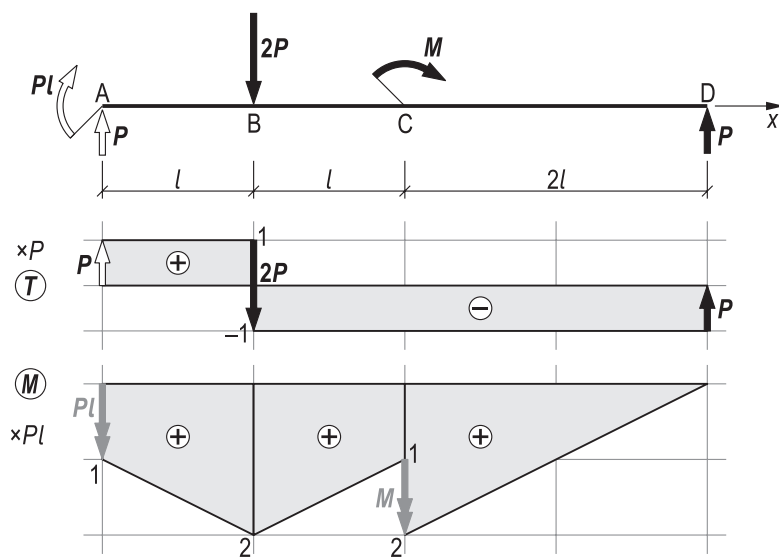
$$M(x=0) = P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=2l) = P \cdot 2l = 2Pl$$



Rys. 6.50

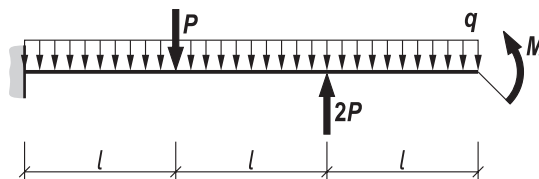
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.51.



Rys. 6.51

Zadanie 6.8.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.52. Dane: P , l , $q = P/l$, $M = 2Pl$.



Rys. 6.52

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.53) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągle zastępujemy siłą skupioną o wartości $3P$.

$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} + P + q \cdot 3l - 2P = 0$$

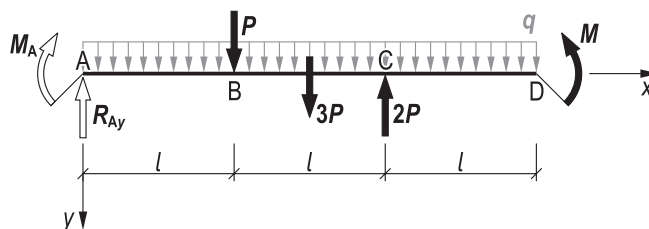
$$-R_{Ay} + P + 3P - 2P = 0$$

$$R_{Ay} = 2P$$

$$\Sigma M_{iA} = 0: -M_A + M - P \cdot l - (q \cdot 3l) \cdot \frac{3}{2}l + 2P \cdot 2l = 0$$

$$-M_A + 2Pl - Pl - \frac{9}{2}Pl + 4Pl = 0$$

$$M_A = \frac{1}{2}Pl$$



Rys. 6.53

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.54)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = 2P - \frac{P}{l}x$$

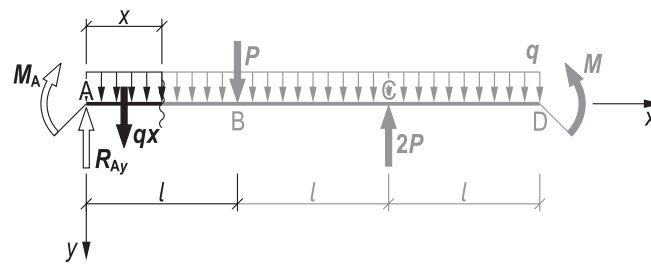
$$T(x=0) = 2P - \frac{P}{l} \cdot 0 = 2P$$

$$T(x=l) = 2P - \frac{P}{l} \cdot l = P$$

$$M(x) = M_A + R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} = \frac{1}{2}Pl + 2Px - \frac{P}{2l}x^2$$

$$M(x=0) = \frac{1}{2}Pl + 2P \cdot 0 - \frac{P}{2l} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}Pl$$

$$M(x=l) = \frac{1}{2}Pl + 2P \cdot l - \frac{P}{2l} \cdot l^2 = 2Pl$$



Rys. 6.54

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.55)

$$T(x) = R_{Ay} - qx - P = 2P - \frac{P}{l}x - P = P - \frac{P}{l}x$$

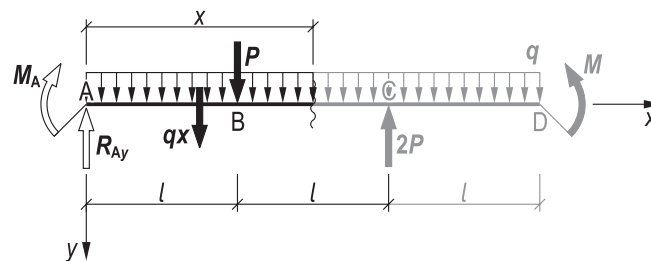
$$T(x=l) = P - \frac{P}{l} \cdot l = 0$$

$$T(x=2l) = P - \frac{P}{l} \cdot 2l = -P$$

$$\begin{aligned} M(x) &= M_A + R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} - P(x-l) = \frac{1}{2}Pl + 2Px - \frac{P}{2l}x^2 - Px + Pl = \\ &= \frac{3}{2}Pl + Px - \frac{P}{2l}x^2 \end{aligned}$$

$$M(x=l) = \frac{3}{2}Pl + P \cdot l - \frac{P}{2l} \cdot l^2 = 2Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{3}{2}Pl + P \cdot 2l - \frac{P}{2l} \cdot (2l)^2 = \frac{3}{2}Pl$$



Rys. 6.55

— przedział CD: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.56)

$$T(x) = qx = \frac{P}{l}x$$

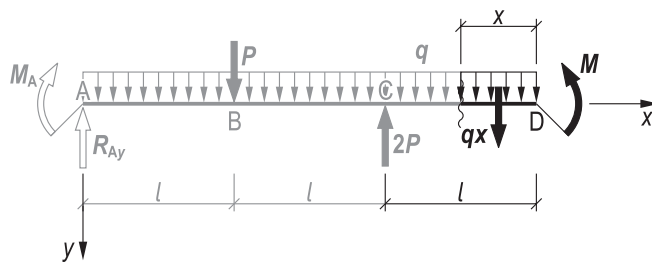
$$T(x=0) = \frac{P}{l} \cdot 0 = 0$$

$$T(x=l) = \frac{P}{l} \cdot l = P$$

$$M(x) = M - qx \frac{x}{2} = 2Pl - \frac{P}{2l}x^2$$

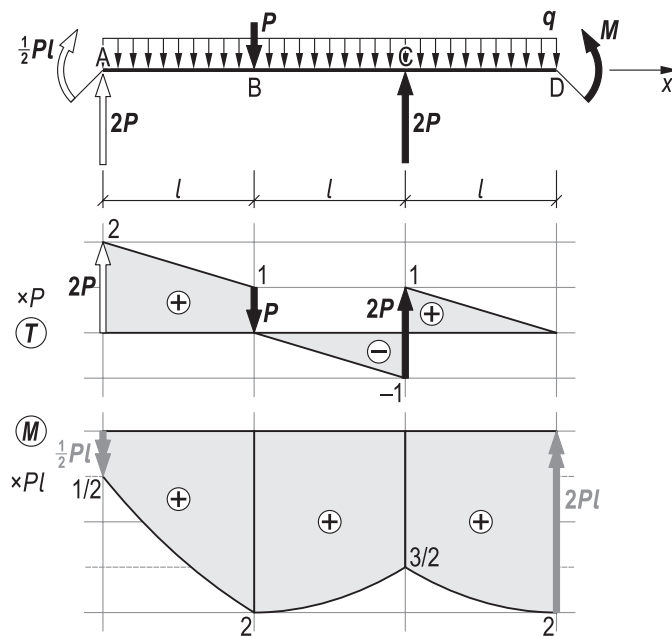
$$M(x=0) = 2Pl - \frac{P}{2l} \cdot 0^2 = 2Pl$$

$$M(x=l) = 2Pl - \frac{P}{2l} \cdot l^2 = \frac{3}{2}Pl$$



Rys. 6.56

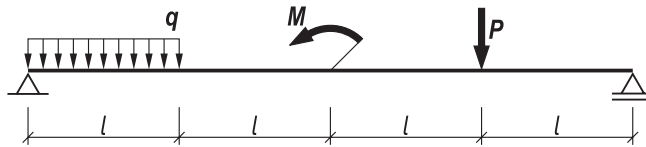
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.57.



Rys. 6.57

Zadanie 6.9.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.58. Dane: P , l , $q = P/l$, $M = Pl$.



Rys. 6.58

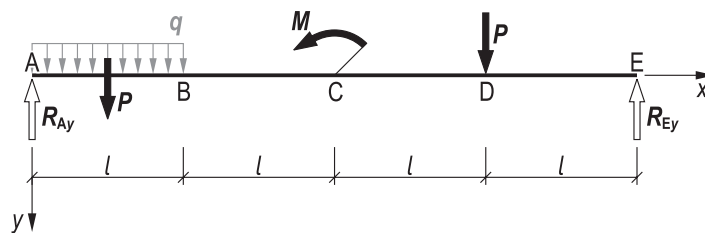
Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.59) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągłe zastępujemy siłą skupioną o wartości $q \cdot l = P$.

$$\begin{aligned}\Sigma P_{iy} = 0: \quad & -R_{Ay} - R_{Ey} + q \cdot l + P = 0 \\ & -R_{Ay} - R_{Ey} + P + P = 0 \\ & R_{Ay} + R_{Ey} = 2P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{iA} = 0: \quad & R_{Ey} \cdot 4l + M - (q \cdot l) \cdot \frac{1}{2}l - P \cdot 3l = 0 \\ & 4R_{Ey}l + Pl - \frac{1}{2}Pl - 3Pl = 0 \\ & 4R_{Ey}l = \frac{5}{2}Pl \\ & R_{Ey} = \frac{5}{8}P\end{aligned}$$

$$R_{Ay} = 2P - R_{Ey} = 2P - \frac{5}{8}P = \frac{11}{8}P$$



Rys. 6.59

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

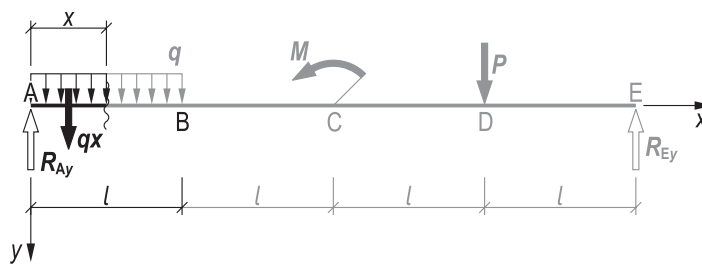
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.60)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{11}{8}P - \frac{P}{l}x$$

$$T(x=0) = \frac{11}{8}P - \frac{P}{l} \cdot 0 = \frac{11}{8}P$$

$$T(x=l) = \frac{11}{8}P - \frac{P}{l} \cdot l = \frac{3}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} = \frac{11}{8}Px - \frac{P}{2l}x^2$$



Rys. 6.60

$$M(x=0) = \frac{11}{8}P \cdot 0 - \frac{P}{2l} \cdot 0^2 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{11}{8}P \cdot l - \frac{P}{2l} \cdot l^2 = \frac{7}{8}Pl$$

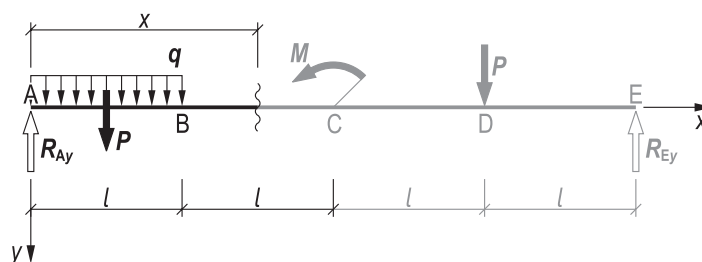
— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.61)

$$T(x) = R_{Ay} - ql = \frac{11}{8}P - P = \frac{3}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - ql \cdot \left(x - \frac{1}{2}l\right) = \frac{11}{8}Px - Px + \frac{1}{2}Pl = \frac{3}{8}Px + \frac{1}{2}Pl$$

$$M(x=l) = \frac{3}{8}P \cdot l + \frac{1}{2}Pl = \frac{7}{8}Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{3}{8}P \cdot 2l + \frac{1}{2}Pl = \frac{5}{4}Pl$$



Rys. 6.61

— przedział DE: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.62)

$$T(x) = -R_{Ey} = -\frac{5}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ey}x = \frac{5}{8}Px$$

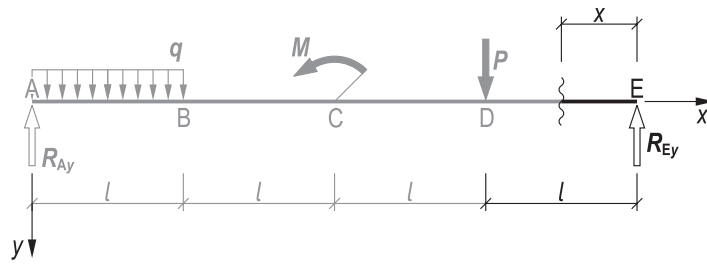
$$M(x=0) = \frac{5}{8}P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{5}{8}P \cdot l = \frac{5}{8}Pl$$

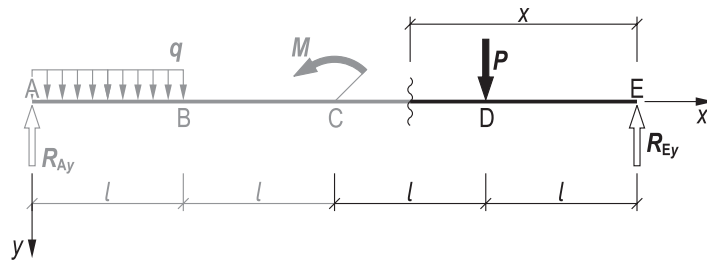
— przedział CD: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.63)

$$T(x) = -R_{Ey} + P = -\frac{5}{8}P + P = \frac{3}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ey}x - P(x-l) = \frac{5}{8}Px - Px + Pl = -\frac{3}{8}Px + Pl$$



Rys. 6.62

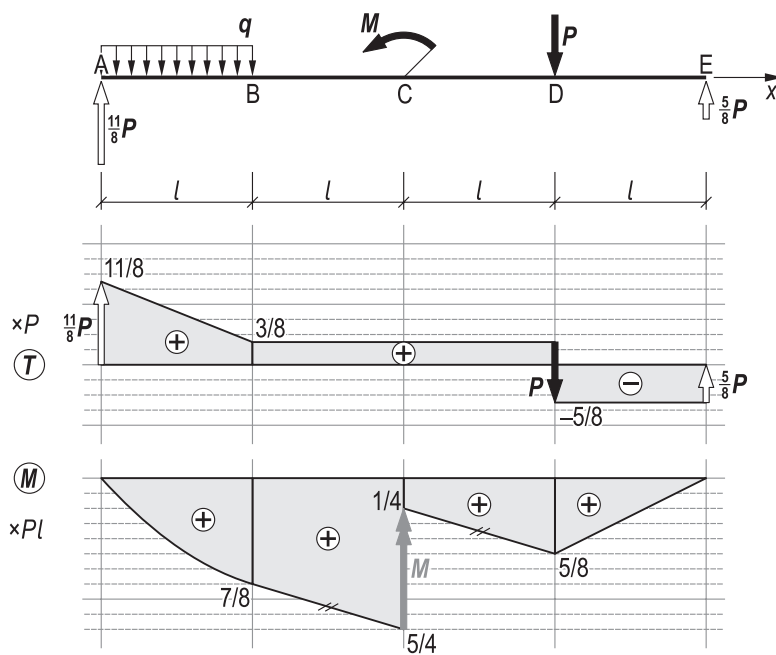


Rys. 6.63

$$M(x=l) = -\frac{3}{8}P \cdot l + Pl = \frac{5}{8}Pl$$

$$M(x=2l) = -\frac{3}{8}P \cdot 2l + Pl = \frac{1}{4}Pl$$

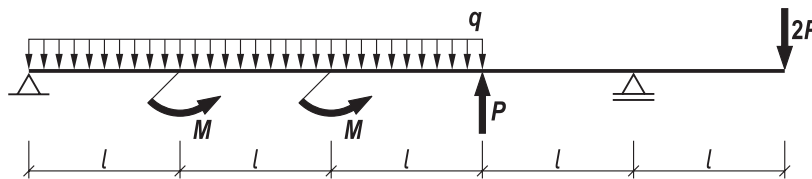
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.64.



Rys. 6.64

Zadanie 6.10.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przedstawionej na rys. 6.65. Dane: P , l , $q = P/l$, $M = Pl$.



Rys. 6.65

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.66) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c). Obciążenie ciągłe zastępujemy siłą skupioną o wartości $q \cdot l = P$.

$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} - R_{Ey} + q \cdot 3l - P + 2P = 0$$

$$-R_{Ay} - R_{Ey} + 3P - P + 2P = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Ey} = 4P$$

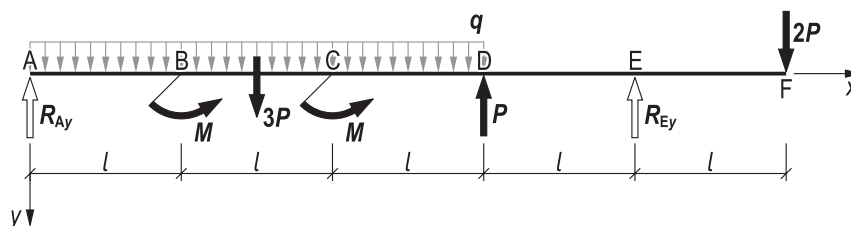
$$\Sigma M_{iA} = 0: \quad R_{Ey} \cdot 4l + M + M - (q \cdot 3l) \cdot \frac{3}{2}l + P \cdot 3l - 2P \cdot 5l = 0$$

$$4R_{Ey}l + Pl + Pl - \frac{9}{2}Pl + 3Pl - 10Pl = 0$$

$$4R_{Ey}l = \frac{19}{2}Pl$$

$$R_{Ey} = \frac{19}{8}P$$

$$R_{Ay} = 4P - R_{Ey} = 4P - \frac{19}{8}P = \frac{13}{8}P$$



Rys. 6.66

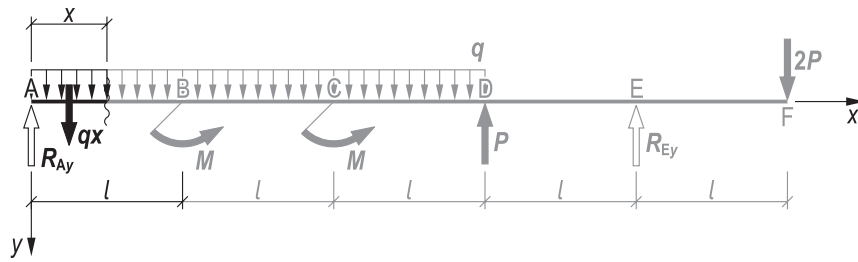
Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.67)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l}x$$

$$T(x=0) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot 0 = \frac{13}{8}P$$

$$T(x=l) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot l = \frac{5}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} = \frac{13}{8}Px - \frac{P}{2l}x^2$$



Rys. 6.67

$$M(x=0) = \frac{13}{8}P \cdot 0 - \frac{P}{2l} \cdot 0^2 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{13}{8}P \cdot l - \frac{P}{2l} \cdot l^2 = \frac{9}{8}Pl$$

— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.68)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l}x$$

$$T(x=l) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot l = \frac{5}{8}P$$

$$T(x=2l) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot 2l = -\frac{3}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} - M = \frac{13}{8}Px - \frac{P}{2l}x^2 - Pl$$

$$M(x=l) = \frac{13}{8}P \cdot l - \frac{P}{2l} \cdot l^2 - Pl = \frac{1}{8}Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{13}{8}P \cdot 2l - \frac{P}{2l} \cdot (2l)^2 - Pl = \frac{1}{4}Pl$$

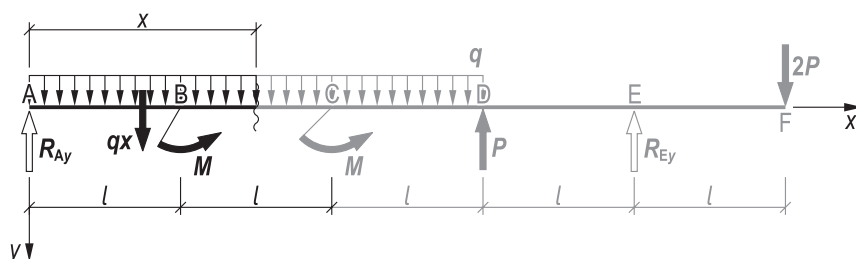
Określamy położenie przekroju, w którym siła tnąca jest równa zero:

$$\frac{13}{8}P - \frac{P}{l}x = 0$$

$$x = \frac{13}{8}l$$

W tym przekroju moment gnący osiąga lokalne ekstremum, równe:

$$M\left(x = \frac{13}{8}l\right) = \frac{13}{8}P \cdot \frac{13}{8}l - \frac{P}{2l} \cdot \left(\frac{13}{8}l\right)^2 - Pl = \frac{41}{128}Pl$$



Rys. 6.68

— przedział CD: $2l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.69)

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l}x$$

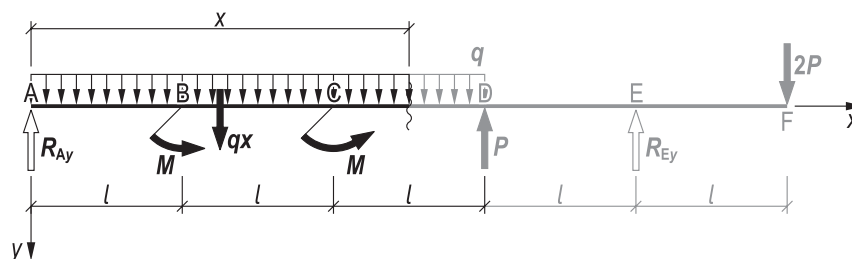
$$T(x = 2l) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot 2l = -\frac{3}{8}P$$

$$T(x = 3l) = \frac{13}{8}P - \frac{P}{l} \cdot 3l = -\frac{11}{8}P$$

$$M(x) = R_{Ay}x - qx \frac{x}{2} - M - M = \frac{13}{8}Px - \frac{P}{2l}x^2 - 2Pl$$

$$M(x = 2l) = \frac{13}{8}P \cdot 2l - \frac{P}{2l} \cdot (2l)^2 - 2Pl = -\frac{3}{4}Pl$$

$$M(x = 3l) = \frac{13}{8}P \cdot 3l - \frac{P}{2l} \cdot (3l)^2 - 2Pl = -\frac{13}{8}Pl$$



Rys. 6.69

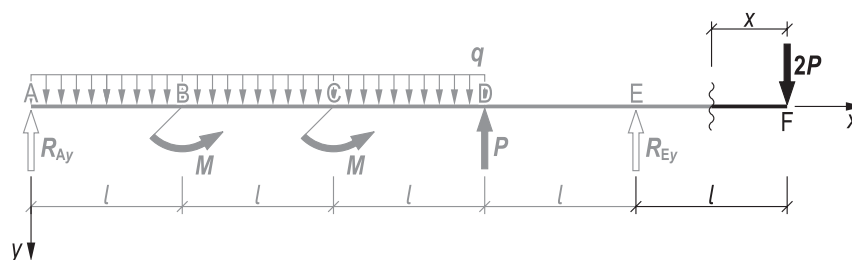
— przedział EF: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.70)

$$T(x) = 2P$$

$$M(x) = -2Px$$

$$M(x = 0) = -2P \cdot 0 = 0$$

$$M(x = l) = -2P \cdot l = -2Pl$$



Rys. 6.70

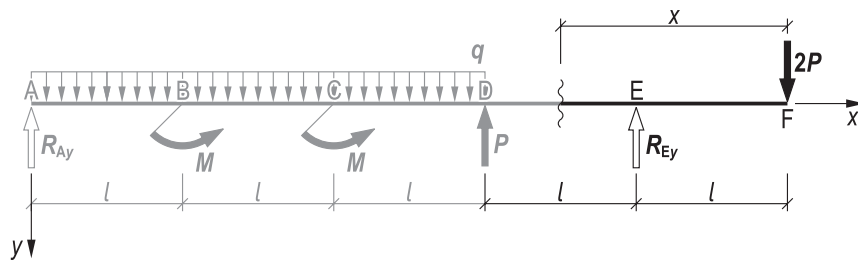
— przedział DE: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.71)

$$T(x) = 2P - R_{Ey} = 2P - \frac{19}{8}P = -\frac{3}{8}P$$

$$M(x) = -2Px + R_{Ey}(x - l) = -2Px + \frac{19}{8}Px - \frac{19}{8}Pl = \frac{3}{8}Px - \frac{19}{8}Pl$$

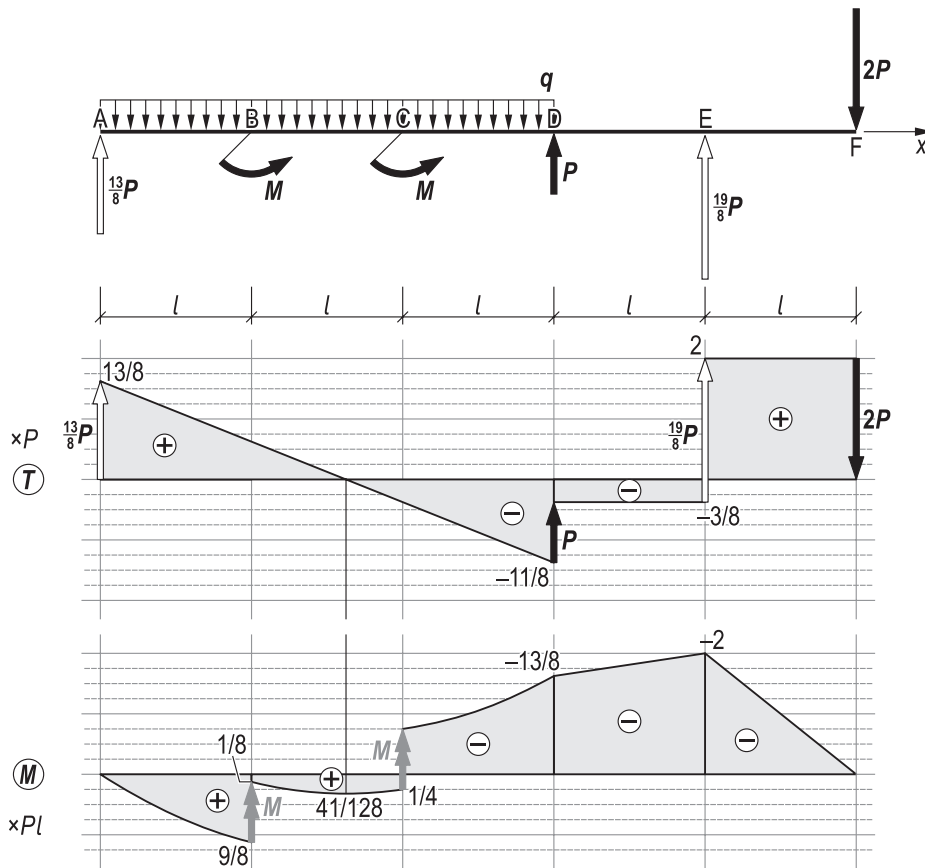
$$M(x = l) = \frac{3}{8}P \cdot l - \frac{19}{8}Pl = -2Pl$$

$$M(x = 2l) = \frac{3}{8}P \cdot 2l - \frac{19}{8}Pl = -\frac{13}{8}Pl$$



Rys. 6.71

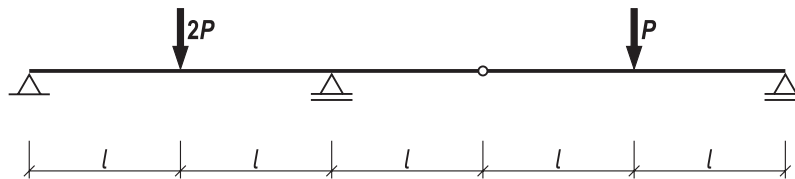
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.72.



Rys. 6.72

Zadanie 6.11.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przegubowej przedstawionej na rys. 6.73. Dane: P , l .



Rys. 6.73

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.74) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c):

$$\Sigma P_{iy} = 0: \quad -R_{Ay} - R_{Cy} - R_{Fy} + 2P + P = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} + R_{Fy} = 3P$$

$$\Sigma M_{iA} = 0: \quad R_{Cy} \cdot 2l + R_{Fy} \cdot 5l - 2P \cdot l - P \cdot 4l = 0$$

$$2R_{Cy}l + 5R_{Fy}l = 6Pl$$

$$2R_{Cy} + 5R_{Fy} = 6P$$

Dodatkowe równanie wynika z faktu, iż moment w punkcie D (przegub), liczony zarówno z lewej, jak i z prawej strony, jest równy zero:

$$M_D^L = M_D^P = 0$$

Równanie zapisane dla prawej strony punktu D, jest zatem następujące:

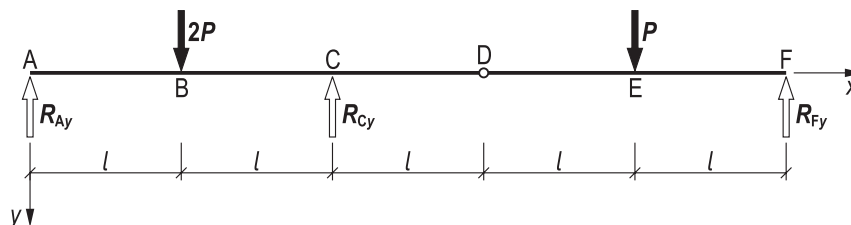
$$\Sigma M_D^P = 0: \quad R_{Fy} \cdot 2l - P \cdot l = 0$$

$$2R_{Fy}l = Pl$$

$$R_{Fy} = \frac{1}{2}P$$

$$R_{Cy} = \frac{1}{2}(6P - 5R_{Fy}) = \frac{1}{2}\left(6P - \frac{5}{2}P\right) = \frac{7}{4}P$$

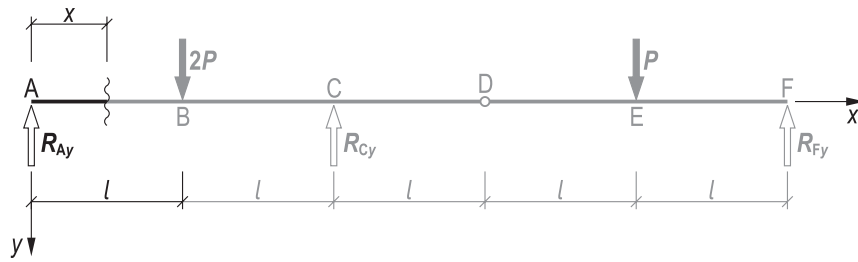
$$R_{Ay} = 3P - R_{Cy} - R_{Fy} = 3P - \frac{7}{4}P - \frac{1}{2}P = \frac{3}{4}P$$



Rys. 6.74

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.75)

$$T(x) = R_{Ay} = \frac{3}{4}P$$



Rys. 6.75

$$M(x) = R_{Ay} x = \frac{3}{4} P x$$

$$M(x=0) = \frac{3}{4} P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{3}{4} P \cdot l = \frac{3}{4} Pl$$

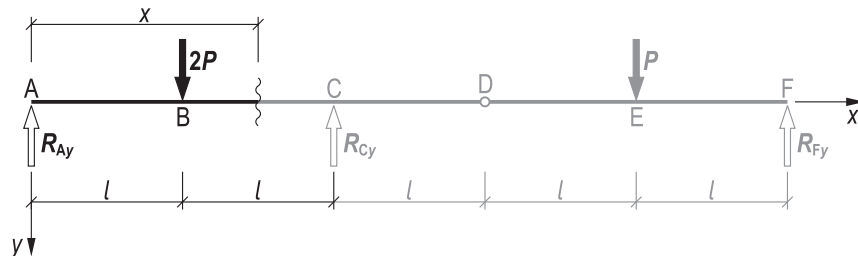
— przedział BC: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.76)

$$T(x) = R_{Ay} - 2P = \frac{3}{4} P - 2P = -\frac{5}{4} P$$

$$M(x) = R_{Ay} x - 2P(x-l) = \frac{3}{4} P x - 2P x + 2Pl = -\frac{5}{4} P x + 2Pl$$

$$M(x=l) = -\frac{5}{4} P \cdot l + 2Pl = \frac{3}{4} Pl$$

$$M(x=2l) = -\frac{5}{4} P \cdot 2l + 2Pl = -\frac{1}{2} Pl$$



Rys. 6.76

— przedział CD: $2l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.77)

$$T(x) = R_{Ay} - 2P + R_{Cy} = \frac{3}{4} P - 2P + \frac{7}{4} P = \frac{1}{2} P$$

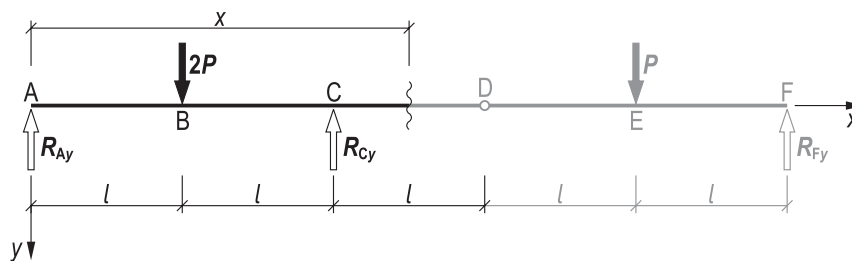
$$M(x) = R_{Ay} x - 2P(x-l) + R_{Cy}(x-2l) = \frac{3}{4} P x - 2P x + 2Pl + \frac{7}{4} P x - \frac{7}{2} Pl = \frac{1}{2} P x - \frac{3}{2} Pl$$

$$M(x=2l) = \frac{1}{2} P \cdot 2l - \frac{3}{2} Pl = -\frac{1}{2} Pl$$

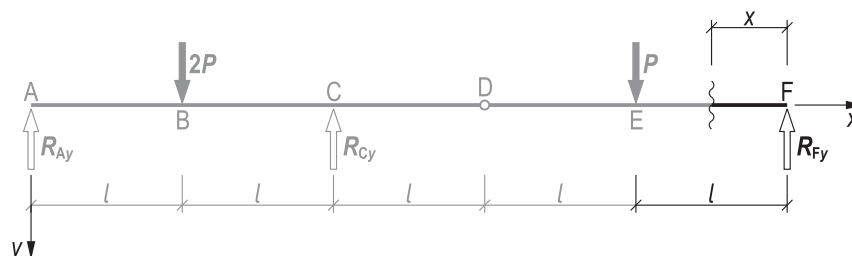
$$M(x=3l) = \frac{1}{2} P \cdot 3l - \frac{3}{2} Pl = 0$$

— przedział EF: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.78)

$$T(x) = -R_{Fy} = -\frac{1}{2} P$$



Rys. 6.77



Rys. 6.78

$$M(x) = R_{Fy} x = \frac{1}{2} P x$$

$$M(x=0) = \frac{1}{2} P \cdot 0 = 0$$

$$M(x=l) = \frac{1}{2} P \cdot l = \frac{1}{2} Pl$$

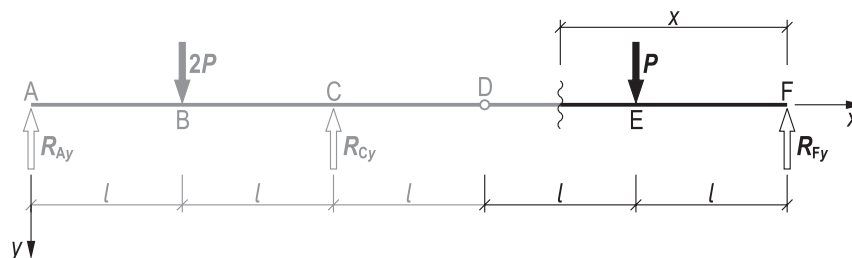
— przedział DE: $l \leq x \leq 2l$ (rys. 6.79)

$$T(x) = -R_{Fy} + P = -\frac{1}{2} P + P = \frac{1}{2} P$$

$$M(x) = R_{Fy} x - P(x-l) = \frac{1}{2} P x - P x + Pl = -\frac{1}{2} P x + Pl$$

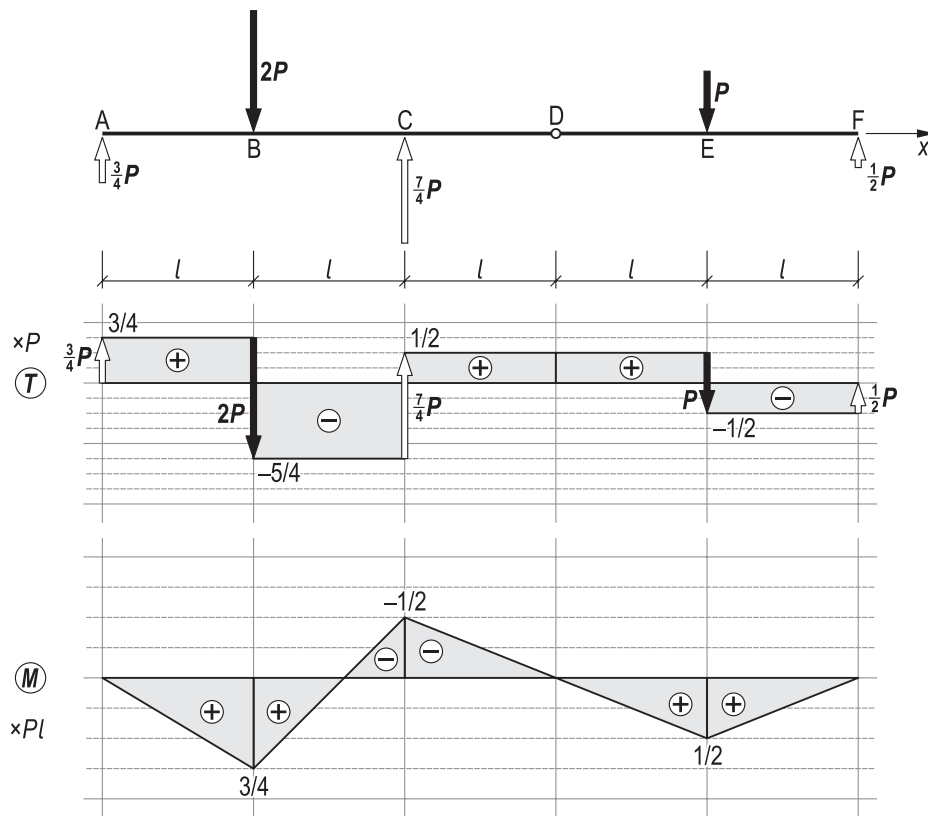
$$M(x=l) = -\frac{1}{2} P \cdot l + Pl = \frac{1}{2} Pl$$

$$M(x=2l) = -\frac{1}{2} P \cdot 2l + Pl = 0$$



Rys. 6.79

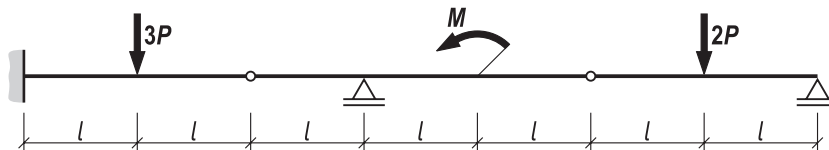
Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.80.



Rys. 6.80

Zadanie 6.12.

Wyznaczyć reakcje oraz wykresy sił tnących T i momentów gnących M dla belki przegubowej przedstawionej na rys. 6.81. Dane: P , l , $M = Pl$.



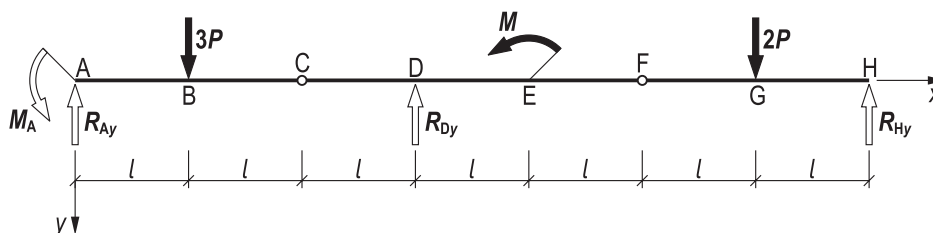
Rys. 6.81

Rozwiązanie

Belkę uwalniamy z więzów (rys. 6.82) i wyznaczamy wartości reakcji, korzystając z równań równowagi statycznej (6.1b) i (6.1c):

$$\begin{aligned}\Sigma P_{iy} = 0: & \quad -R_{Ay} - R_{Dy} - R_{Hy} + 3P + 2P = 0 \\ & \quad R_{Ay} + R_{Dy} + R_{Hy} = 5P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{iA} = 0: & \quad M_A + R_{Dy} \cdot 3l + R_{Hy} \cdot 7l + M - 3P \cdot l - 2P \cdot 6l = 0 \\ & \quad M_A + 3R_{Dy}l + 7R_{Hy}l + Pl - 3Pl - 12Pl = 0 \\ & \quad M_A + 3R_{Dy}l + 7R_{Hy}l = 14Pl\end{aligned}$$



Rys. 6.82

Dodatkowe równania wynikają z faktu, iż momenty w punktach C i F (przeguby), są równe zero:

$$\begin{aligned}M_C^L = M_C^P &= 0 \\ M_F^L = M_F^P &= 0\end{aligned}$$

Równanie zapisane dla lewej strony punktu C, jest następujące:

$$\begin{aligned}\Sigma M_C^L = 0: & \quad -M_A + R_{Ay} \cdot 2l - 3P \cdot l = 0 \\ & \quad M_A = 2R_{Ay}l - 3Pl\end{aligned}$$

natomiast równanie dla prawej strony punktu F ma postać:

$$\begin{aligned}\Sigma M_F^P = 0: & \quad R_{Hy} \cdot 2l - 2P \cdot l = 0 \\ & \quad R_{Hy} = P\end{aligned}$$

Podstawiając wyznaczoną reakcję R_{Hy} oraz wyprowadzoną zależność na moment M_A do równań równowagi, otrzymujemy następujący układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} R_{Ay} + R_{Dy} = 4P \\ 2R_{Ay} + 3R_{Dy} = 10P \end{cases}$$

$$R_{Ay} = 4P - R_{Dy}$$

$$2(4P - R_{Dy}) + 3R_{Dy} = 10P$$

$$8P - 2R_{Dy} + 3R_{Dy} = 10P$$

$$R_{Dy} = 2P$$

$$R_{Ay} = 4P - 2P = 2P$$

$$M_A = 2 \cdot 2P \cdot l - 3Pl = Pl$$

Wyznaczamy siły tnące T oraz momenty gnące M w poszczególnych przedziałach:

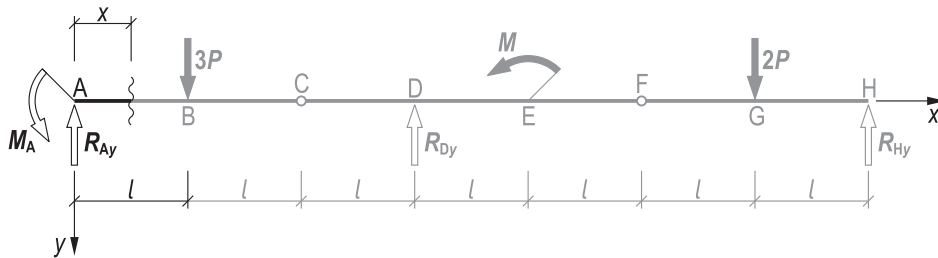
— przedział AB: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.83)

$$T(x) = R_{Ay} = 2P$$

$$M(x) = -M_A + R_{Ay} x = -Pl + 2Px$$

$$M(x=0) = -Pl + 2P \cdot 0 = -Pl$$

$$M(x=l) = -Pl + 2P \cdot l = Pl$$



Rys. 6.83

— przedział BD: $l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.84)

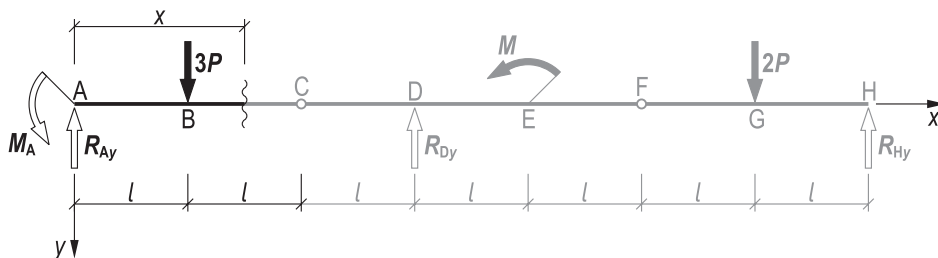
$$T(x) = R_{Ay} - 3P = 2P - 3P = -P$$

$$M(x) = -M_A + R_{Ay} x - 3P(x-l) = -Pl + 2Px - 3Px + 3Pl = 2Pl - Px$$

$$M(x=l) = 2Pl - P \cdot l = Pl$$

$$M(x=2l) = 2Pl - P \cdot 2l = 0$$

$$M(x=3l) = 2Pl - P \cdot 3l = -Pl$$



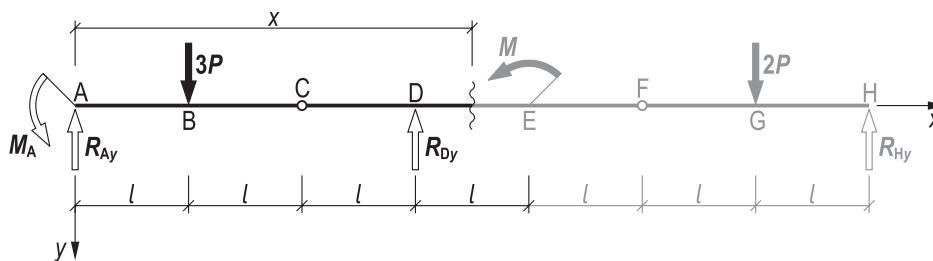
Rys. 6.84

— przedział DE: $3l \leq x \leq 4l$ (rys. 6.85)

$$T(x) = R_{Ay} - 3P + R_{Dy} = 2P - 3P + 2P = P$$

$$M(x) = -M_A + R_{Ay} x - 3P(x-l) + R_{Dy}(x-3l) =$$

$$= -Pl + 2Px - 3Px + 3Pl + 2Px - 6Pl = Px - 4Pl$$



Rys. 6.85

$$M(x = 3l) = P \cdot 3l - 4Pl = -Pl$$

$$M(x = 4l) = P \cdot 4l - 4Pl = 0$$

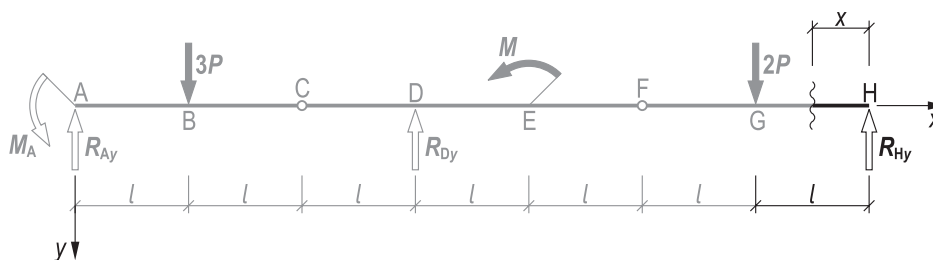
— przedział GH: $0 \leq x \leq l$ (rys. 6.86)

$$T(x) = -R_{Hy} = -P$$

$$M(x) = R_{Hy} x = P x$$

$$M(x = 0) = P \cdot 0 = 0$$

$$M(x = l) = P \cdot l = Pl$$



Rys. 6.86

— przedział FG: $l \leq x \leq 3l$ (rys. 6.87)

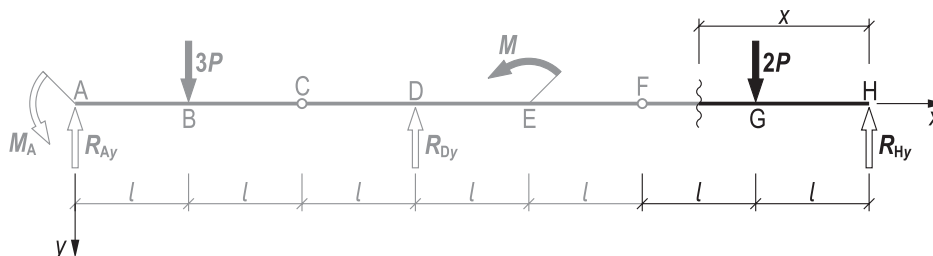
$$T(x) = -R_{Hy} + 2P = P$$

$$M(x) = R_{Hy} x - 2P(x - l) = P x - 2P x + 2Pl = -P x + 2Pl$$

$$M(x = l) = -P \cdot l + 2Pl = Pl$$

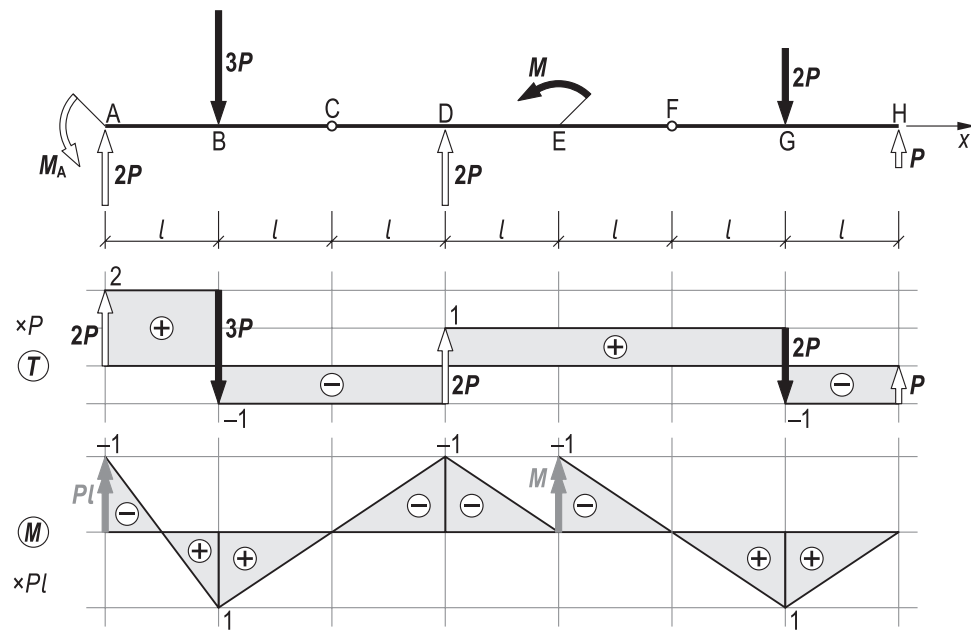
$$M(x = 2l) = -P \cdot 2l + 2Pl = 0$$

$$M(x = 3l) = -P \cdot 3l + 2Pl = -Pl$$



Rys. 6.87

Wykresy sił przekrojowych przedstawiono na rys. 6.88.



Rys. 6.88