

Blok V: Ciągi. Różniczkowanie i całkowanie

V.1 Napisz 4 początkowe wyrazy ciągu:

a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = \frac{n+3}{n!}$

c) $a_n = \frac{n!}{n(n+1)}$

V.2 Oblicz (lub zapisz) $c_1, c_3, c_{2k}, c_{n-k}$ dla:

a) $c_n = 3 \cdot 2^n$

c) $c_n = \frac{1 - (-1)^n}{n}$

d) $c_n = \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

b) $c_n = \frac{3n-2}{3-4n}$

V.3 Napisz 3 i 5 wyraz ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

d) $a_n = \frac{1}{3}, a_{n+1} = 3^n a_n^2$

b) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + 1)$

e) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (-1)^n$

c) $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

f) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2^n}{n+1} a_n$

V.4* Znajdź wzór na a_n dla ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$

d) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n$

e) $a_1 = -2, a_{n+1} = -a_n$

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n$

V.5* Ciąg (a_n) określony jest następująco:

a) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)a_n + 1}$. Wyznacz $a_1 + \dots + a_n$.

b) $a_1 = 1, a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n(n+1)a_n$, dla $n \geq 2$. Wyznacz a_n .

V.6 Wyznacz n -ty wyraz ciągu wiedząc, że suma S_n wynosi:

a) $S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

b) $S_n = n^2$

c) $S_n = \frac{n}{n+1}$

V.7 Oblicz sumę wszystkich liczb nieparzystych od 1 do 99.

V.8 Zbadaj, czy podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Jeśli tak to wyznacz jego różnicę:

a) $a_n = 6n + 1,$

b) $b_n = \frac{n-1}{n+1}$

c) $c_n = n\sqrt{2} + 2$

d) $d_n = n^2 + n + 1$

V.9 Znajdź wzór na ogólny wyraz ciągu arytmetycznego a_n wiedząc, że:

a) $a_1 = 5, r = 7;$

c) $a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4};$

b) $a_1 = -2, r = 5;$

d) $a_3 = -2, a_3 + a_5 = -4.$

V.10 Oblicz sumę S_n ciągu arytmetycznego (a_n) :

a) $a_1 = 1, \quad r = 3, \quad n = 12$

c) $a_1 = -10, \quad r = 5, \quad n = 25$

b) $a_1 = 100, \quad r = -2, \quad n = 50$

V.11 Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym:

a) $S_4 = 12, \quad S_6 = 42$

b) $S_4 = a, \quad S_6 = b.$

V.12 Ósmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 37, zaś jedenasty wynosi 52. Oblicz wyraz dwudziesty oraz sumę wyrazów od 5 do 15.

V.13 Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Przeciwprostokątna wynosi 30 cm. Oblicz długości przyprostokątnych.

V.14 W pewnym ciągu arytmetycznym $a_1 = 8, a_n = 83, S_n = 728$. Oblicz n i różnicę r tego ciągu.

V.15* Udowodnić, że jeśli liczby dodatnie a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

także tworzą ciąg arytmetyczny.

V.16* Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeśli suma jego n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 + 4n$.

V.17* Utworzyć ciąg arytmetyczny o następujących własnościach: 1) pierwszy wyraz ciągu jest równy 1, a ostatni 31, 2) suma wszystkich wyrazów od drugiego do przedostatniego włącznie jest 4 razy większa od sumy dwóch największych z nich.

V.18 Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny wynosi 21. Liczby te powiększone odpowiednio o 2, 3 i 9 utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

V.19 Jeśli podany ciąg jest geometryczny, to wyznacz jego iloraz:

a) $1, 3, 9, 27, \dots$

c) $-2, 4, -6, 8, -12, \dots$

e) $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$

b) $5, 5, 5, \dots$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \dots$

V.20 Wypisz 4 początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, w którym

a) $a_1 = -2, \quad q = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = -4, \quad q = -\frac{1}{2}$

b) $a_1 = \sqrt{2}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q = \sqrt{2}.$

V.21 Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego, w którym

a) $a_1 = 12, \quad a_2 = 9$

c) $a_3 = -\sqrt{2}, \quad a_4 = \sqrt{6}$

d) $a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_6 = \frac{1}{16}.$

b) $a_5 = 81, \quad a_7 = 729$

V.22 Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) , w którym:

a) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 24 \\ a_2 + a_3 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_6 = 4a_4 \\ a_2 + a_5 = 216 \end{cases}$

V.23 Oblicz sumę S_n ciągu geometrycznego (a_n) , w którym:

a) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \sqrt{2}, \quad n = 8$

c) $a_1 = 5, \quad q = \frac{3}{2}, \quad n = 5.$

b) $a_1 = -1, \quad q = -2, \quad n = 6$

V.24 Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego wynosi 2, a iloraz jest równy 3. Oblicz piąty i siódmy wyraz tego ciągu.

V.25 Dane są $a_3 = \frac{20}{9}$ i $a_5 = \frac{80}{81}$ dla pewnego ciągu geometrycznego. Obliczyć pierwszy wyraz oraz iloraz tego ciągu.

V.26 W ciągu geometrycznym $a_1 = 2$ i $q = 2$. Obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

V.27* Udowodnić, że suma odwrotności wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego równa jest sumie jego wszystkich wyrazów podzielonej przez iloczyn pierwszego i ostatniego wyrazu:

$$S = \frac{S_n}{a_1 a_n}, \quad S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

V.28* Między liczby 32 i 500 wstawić liczby x i y tak, aby ciąg $(32, x, y, 500)$ był ciągiem geometrycznym.

V.29 Dany jest ciąg geometryczny, w którym $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, $a_3 - a_1 = 3$. Znaleźć ten ciąg.

V.30 Znaleźć ciąg geometryczny o pięciu wyrazach, w którym suma trzech początkowych wyrazów wynosi 7, zaś suma trzech końcowych wyrazów jest 28.

V.31 Oblicz sumy:

a) $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

c*) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n.$

b) $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$

V.32 Znaleźć cztery liczby, z których pierwsze trzy tworzą ciąg geometryczny, natomiast ostatnie trzy — ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych wynosi 14, suma dwóch pozostałych wynosi 12.

V.33 Dane są dwa ciągi: arytmetyczny i geometryczny. Dwa pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego są odpowiednio równe dwóm pierwszym wyrazom ciągu arytmetycznego. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest o 12 większy od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest o 12 większy od pierwszego wyrazu ciągu geometrycznego. Znaleźć te ciągi.

V.34 Liczby x, y, z, u tworzą ciąg geometryczny. Wykazać, że: $(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + u^2) = (xy + yz + zu)^2$.

V.35* Ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg (a_n) określony następująco: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Udowodnić, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

dla każdej liczby naturalnej n .

V.36* Wykazać, że jeśli ciąg $a_n = n^2 - 5n + 2$, to wtedy ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n + 9$ jest ciągiem arytmetycznym.

V.37 Wiedząc, że liczby $x + y$, $x + 2y + 1$, $x^2 + 4y + 3x$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, zbadaj dla jakich $x \in \mathbb{R}$ ciąg ten jest ciągiem rosnącym?

V.38 Dla jakich liczb rzeczywistych x ciąg $(\sqrt{13} + 2, x, \sqrt{13} - 2)$ jest ciągiem geometrycznym?

V.39 Udowodnij, że jeśli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią geometryczną wyrazu pierwszego i czwartego, to wyraz szósty jest średnią geometryczną wyrazu czwartego i dziewiątego.

V.40 Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n oraz dwie liczby g i ϵ . Które wyrazy danego ciągu spełniają nierówność: $|a_n - g| < \epsilon$, gdy:

$$\text{a) } a_n = \frac{n-1}{n}, \quad g = 1, \quad \epsilon = 10^{-3}$$

$$\text{c) } a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad g = 0, \quad \epsilon = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{2n}{n^2+1}, \quad g = 0, \quad \epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{d) } a_n = \frac{1}{2^n}, \quad g = 0, \quad \epsilon = \frac{1}{2^{10}}$$

V.41* Wykaż, że liczba 0 jest granicą ciągu (a_n) :

$$\text{a) } a_n = -\frac{2}{n}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\text{c) } a_n = \frac{3}{n+1}$$

$$\text{d) } a_n = \frac{2n+1}{n^2}$$

V.42* Udowodnij, że liczba g jest granicą ciągu (a_n) , jeśli:

$$\text{a) } a_n = \frac{2n}{n+1}, \quad g = 2$$

$$\text{b) } a_n = \frac{n-1}{3(n+1)}, \quad g = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } a_n = \frac{n^2+n-1}{n^2-n+1}, \quad g = 1.$$

V.43* Pokazać, że ciąg: $a_n = 1 + (-1)^n$ nie ma granicy.

V.44 Udowodnij twierdzenie o trzech ciągach:

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba δ , taka, że dla każdego $n > \delta$ $a_n \leq b_n \leq c_n$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

V.45 Znajdź granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{7-5n}$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{3-n^3}$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-2}{4n-7} \right)^3$$

$$\text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2+1} - 2n$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$$

$$\text{m*) } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}}$$

V.46 Znajdź granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+5^2+\dots+5^n}{n^5}$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{13}{n} \right)^{2n}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{10^n+9^n+8^n}$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+6}{n^2} \right)^{n^2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5^n+7^n+9^n}}$$

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\text{j*) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln n)$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^3$$

$$\text{k*) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+12}{6n} \right)^n$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$$

V.47 Zbadaj, czy podany szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli tak, to znajdź jego granicę:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}} + \dots$

e) $\frac{4}{3} + 1 + \frac{3}{4} + \dots$

b) $3 - 9 + 27 - 81 + \dots$

d) $0.2 + 0.02 + 0.002 + \dots$

f) $\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dots$

V.48 Dla jakich wartości x podany szereg geometryczny jest zbieżny:

a) $x - 3x^2 + 9x^3 + \dots$

c) $1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \dots$

d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \dots$

b) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots$

V.49 Oblicz granicę:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{12} + \frac{25}{144} + \dots + \frac{3^n + 4^n}{12^n} \right)$

V.50 Oblicz:

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$

c) $1 - \frac{3}{5} + \frac{9}{25} - \frac{27}{125} + \dots$

b) $12 + 6 + 3 + \dots$

d) $\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots$

V.51 Podany ułamek okresowy zamień na zwykły:

a) 0.(2)

c) 0.0(80)

b) 2.3(21)

d) 1.8(81).

V.52* W trójkąt równoboczny o boku a wpisano koło, w to koło wpisano znowu trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów wpisano koło itd. Oblicz sumę długości promieni i sumę pól otrzymanego nieskończonego ciągu kół.

V.53* Dany jest kwadrat o boku a . Kwadrat ten rozcięto na dwa prostokąty o równych polach. Jeden z tych prostokątów rozcięto następnie na 2 kwadraty, z których jeden rozcięto znowu na 2 prostokąty o równych polach itd. Znajdź sumę tych wszystkich pól, korzystając z własności szeregu geometrycznego. (Pokazanie – na przykładzie – słuszności wzoru na sumę ciągu geometrycznego).

V.54 Znajdź granicę funkcji (na podstawie definicji Heinego):

a) $f(x) = 3x^2 - 5x^3 - 7$ w punkcie 12.

c) $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ w punkcie 3

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ w punkcie 2

d) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 7}$ w punkcie 4

V.55* Znaleźć granicę funkcji $f(x) = \sin x/x$ przy x dążącym do zera. Wynik przedstawić w sposób graficzny. Jaki rodzaj nieciągłości posiada ta funkcja w punkcie $x = 0$? W jaki sposób można zbudować z tej funkcji funkcję ciągłą?

V.56 Znajdź granicę funkcji w punkcie

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x - 20)^{10}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (-3x^2 + 4x + 7)$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 11x + 30}{x - 5}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

p*) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$

m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$

V.57 Znajdź granicę funkcji w nieskończoności

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3} - x$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 2x + 3}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 7x + \pi)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 6x + 9} - x + 3$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2}\right)^{5x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 8}{3x^4 - 6x^2 - 10}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 10x^2 - 7x + 11}{2x^2 - 12x^3 - 13x - 5}$

V.58 Zbadać granice jednostronne funkcji w punktach nie należących do dziedziny:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

g) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-4}$

e) $f(x) = \frac{12-x}{x-5}$

h) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{2}{x+2}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x+5}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

V.59 Zbadać ciągłość funkcji na zbiorze \mathbb{R}

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x+2}, & x \neq -2 \\ -5, & x = -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x^2 - x}, & x \neq 0, 1 \\ -1, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x + \cos x)}{x + \sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

V.60 Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = x + 3$

h) $f(x) = -5x$

n) $f(x) = x^{-2}$

b) $f(x) = x + 5$

i) $f(x) = \sqrt{2}x$

o) $f(x) = x^{-5}$

c) $f(x) = x - \pi$

j) $f(x) = x^2$

p) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = x + 7$

k) $f(x) = x^3$

q) $f(x) = 3x^2$

e) $f(x) = 5$

l) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

r) $f(x) = 5x^7$

f) $f(x) = e$

m) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

s) $f(x) = -10x^{-2}$

g) $f(x) = 2x$

t) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$

u) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 27$

w) $f(x) = (5 - 7x)^2$

y) $f(x) = 8x^3 - 8x^2 + 2x + 3$

v) $f(x) = 49x^2 - 70x + 25$

x) $f(x) = (x - 3)^3$

z) $f(x) = (x + 2)^4$

V.61 Oblicz pochodną funkcji

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$

c) $f(x) = 2 \sin x$

e) $f(x) = 5 \operatorname{tg} x - 7$

b) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

d) $f(x) = 3 \cos x + \pi$

f) $f(x) = -3 \operatorname{ctg} x + 3$

V.62 Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

e) $f(x) = x^3 \log(x) + 2x^2 \log_2(x)$

b) $f(x) = x(x - 2)(x - 3)$

f) $f(x) = x \cos x$

c) $f(x) = x e^x$

g) $f(x) = x^2 \sin x + x \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = x^2 2^x$

h) $f(x) = (x^2 - x + 1)(\sin x + 3 \cos x)$

V.63 Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x - 2}$

h) $f(x) = \frac{x \log x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

f) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$

i) $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{x \cos x}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

j) $f(x) = \frac{x^n e^x}{\ln(x)}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \frac{5x - 8}{6x + 1}$

V.64 Oblicz pochodną funkcji złożonej:

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$

h) $f(x) = \left(\frac{5x - 8}{6x + 1}\right)^3$

b) $f(x) = (x^3 + x^2 - x - 2)^5$

i) $f(x) = \left(\frac{16x^2 - 5x - 9}{12x - 7}\right)^4$

c) $f(x) = \sin(2x)$

j) $f(x) = (3x^5 - 17x + 3)^3 - 7$

d) $f(x) = \cos(3x)$

k) $f(x) = (3x^5 - 17x + 3)^{13} - 7$

e) $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$

l) $f(x) = \sqrt[4]{4x^3 + 2x^2 - \pi} + x^2 - \sqrt{9}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

m) $f(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 + 1)^2}$

g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

V.65 Oblicz pochodną funkcji złożonej

a) $f(x) = \operatorname{tg} 8x$

e) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^5$

h) $f(x) = \sin(x + 3)$

b) $f(x) = \operatorname{ctg} 7x$

f) $f(x) = 3(\sin x)^4$

i) $f(x) = \cos(x^2 - 3)$

c) $f(x) = (\sin x)^2$

j) $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 7)$

d) $f(x) = (\cos x)^3$

g) $f(x) = \frac{1}{7}(\operatorname{tg} x)^2$

k) $f(x) = \operatorname{ctg}(3x^2 - 8x + 5)$

V.66 Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{x+3}{x-1} + 1\right)$

b) $f(x) = [5x \cos(x^2 - 1)]^2$

c) $f(x) = \sqrt{7x \operatorname{tg}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

e) $f(x) = \sin x \cos x$

f) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

g) $f(x) = \sin x \cos(x - 3)$

h) $f(x) = \sin(x - 3) \cos(x + 3)$

i) $f(x) = (\operatorname{ctg}(x^2 - 7))^3 \operatorname{tg}^3(x^2 - 7)$

j) $f(x) = 2 \ln x^2$

k) $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$

l) $f(x) = \ln^2 x$

m) $f(x) = \sqrt{\ln(\operatorname{tg}(\sin(x^2 + 1)))}$

V.67 Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = a^{2x}$

d) $f(x) = \sqrt{3a^{3x}}$

h) $f(x) = 2x^{x^2}$

b) $f(x) = -5a^{3x}$

e) $f(x) = 3e^{-3x}$

i) $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$

f) $f(x) = 13e^{3x^6}$

j) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

c) $f(x) = \sqrt{8a^{\sqrt{8x}}}$

g) $f(x) = x^x$

k) $f(x) = \operatorname{tg} x^x$

V.68* Znajdź równania stycznych do okręgu o środku w punkcie $(3, 2)$ i promieniu równym 4 dla punktów okręgu o odciętej $x = 4$.

V.69* Znajdź kąt pomiędzy stycznymi do okręgu o środku w punkcie $(4, 7)$ i promieniu równym 9 w punkcie $x = 6$.

V.70 Znajdź styczną do wykresu funkcji:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ w punkcie $x = 2$

c) $f(x) = 2 \sin 2x$ w punkcie $x = \pi$

b) $f(x) = e^{x-3}$ w punkcie $x = 3$

V.71 Znajdź ekstrema funkcji:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

c) $f(x) = 3x^4 - 5x - 7$

b) $f(x) = -5x^2 + 17x + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 5x + 12$

V.72 Znajdź punkt, w którym prosta styczna w tym punkcie do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ jest równoległa do $2x - y + 3 = 0$.

V.73 Określ przedziały monotoniczności funkcji

a) $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$

c) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

e) $y = x \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}$

b) $y = \frac{x^2}{x+1}$

d) $y = x^2 e^{-x^2}$

V.74* Bieguny ogniwa o sile elektromotorycznej E i oporności wewnętrznej r połączono przewodnikiem o oporności R . Zbadać dla jakiej wartości R moc na tej oporności jest największa.

V.75* Na danym kole opisać trapez równoramienny o najmniejszym polu.

V.76 Oblicz:

a) $\int dx$		l) $\int \frac{4}{x^2} dx$
b) $\int x dx$	g) $\int (\sin x + 2 \cos x) dx$	m) $\int \frac{-3}{x^3} dx$
c) $\int (x + 1) dx$	h) $\int (\cos x - 3 \sin x + x) dx$	n) $\int (e^x + 2 \operatorname{tg} x) dx$
d) $\int (x^2 - 3x + 5) dx$	i) $\int \operatorname{tg} x dx$	o) $\int x \sqrt{x} dx$
e) $\int (2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) dx$	j) $\int \operatorname{ctg} x dx$	p) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$
f) $\int (x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 5) dx$	k) $\int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$	

V.77 Oblicz stosując twierdzenie o całkowaniu przez części:

a) $\int x \sin x dx$	d) $\int x^2 e^x dx$	g) $\int x^5 \ln x dx$
b) $\int x \cos x dx$	e) $\int x^3 e^x dx$	h) $\int e^x \sin x dx$
c) $\int x e^x dx$	f) $\int x \ln x dx$	i) $\int e^x \cos x dx$

V.78 Oblicz stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie:

a) $\int 8e^{4x} dx$	f) $\int 6 \sin 7x dx$	k) $\int \frac{1}{x-1} dx$
b) $\int (17e^{5x} - 7x^2 + 1) dx$	g) $\int e^{-x} dx$	l) $\int \frac{3x}{x^2-3} dx$
c) $\int \sin 2x dx$	h) $\int 5 \ln(3x)^3 dx$	m) $\int \frac{7}{8x-12} dx$
d) $\int \cos 5x dx$	i) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$	
e) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$	j) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$	

V.79* Oblicz:

a) $\int \sin^2 x dx$	g) $\int \frac{1}{\cos x} dx$
b) $\int \cos^2 x dx$	h) $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x} dx$
c) $\int 3 \sin 2x \cos 2x dx$	i) $\int \frac{1}{x^2-4} dx$
d) $\int \frac{13dx}{3x^2-15x-42}$	j) $\int \frac{1}{x^2+1} dx$
e) $\int \frac{(3x + \frac{21}{4})}{2x^2 + 7x + 1} dx$	k) $\int \frac{1}{x^2-16} dx$
f) $\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$	l) $\int \frac{3x^4-5x-7}{12x^3-5} dx$

$$\text{m) } \int \frac{7x^3}{3x^2 - 5} dx$$