

Dr inż. Jerzy Winczek

Materiały pomocnicze do wykładu z przedmiotu: **Mechanika**

Zadania z mechaniki – ćwiczenia audytoryjne

Przedmiot podstawowy w ramach kierunku **Mechatronika**– studia stacjonarne inżynierskie. Semestr II.

STATYKA

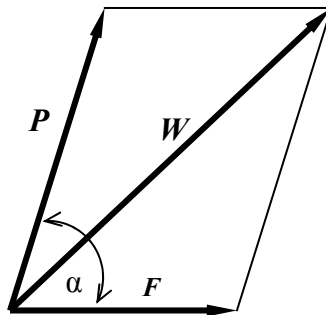
Suma dwóch wektorów

Przykład 1.

Wyznaczyć wypadkową dwóch sił* $P = 40 [N]$ i $F = 30 [N]$, których kąty między kierunkami ich działania wynoszą: $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ i $\alpha = 0$.

Rozwiązanie.

Wypadkową dwóch sił P i F jest wektor W wychodzący z punktu przyłożenia i leżący na przekątnej równoległoboku:



$$W = P + F$$

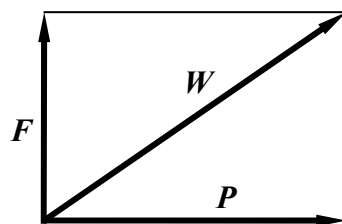
Moduł wektora W jest równy długości przekątnej równoległoboku:

$$W = \sqrt{P^2 + F^2 + 2PF \cos \alpha} = 60,83 [N]$$

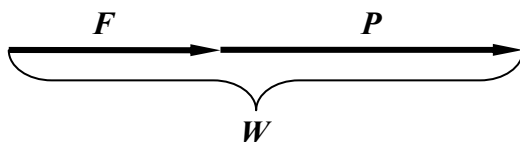
Jeżeli kąt α byłby równy 90° , wówczas otrzymujemy wzór Pitagorasa:

$$W = \sqrt{P^2 + F^2} = 50 [N]$$

* Oznaczenia wektorów wytłuszczoną kursywą przyjęto zgodnie z notacją w wykładach



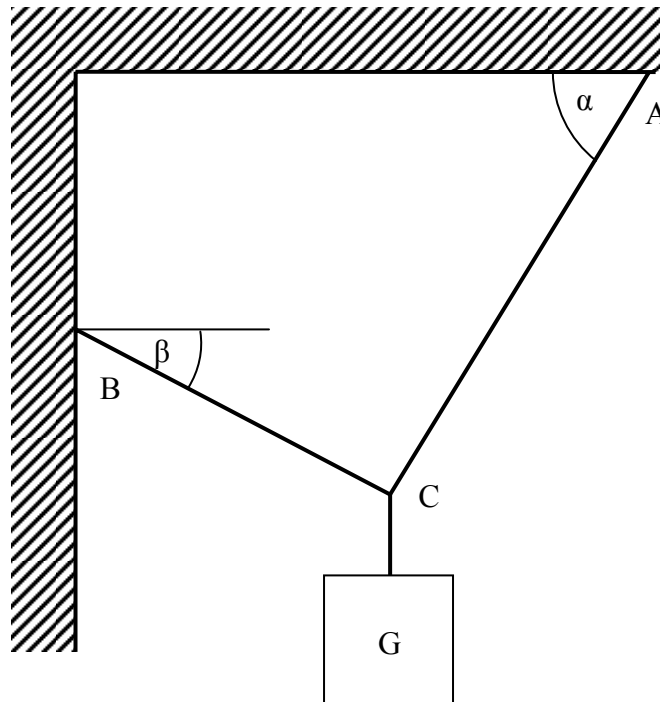
Z kolei gdyby $\alpha = 0$:



$$W = \sqrt{P^2 + F^2 + 2PF} = \sqrt{(P + F)^2} = P + F = 70 [N].$$

Płaski zbieżny układ sił**Przykład 2.**

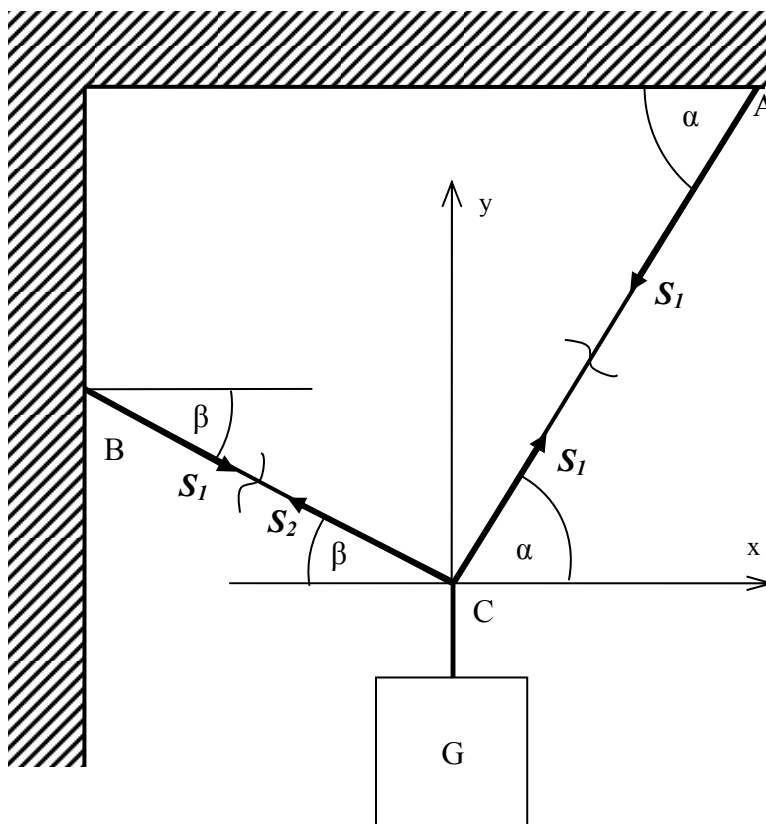
Na łańcuchach AC podczepionym do poziomego sufitu i BC podczepionym do pionowej ściany zawieszono ciężar $G = 5 [kN]$ w miejscu połączenia łańcuchów. Kąt zawarty pomiędzy łańcuchem AC i sufitem wynosi $\alpha = 60^\circ$, a kąt zawarty pomiędzy łańcuchem BC i poziomą wynosi $\beta = 30^\circ$. Wyznaczyć siły napięcia łańcuchów korzystając z warunku równowagi płaskiego zbieżnego układu sił i twierdzenia o trzech siłach.



Rozwiązanie.

1) stosując warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił

Przecinamy myślowo łańcuchy i wprowadzamy siły ich napięcia S_1 i S_2 . Układ współrzędnych prostokątnych zaczepiamy w punkcie zbieżności kierunków sił występujących w układzie.



Wówczas rzutując siły na osie układu otrzymujemy równania:

$$1) \sum_i P_{x_i} = -S_2 \cos \beta + S_1 \cos \alpha = 0$$

$$2) \sum_i P_{y_i} = S_2 \sin \beta + S_1 \sin \alpha - G = 0$$

Z pierwszego równania wyliczamy:

$$S_1 = S_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = S_2 \sqrt{3}$$

i wstawiamy do równania (2):

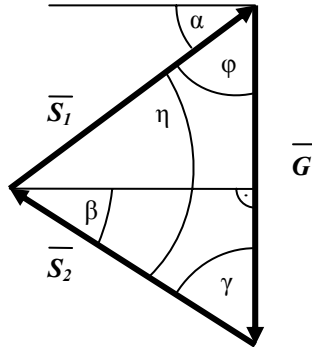
$$S_2 \sin \beta + S_2 \sqrt{3} \sin \alpha = G \Rightarrow S_2 = \frac{G}{2}$$

Natomiast:

$$S_1 = S_2 \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} G$$

2) stosując twierdzenie o trzech siłach

Siły leżące na płaszczyźnie będące w równowadze przecinają się w jednym punkcie, a wektory tych sił tworzą trójkąt zamknięty. Tworząc taki trójkąt z kierunków działania sił skorzystamy z twierdzenia sinusów:



$$\frac{G}{\sin \eta} = \frac{S_1}{\sin \gamma} = \frac{S_2}{\sin \varphi}$$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta = 60^\circ$$

$$\eta = 180^\circ - \varphi - \gamma = 90^\circ$$

stąd

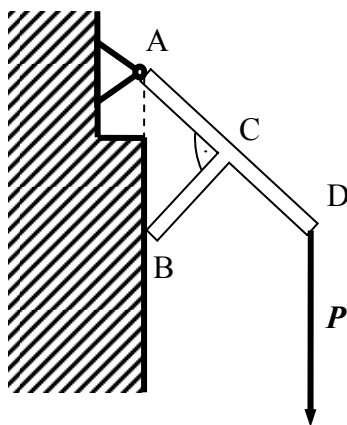
$$\frac{G}{\sin \eta} = \frac{S_1}{\sin \gamma} \Rightarrow S_1 = \frac{\sin \gamma}{\sin \eta} G = \frac{\sqrt{3}}{2} G$$

Dalej:

$$\frac{G}{\sin \eta} = \frac{S_2}{\sin \varphi} \Rightarrow S_2 = \frac{\sin \varphi}{\sin \eta} G = \frac{G}{2}$$

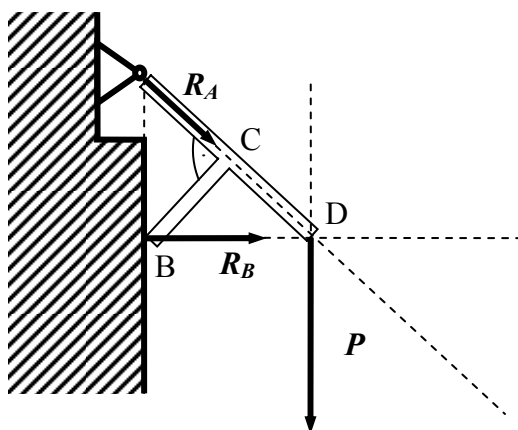
Przykład 3.

Rama zamocowana w przegubie A , oparta o gładką ścianę w punkcie B została obciążona w punkcie D pionową siłą $P = 2 \text{ [kN]}$. Wyznaczyć reakcje w przegubie A i w miejscu podparcia B , jeżeli $AC = CD = CB$, a kąt $ACB = \pi/2 \text{ [rad]}$.

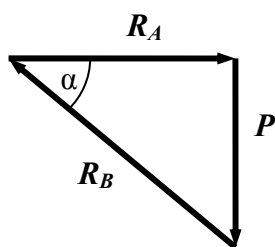


Rozwiązanie.

Kierunek działania reakcji R_B i siły P przecinają się w punkcie D . Ponieważ te dwie siły i reakcja R_A są w równowadze, to kierunek działania reakcji R_A leży na prostej przechodzącej przez punkty A i D .



Siły te tworzą trójkąt zamknięty:



Ponieważ kąt zawarty pomiędzy siłami R_B i R_A , podobnie jak pomiędzy siłami R_A i P wynosi 45° (kąt pomiędzy siłami R_B i P jest prosty, a trójkąt ACB jest równoramienny) to:

$$\frac{P}{R_A} = \sin(45^\circ) \Rightarrow R_A = 2\sqrt{2} \text{ [kN]}$$

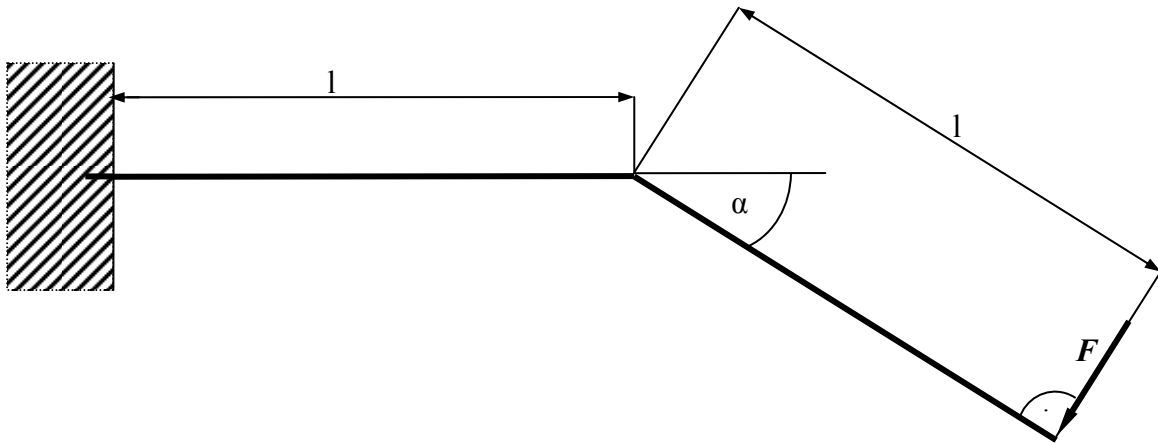
Z kolei:

$$\frac{P}{R_B} = \operatorname{tg}(\alpha) = 1 \Rightarrow R_B = 2 \text{ [kN]}$$

Płaski dowolny układ sił

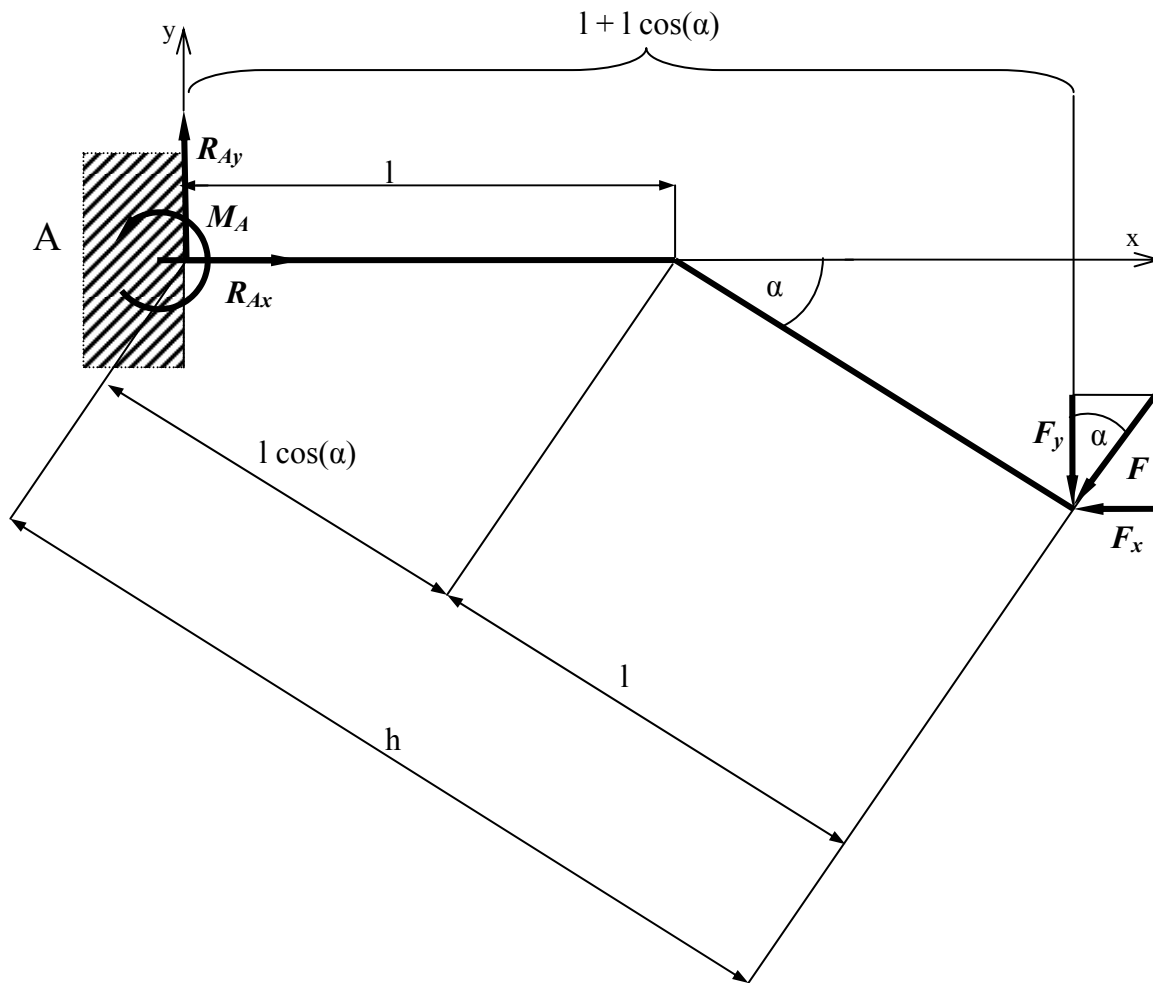
Przykład 4.

Pręt stalowy o długości $2l$ zgięty w połowie długości pod kątem α (jak na rysunku) zamurowano w ścianie, a jego swobodny koniec obciążono siłą F prostopadłą do osi pręta. Określić reakcję i moment utwierdzenia pręta w ścianie w funkcji kąta α . Wiedząc, że wartość siły $F = 2 \text{ [kN]}$, a długość $l = 1 \text{ [m]}$ wyznaczyć wartości reakcji w utwierdzeniu dla wartości kąta α odpowiednio 0° , 60° i 90° .



Rozwiązanie.

Ponieważ pręt jest utwierdzony w ścianie poszukiwanymi wielkościami są składowe reakcji R_{Ax} i R_{Ay} , oraz moment utwierdzenia M_A . Rzutując siły układu na osie układu współrzędnych otrzymujemy następujące równania równowagi:



$$\sum_i P_{ix} = R_{Ax} - F \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_{Ax} = F \sin \alpha$$

$$\sum_i P_{iy} = R_{Ay} - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_{Ay} = F \cos \alpha$$

Równanie momentów zapiszemy korzystając wprost z definicji momentu siły F względem punktu A określając ramię działania siły:

$$h = l + l \cos \alpha .$$

Wówczas:

$$\sum_i M_{i(A)} = M_A - Fh = M_A - F(l + l \cos \alpha) = 0 \Rightarrow M_A = Fl(1 + \cos \alpha)$$

Równanie momentów można też zapisać korzystając z twierdzenia Varignon'a:

$$\sum_i M_{i(A)} = M_A - F_x l \sin \alpha - F_y (l + l \cos \alpha) = 0$$

Uwzględniając:

$$F_x = F \sin \alpha , F_y = F \cos \alpha$$

otrzymujemy:

$$\sum_i M_{i(A)} = M_A - F \sin \alpha (l \sin \alpha) + F \cos \alpha (l + l \cos \alpha) = 0$$

Stąd

$$M_A = Fl \sin^2 \alpha + Fl \cos^2 \alpha + Fl \cos \alpha = Fl(1 + \cos \alpha).$$

Dla kąta $\alpha = 60^\circ$ otrzymujemy:

$$R_{Ax} = \sqrt{3} [kN], R_{Ay} = 1 [kN], M_A = 3 [kNm]$$

Dla kąta $\alpha = 0^\circ$ (pręt prostoliniowy):

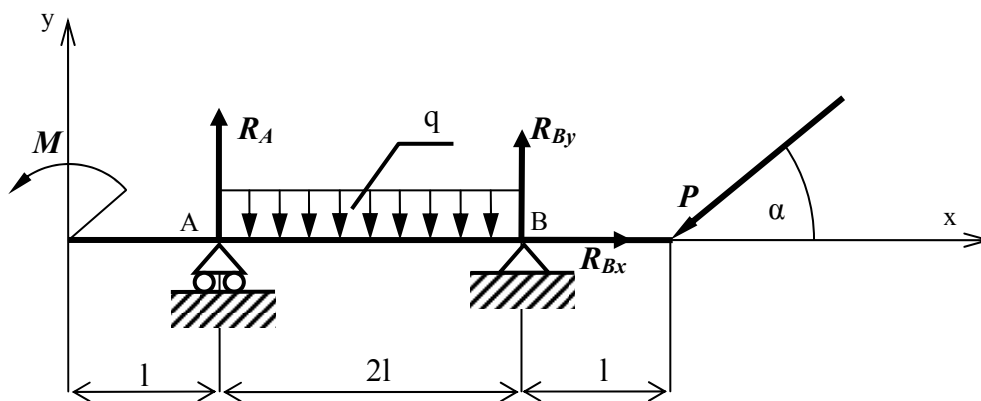
$$R_{Ax} = 0, R_{Ay} = 2 [kN], M_A = 4 [kNm]$$

Dla kąta $\alpha = 90^\circ$ (pręt zgięty pod kątem prostym):

$$R_{Ax} = 2 [kN], R_{Ay} = 0, M_A = 2 [kNm]$$

Przykład 5.

Belkę o długości $4l$ zamocowaną na podporach przegubowych stałej i przesuwnej obciążono momentem M , siłą skupioną P i obciążeniem nałożonym o stałym natężeniu q , jak pokazano na rysunku. Obliczyć wartości reakcji, jeżeli $M = 3 [kNm]$, $q = 1 [kN/m]$, $P = 2 [kN]$, $\alpha = \pi/6 [rad]$, $l = 1 [m]$.



Rozwiązanie.

Układ współrzędnych zaczepimy na lewym swobodnym końcu belki. Równania równowagi płaskiego dowolnego układu sił działających na belkę mają postać:

$$1) \sum_i P_{ix} = R_{Bx} - P \cos \alpha = 0$$

$$2) \sum_i P_{iy} = R_A - 2ql + R_{By} - P \sin \alpha = 0$$

$$3) \sum_i M_{i(A)} = M - 2ql^2 + 2R_B l - 3Pl \sin \alpha = 0$$

Z równania (1) wynika, że:

$$R_{Bx} = P \cos \alpha = 1,73 \text{ [kN]}$$

Z kolei z równania momentów wyznaczamy:

$$R_B = \frac{-M + 2ql^2 + 3Pl \sin \alpha}{2l} = 1 \text{ [kN]}$$

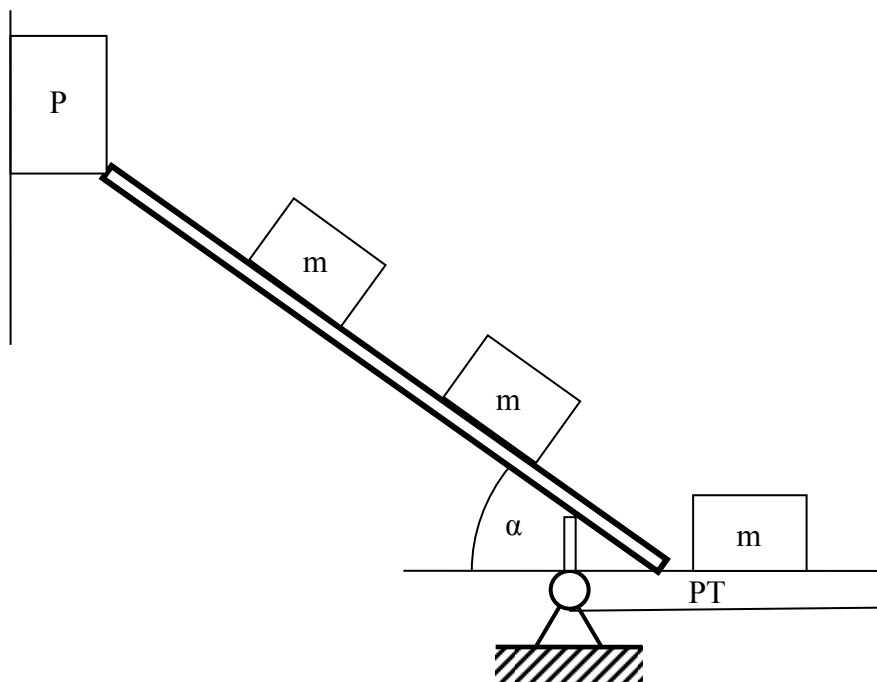
Podstawiając wartość R_B do równania (2) wyliczamy:

$$R_A = +2ql - R_{By} + P \sin \alpha = 2 \text{ [kN]}$$

Układy sił z tarciem

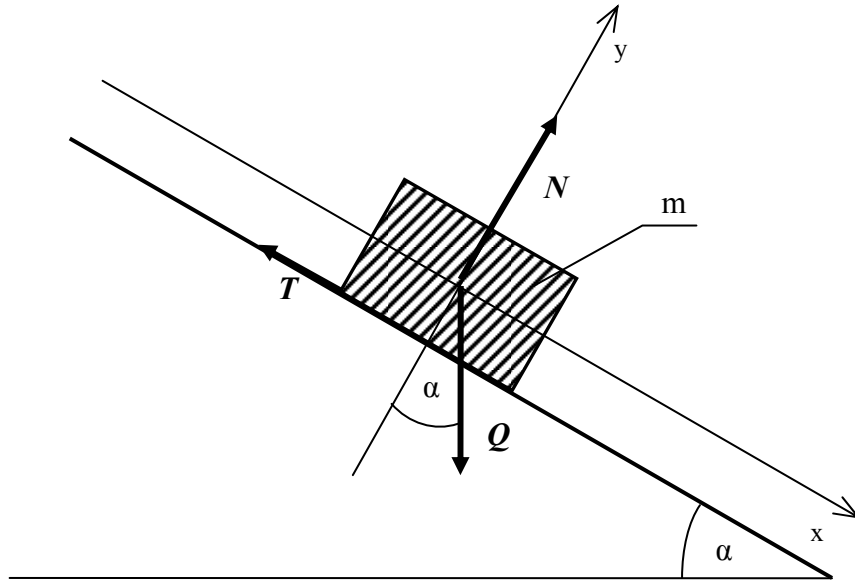
Przykład 6.

Pakowarka P wypycha produkty o masie m na równię pochyłą. Wiedząc, że współczynnik tarcia między produktem a równią wynosi μ wyznaczyć minimalną wartość kąta nachylenia równi do poziomu, by produkty zsuwały się na taśmę.



Rozwiązanie.

Wyznamy kąt graniczny α przy którym ciało o masie m pozostaje w stanie równowagi (nieruchome na równi). Układ współrzędnych zaczepimy w środku masy ciała z osią x równoległą do kierunku równi.



Warunki równowagi ciała na równi zapiszemy w postaci:

$$1) \sum_i P_{iy} = -Q \sin \alpha + N = 0$$

$$2) \sum_i P_{ix} = -T + Q \cos \alpha = 0$$

i uzupełnimy prawem tarcia

$$3) T = \mu N.$$

Wykorzystując (3) w równania (2) uzyskujemy układ dwóch równań:

$$\begin{cases} Q \sin \alpha = \mu N \\ Q \cos \alpha = N \end{cases}$$

które po podzieleniu stronami dają rezultat:

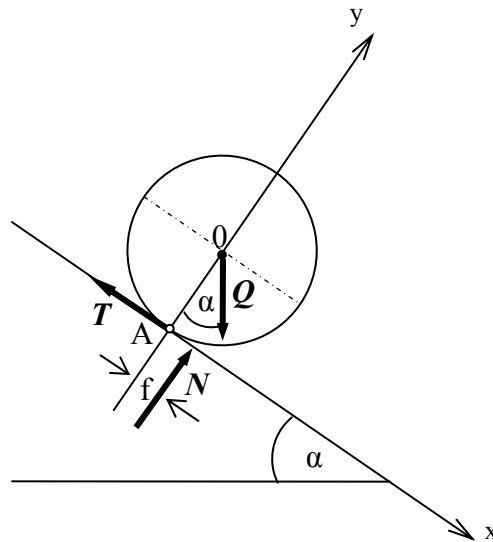
$$\operatorname{tg} \alpha = \mu$$

Kąt nachylenia równi α' zapewniający zsuwanie się produktów po równi musi spełniać warunek:

$$\alpha' > \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\mu).$$

Przykład 7.

Okrągły pręt o promieniu r cięty jest na automacie na wałeczki, które po odcięciu staczają się po równi pochyłej do pojemnika. Jaki winien być kąt α nachylenia równi do poziomu, by wałeczki pod działaniem swojego ciężaru staczały się do pojemnika, jeżeli współczynnik tarcia tocznego wynosi f .



Rozwiązanie.

Z warunku równowagi momentów względem chwilowego środka obrotu A :

$$1) Nf - Qr \sin \alpha = 0$$

Z kolei rzutując siły na oś y :

$$2) N - Q \cos \alpha = 0$$

Wyliczając z równania (2) wartość siły N :

$$N = Q \cos \alpha$$

i wstawiając do równania (1):

$$f - r \operatorname{tg} \alpha = 0$$

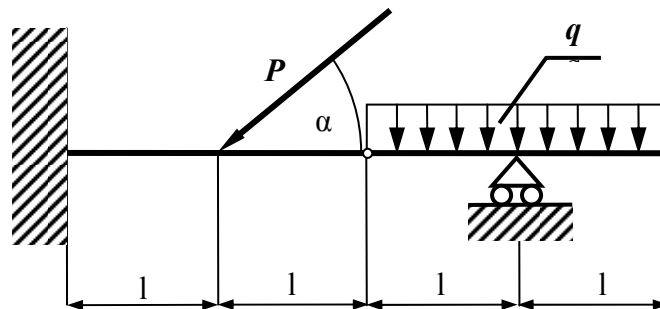
skąd wyznaczamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{r}$$

Kąt nachylenia równi winien być większy od $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{f}{r} \right)$.

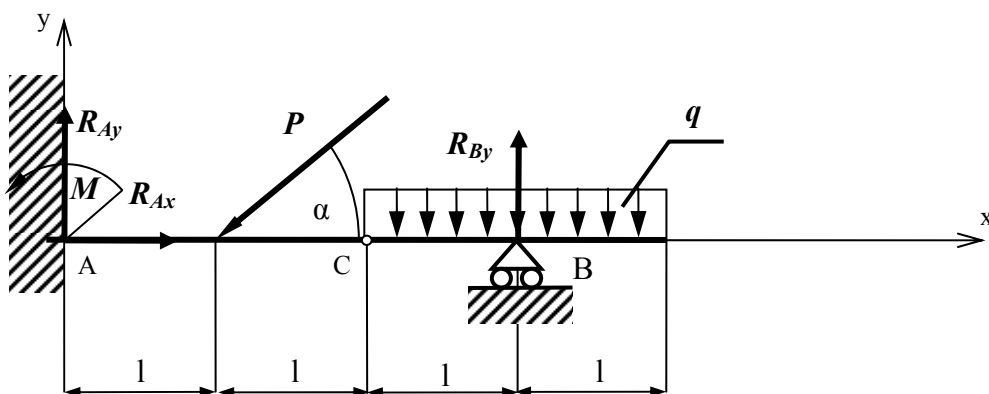
Belka z przegubem**Przykład 8.**

Belkę składającą się z dwóch części o jednakowej długości $2l$ połączonych przegubem pokazaną na rysunku obciążono siłą skupioną P i obciążeniem ciągłym o stałym natężeniu q . Obliczyć reakcje w utwierdzeniu i podporze, jeżeli siła $P = 2 [kN]$ jest przyłożona pod kątem $\alpha = \pi/6 [rad]$, obciążenie ciągłe ma wartość $q = 1 [kN/m]$, a długość $l = 1 [m]$.



Rozwiązanie.

Układ współrzędnych prostokątnych zaczepimy w punkcie A utwierdzenia belki w ścianie. Do wyznaczenia mamy cztery niewiadome: moment utwierdzenia M_A , składowe reakcji R_{Ax} i R_{Ay} , oraz wartość reakcji R_B podpory przesuwnej.



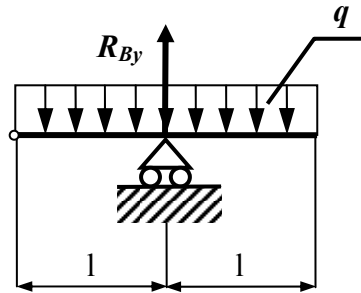
Zapišemy warunki równowagi dla całej belki:

$$1) \sum_i P_{ix} = R_{Ax} - P \cos \alpha = 0$$

$$2) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha - q \cdot 2l + R_B = 0$$

$$3) \sum_i M_{i(A)} = M_A - Pl \sin \alpha - 6ql^2 + R_B 3l = 0$$

Ponieważ w treści zadania nie wymagane jest obliczenie reakcji w przegubie, to po rozdzieleniu belki w przegubie równanie momentów dla prawej jej części zapiszemy względem przegubu C :



$$4) \sum_i M_{i(C)} = R_B l - 2ql^2 = 0.$$

Z równania (4) wyznaczmy wartość reakcji:

$$R_B = 2ql = 2 \text{ [kN]}$$

Z równania (1) wynika:

$$R_{Ax} = P \cos \alpha = 1,73 \text{ [kN]}.$$

Podstawiając wartość R_B do równań (2) i (3) wyliczamy:

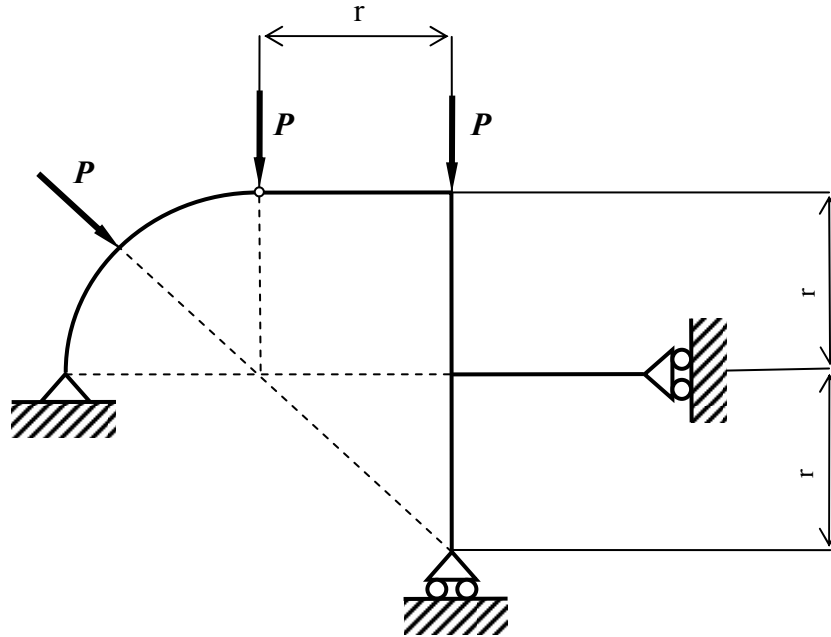
$$R_{Ay} = P \sin \alpha + 2ql - R_B = 1 \text{ [kN]}$$

oraz wartość momentu utwierdzenia:

$$M_A = Pl \sin \alpha + 6ql^2 - 3R_B l = 1 \text{ [kNm]}$$

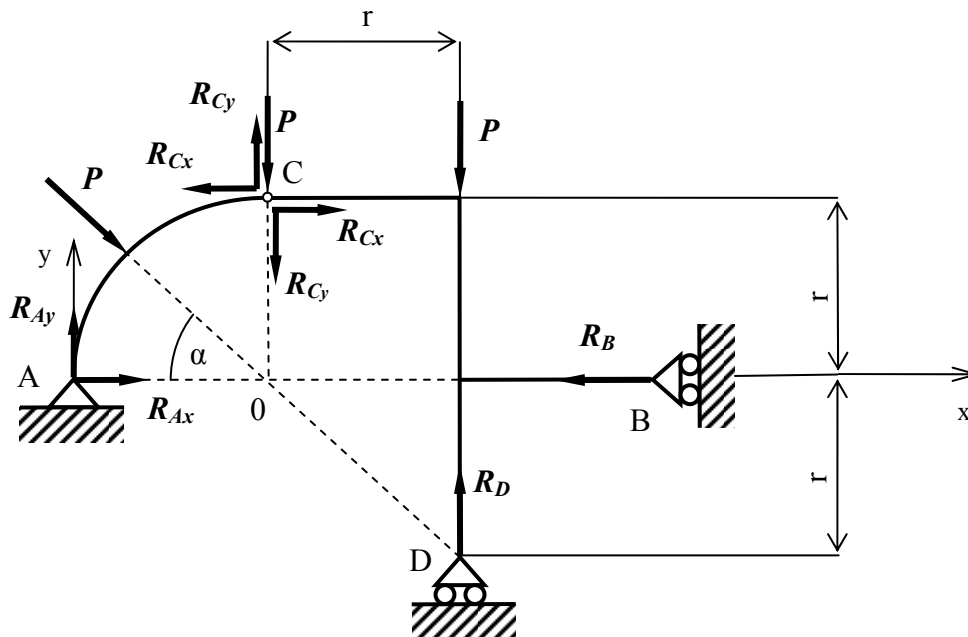
Przykład 9.

Rama stalowa składająca się z dwóch części połączonych przegubowo zamocowana na jednej podporze nieruchomej i dwóch przesuwnych jest zwymiarowana i obciążona jak na rysunku. Obliczyć reakcje podporowe i w przegubie, jeżeli $r = 1 \text{ [m]}$, a siła $P = 2 \text{ [kN]}$.



Rozwiązanie.

Układ współrzędnych prostokątnych zaczepimy w podporze nieruchomej A .

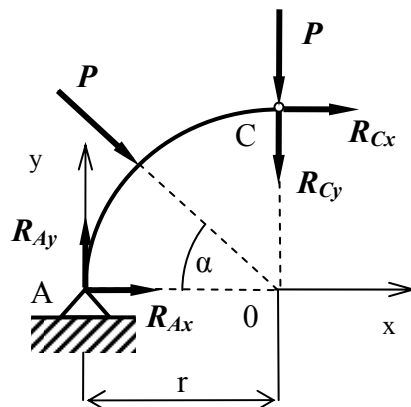


W podporze tej mamy niewiadome dwie składowe reakcji R_{Ax} i R_{Ay} . Podpory B i D są podporami ruchomymi, więc kierunek reakcji jest określony, natomiast wyznaczyć należy wartości R_B i R_D . Uwzględniając dwie niewiadome składowe reakcji w przegubie R_{Cx} i R_{Cy} mamy łącznie 6 niewiadomych, do których potrzebujemy tej samej ilości równań. W tym celu ramę należy rozdzielić w przegubie. Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami: zapisując równania równowagi dla poszczególnych części ramy lub równania równowagi dla całości ramy i dla jednej z jej części.

Sposób I.

Po rozdzieleniu ramy w przegubie C i zastępujemy oddziaływanie na siebie poszczególnych części ramy składowymi reakcji R_{Cx} i R_{Cy} . Siłę P działającą na przegub pozostawiamy na lewej części ramy. Kąt $\alpha = \pi/4$, co wynika z wymiarów geometrycznych ramy. Otrzymujemy następujące warunki równowagi:

- dla części lewej



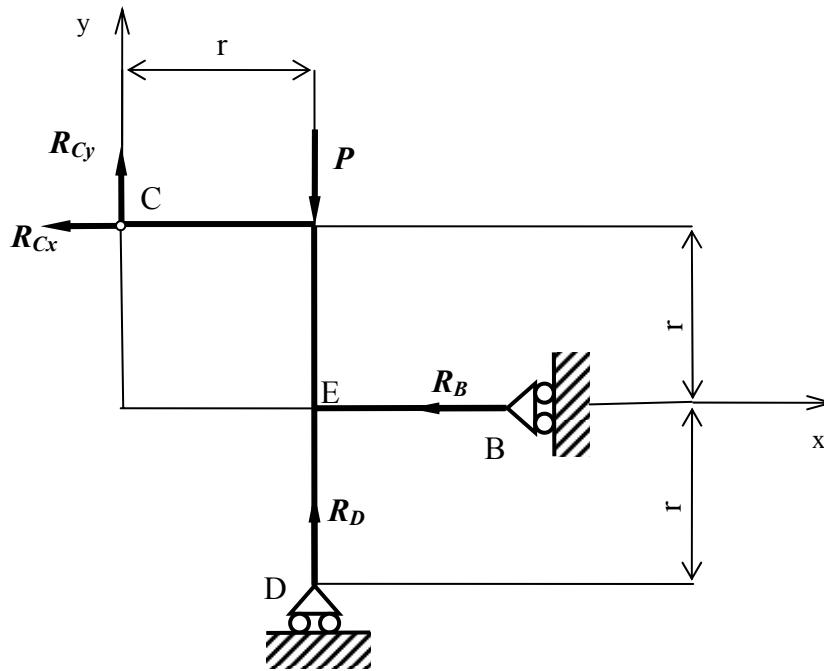
$$1) \sum_i P_{ix} = R_{Ax} + P \cos \alpha + R_{Cx} = 0$$

$$2) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha - P - R_{Cy} = 0$$

Równanie momentów zapiszemy względem punktu O :

$$3) \sum_i M_{i(O)} = -R_{Ay}r - R_{Cx}r = 0$$

- dla prawej części:



$$4) \sum_i P_{ix} = -R_{Cx} - R_B = 0$$

$$5) \sum_i P_{iy} = R_{Cy} - P + R_D = 0$$

$$6) \sum_i M_{i(E)} = -R_{Cy}r + R_{Cx}r = 0$$

Z równania (6) wynika, że:

$$R_{Cx} = R_{Cy}$$

Do równania (3) w miejsce R_{Cx} wstawiamy R_{Cy} otrzymując:

$$-R_{Cy} = R_{Ay}$$

którą to zależność wykorzystujemy w równaniu (2):

$$R_{Ay} - P \sin \alpha - P + R_{Ay} = 0$$

stąd

$$R_{Ay} = \frac{P \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right)}{2} = 1,7 \text{ [kN]}$$

$$R_{Cx} = R_{Cy} = -R_{Ay} = -1,7 \text{ [kN]}$$

Z równania (1) wyliczamy:

$$R_{Ax} = -R_{Cx} - P \cos \alpha = 1,7 - 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3 \text{ [kN]}$$

Z równania (4) wynika:

$$R_B = -R_{Cx} = 1,7 \text{ [kN]}$$

natomiast z równania (5):

$$R_D = -R_{Cy} + P = 3,7 \text{ [kN]}$$

Sposób II.

Zapisujemy równania równowagi dla całej ramy:

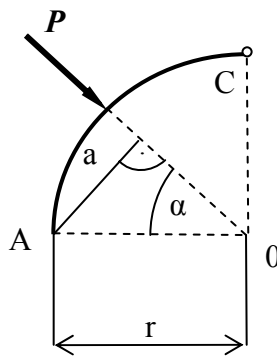
$$1) \sum_i P_{ix} = R_{Ax} + P \cos \alpha - R_B = 0$$

$$2) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha - P - P + R_D = 0$$

Równanie momentów zapiszemy względem punktu A :

$$3) \sum_i M_{i(A)} = -Pa - Pr - P(2r) + R_D(2r) = 0,$$

gdzie:



$$a = r \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} r, \text{ stąd}$$

$$3) \sum_i M_{i(A)} = -P \frac{\sqrt{2}}{2} r - Pr - P(2r) + R_D(2r) = 0,$$

oraz równania równowagi dla jednej z części – prawej:

$$4) \sum_i P_{ix} = -R_{Cx} - R_B = 0$$

$$5) \sum_i P_{iy} = R_{Cy} - P + R_D = 0$$

$$6) \sum_i M_{i(E)} = -R_{Cy}r + R_{Cx}r = 0$$

Z równania (3) wyliczamy:

$$R_D = \frac{P \frac{\sqrt{2}}{2} + P + 2P}{2} = 3,7 [kN]$$

Wstawiając wartość R_D do równania (2) otrzymujemy:

$$R_{Ay} = P \sin \alpha + P + P - R_D = 1,7 [kN]$$

Z kolei z równania (5) mamy:

$$R_{Cy} = P - R_D = -1,7 [kN]$$

Zgodnie z równaniem (6)

$$R_{Cx} = R_{Cz} = -1,7 [kN]$$

Z równania (4) wynika:

$$R_B = -R_{Cx} = 1,7 [kN]$$

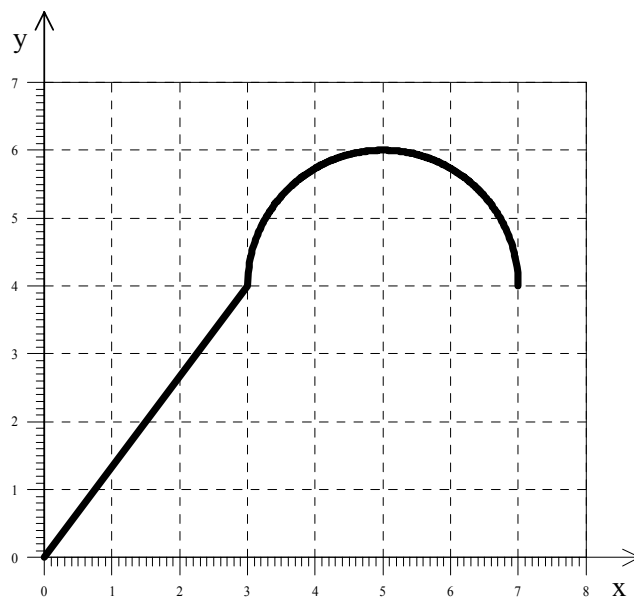
a z równania (1)

$$R_{Ax} = R_B - P \cos \alpha = 0,3 [kN]$$

Środki masy

Przykład 10.

Wyznaczyć środek masy pręta stalowego składającego się z prostoliniowego odcinka o długości $l = 5 [cm]$ połączonego z półokręgiem o promieniu $r = 2 [cm]$, jak pokazano na rysunku.



Rozwiązanie.

Współrzędne środka masy pręta wyznaczymy korzystając z wzorów na współrzędne środka masy linii:

$$x_c = \frac{\sum_i^n x_i l_i}{\sum_i^n l_i} \qquad y_c = \frac{\sum_i^n y_i l_i}{\sum_i^n l_i}$$

Pręt składa się z dwóch części: odcinka i półokręgu, stąd powyższe wzory przyjmą postać:

$$x_c = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2}{l_1 + l_2}$$

$$y_c = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2}{l_1 + l_2}$$

gdzie: x_1, y_1, l_1 są współrzędnymi środka masy i długością odcinka prostoliniowego pręta, a x_2, y_2, l_2 - półokręgu.

Określimy powyższe wielkości dla:

- odcinka prostego:

$$x_1 = 1,5 [cm] \quad y_1 = 2 [cm]$$

długość podana jest w treści zadania i wynosi: $l_1 = 5 [cm]$.

- dla półokręgu

$$x_2 = 5 [cm] \qquad y_2 = 4 + \frac{2r}{\pi} = 5,27 [cm]$$

natomiast jego długość:

$$l_2 = \pi r = 6,28 [cm]$$

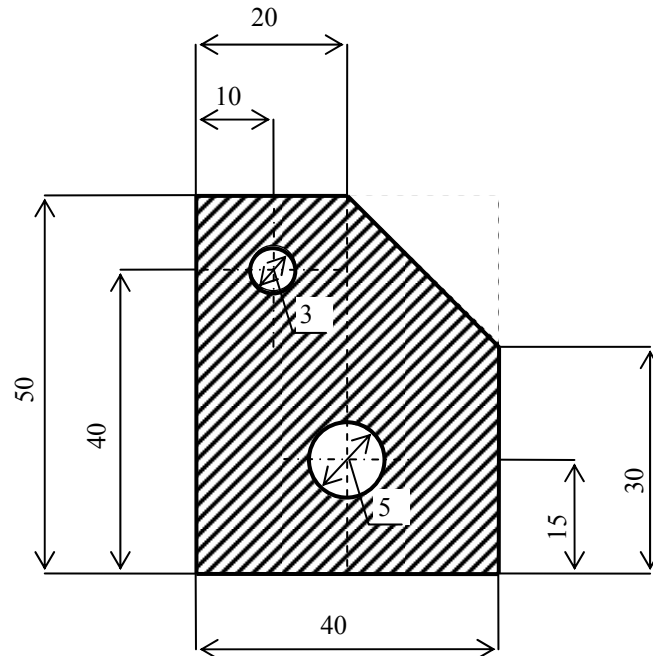
Podstawiając do wcześniej określonych wzorów:

$$x_c = \frac{x_1 l_1 + x_2 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1,5 \cdot 5 + 5 \cdot 6,28}{5 + 6,28} = 3,45 [cm]$$

$$y_c = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{2 \cdot 5 + 5,27 \cdot 6,28}{5 + 6,28} = 3,82 [cm]$$

Przykład 11.

Chwytek elektromagnetyczny robota przemysłowego przenosi pomiędzy płaskimi stołami centrów obróbkowych stalową płytę o wymiarach w podanych w centymetrach, jak na rysunku. W którym miejscu płyty powinien być przyłożony chwytek, by płyta podczas transportu znajdowała się w położeniu poziomym.

**Rozwiązanie.**

Płyta podczas przenoszenia będzie znajdowała się w położeniu równowagi poziomej, jeżeli chwytek zostanie przyłożony w jej środku masy. W celu wyznaczenia współrzędnych tego środka, rozważaną figurę płaską potraktujemy jako prostokąt (1) o wymiarach 40×50 o ściętym narożu (2) z wydrążonymi otworami (3) i (4).

Wzory ogólne na współrzędne środka masy w układzie płaskim mają postać:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Określimy pola i współrzędne środków masy figur, które wyodrębniliśmy w płycie.

1) prostokąt:

$$A_1 = 40 \cdot 50 = 2000 [cm^2], \quad x_1 = 20 [cm], \quad y_1 = 25 [cm];$$

2) trójkąt:

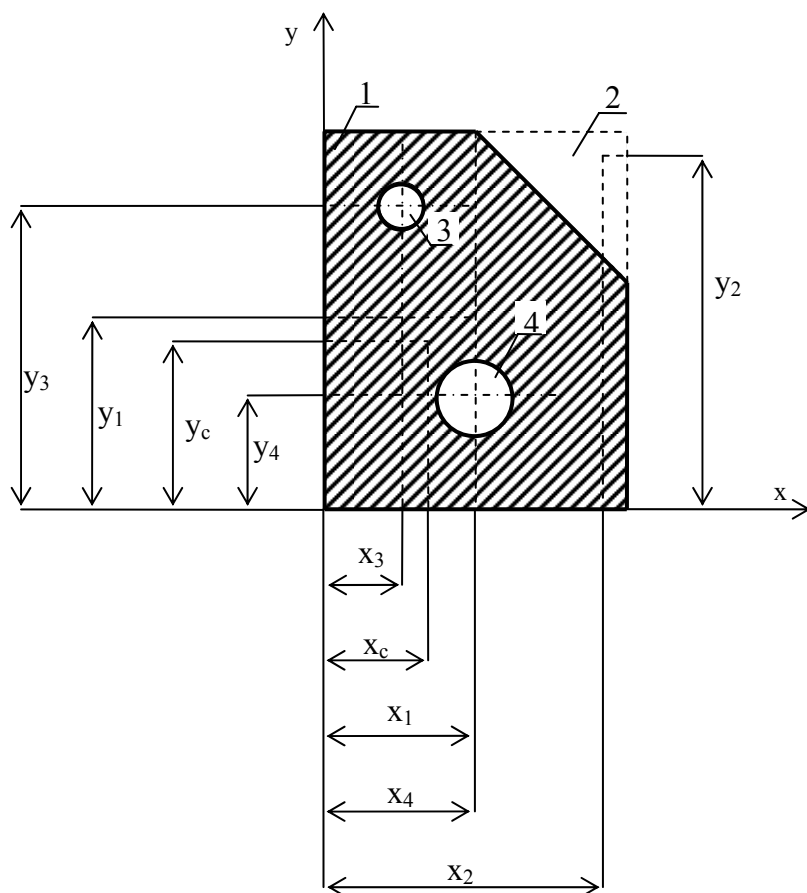
$$A_2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 20 = 200 [cm^2], \quad x_2 = 40 - \frac{1}{3} 20 = 33,33 [cm], \quad y_2 = 50 - \frac{1}{3} 20 = 43,33 [cm];$$

3) koło o średnicy 3 [cm]:

$$A_3 = \frac{\pi d_3^2}{4} = 7,07 [cm^2], \quad x_3 = 10 [cm], \quad y_3 = 40 [cm];$$

4) koło o średnicy 5 [cm]:

$$A_4 = \frac{\pi d_4^2}{4} = 19,63 [cm^2], \quad x_4 = 20 [cm], \quad y_4 = 15 [cm];$$



Pole powierzchni rozważanej płyty wynosi:

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i = A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = 1773,3 [cm^2].$$

Wówczas możemy zapisać:

$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2 - A_3 x_3 - A_4 x_4}{A}$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3 - A_4 y_4}{A}$$

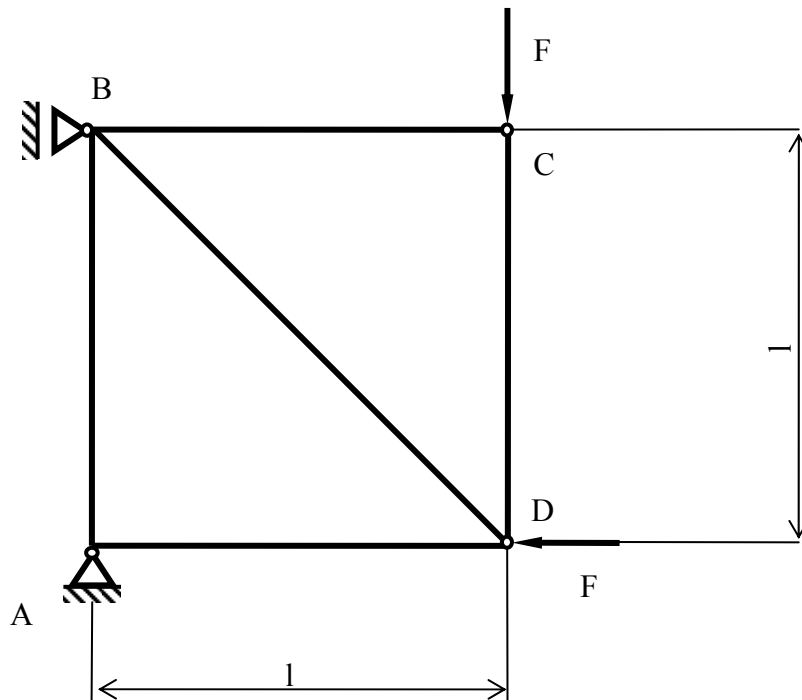
Po podstawieniu wcześniej obliczonych wartości otrzymujemy:

$$x_C = 18,53 [cm], y_C = 22,98 [cm]$$

Kratownice

Przykład 12.

Kratownicę zamocowaną przegubowo na podporze nieruchomej w węźle A i podporze ruchomej w węźle B , zwymiarowaną jak na rysunku, obciążoną w węzłach C i D siłami $F = 5 [kN]$ rozwiązać metodą analitycznego równoważenia węzłów.



Rozwiązanie.

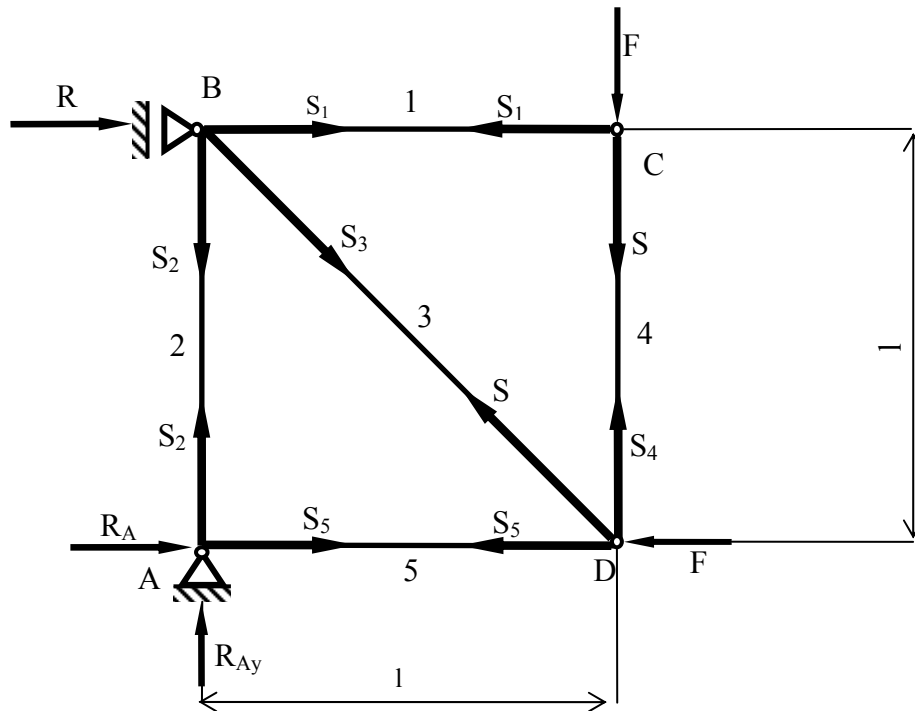
Przed przystąpieniem do wyznaczania sił wewnętrznych w prętach kratownicy sprawdzamy warunek statycznej wyznaczalności kratownicy:

$$p = 2w - 3$$

gdzie p - liczba prętów, w - liczba węzłów.

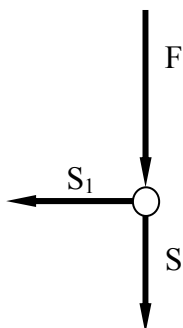
$$5 = 2 \cdot 4 - 3 \text{ - kratownica jest statycznie wyznaczalna.}$$

W celu wyznaczenie sił wewnętrznych w prętach kratownicy wytniemy myślowo (oswobodzimy z więzów) węzły kratownicy. Oddziaływanie podpór zastąpimy siłami R_{Ax} , R_{Ay} i R_B . Z kolei oddziaływanie prętów zastępujemy siłami $S_1 - S_5$, przy czym przyjmujemy, że siły te działają „od węzła” (ze znakiem +) czyli rozciągają pręty. Zwrot rzeczywistej siły wynika z obliczonej wartości siły w pręcie. Wartość dodatnia wskazuje na prawidłowo założony znak, wartość ujemna mówi, że przyjęty znak jest w rzeczywistości przeciwny. Ponieważ, w kratownicy mamy cztery węzły, więc uzyskamy osiem równań równowagi, które pozwolą na wyznaczenie niewiadomych wartości (trzech reakcji i pięciu sił w prętach).



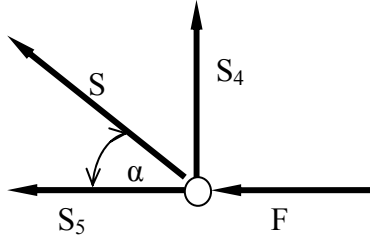
Rozwiązywanie zaczyna się od węzła, w którym schodzą się dwie niewiadome siły wewnętrznych.

Warunki równowagi węzła C :



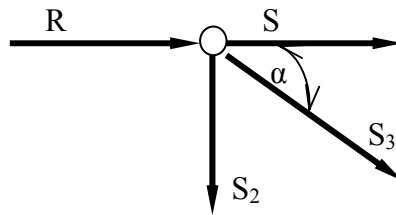
$$\begin{cases} \sum_i P_{ix} = -S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0 \\ \sum_i P_{iy} = -F - S_4 = 0 \Rightarrow S_4 = -F = -5 [kN] \end{cases}$$

Warunki równowagi węzła D:



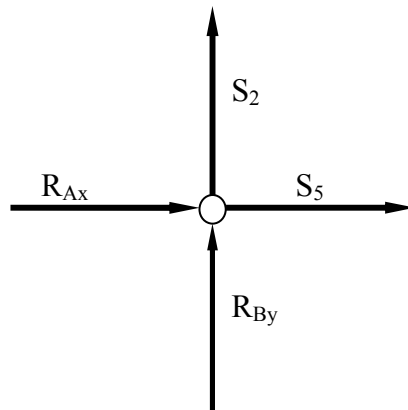
$$\begin{cases} \sum_i P_{iy} = S_4 + S_3 \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_3 = -\frac{S_4}{\sin \alpha} = \frac{2F}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} [kN] \\ \sum_i P_{ix} = -S_5 - S_3 \cos \alpha - F = 0 \Rightarrow S_5 = -S_3 \cos \alpha - F = -\sqrt{2}F \frac{\sqrt{2}}{2} - F = -2F = -10 [kN] \end{cases}$$

Warunki równowagi węzła B



$$\begin{cases} \sum_i P_{ix} = R_B + S_1 + S_3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_B = -S_1 - S_3 \cos \alpha = -F = -5 [kN] \\ \sum_i P_{iy} = -S_2 - S_3 \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_2 = -S_3 \sin \alpha = -\sqrt{2}F \frac{\sqrt{2}}{2} = -F = -5 [kN] \end{cases}$$

Warunki równowagi węzła A



$$\begin{cases} \sum_i P_{ix} = R_{Ax} + S_5 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -S_5 = 10 [kN] \\ \sum_i P_{iy} = R_{Ay} + S_2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -S_2 = F = 5 [kN] \end{cases}$$

Wyniki obliczeń zestawiamy w tabeli:

Siła	Wartość [kN]	Obciążenie pręta
S_1	0	zerowy
S_2	-5	ściskany
S_3	$5\sqrt{2}$	rozciągany
S_4	-5	ściskany
S_5	-10	ściskany
R_{Ax}	10	rozciągany
R_{Ay}	5	rozciągany
R_B	-5	ściskany

Korzystając z warunków zewnętrznej statycznej równowagi (warunków równowagi układu sił zewnętrznych działających na kratownicę) obliczamy ponownie wartości reakcji podporowych:

$$1) \sum_i P_{ix} = R_{Ax} + R_B - F = 0$$

$$2) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} - F = 0$$

$$3) \sum_i M_{i(A)} = -R_B l - F l = 0$$

Z równania (3) wyznaczamy

$$R_B = -F = -5 [kN]$$

z (2)

$$R_{Ay} = F = 5 [kN]$$

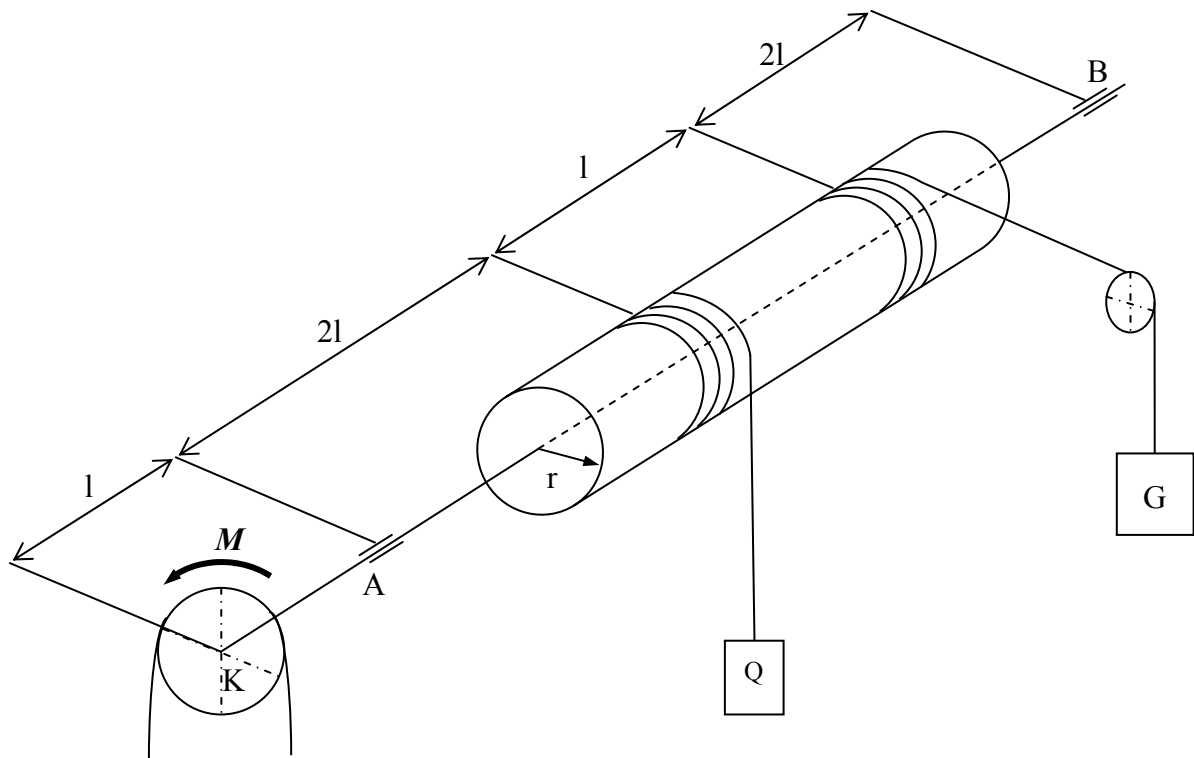
i z (1)

$$R_{Ax} = 10 [kN]$$

co potwierdza poprawność rozwiązania układu równań równowagi węzłów.

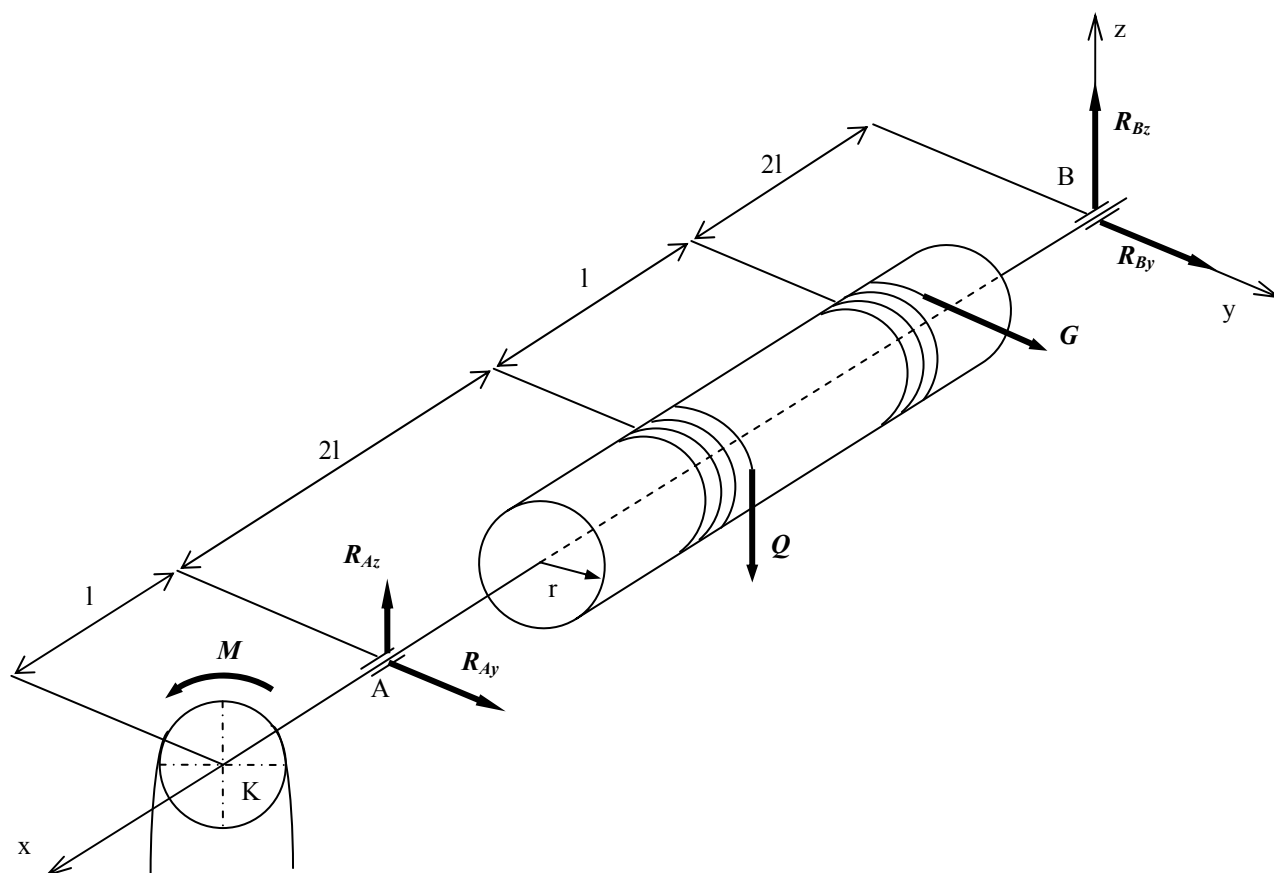
Dowolny przestrzenny układ sił**Przykład 13.**

Stalowy wał o promieniu r zamocowany w łożyskach A i B oddalonych od siebie od $5l$ służy do podnoszenia ciężarów Q i G . Ciężar G zawieszony jest na linie, która przesuwają się przez gładki krążek C i poziomo nawijana jest na wał. Lina, na której zawieszony jest ciężar Q zwisa pionowo z wału. Jaki moment powinien być przyłożony do koła napędowego K oddalonego o l od łożyska A i zamocowanego po przeciwnej stronie niż wał, by układ pozostał w równowadze i jakie wówczas wystąpią reakcje w łożyskach, jeżeli $l = 1[m]$ i $R = 0,2[m]$, a obciążenie wynosi: $G = 1[kN]$ i $Q = 2[kN]$.

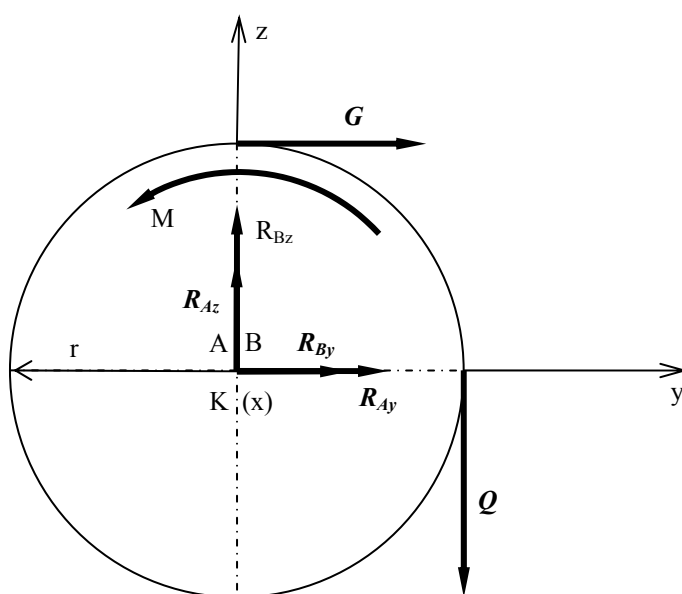


Rozwiązanie.

Do wyznaczenia mamy pięć niewiadomych. Po dwie składowe reakcje w łożyskach A i B oraz wartość momentu M .

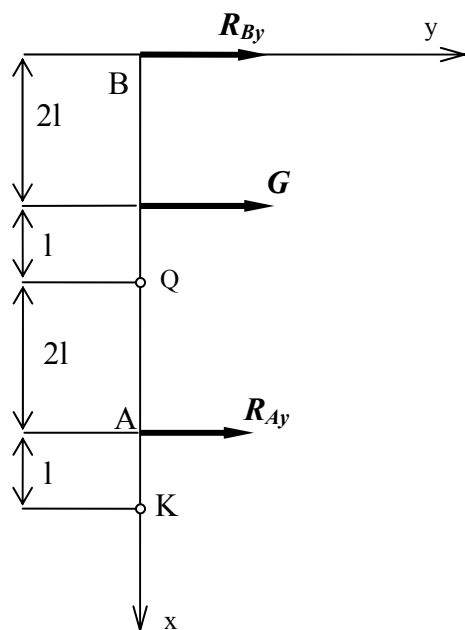


Wartość momentu M wyznaczmy bezpośrednio z równania momentów względem osi x :



$$1) \sum_i M_{i(x)} = M - Gr - Qr = 0 \Rightarrow M = \frac{G+Q}{r}$$

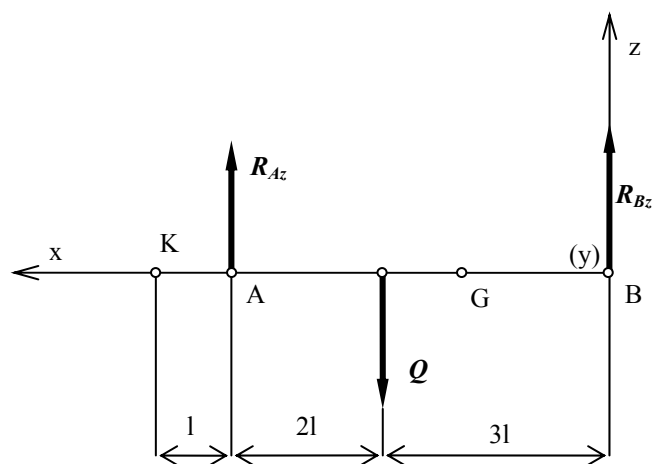
Wartości składowych reakcji w łożyskach wyznaczmy rozwiązując układ równań rzutów sił na osie y i z oraz momentów względem tych osi.



$$2) \sum_i M_{i(z)} = G2l + R_{Ay}5l = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -\frac{2}{5}G$$

$$3) \sum_i P_{iy} = R_{By} + G + R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{By} = -\frac{3}{5}G$$

$$4) \sum_i M_{i(y)} = Q3l - R_{Az}5l = 0 \Rightarrow R_{Az} = \frac{3}{5}Q$$



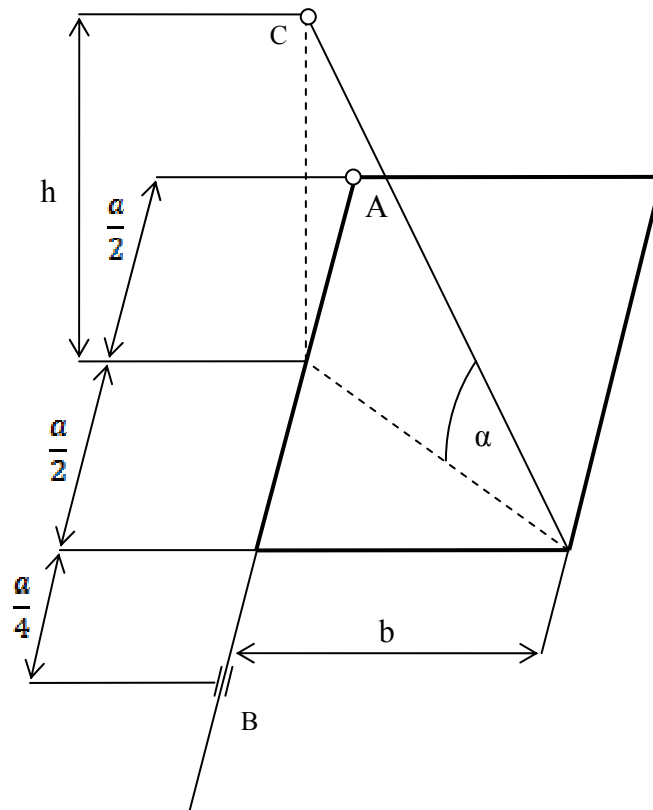
$$5) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} - Q + R_{By} = 0 \Rightarrow R_{By} = \frac{2}{5}Q$$

Podstawiając wartości do otrzymanych rozwiązań obliczamy:

$$M = 15 [kNm], R_{Ay} = -0,2 [kN], R_{Az} = 1,2 [kN], R_{By} = -0,6 [kN], R_{Bz} = 0,8 [kN].$$

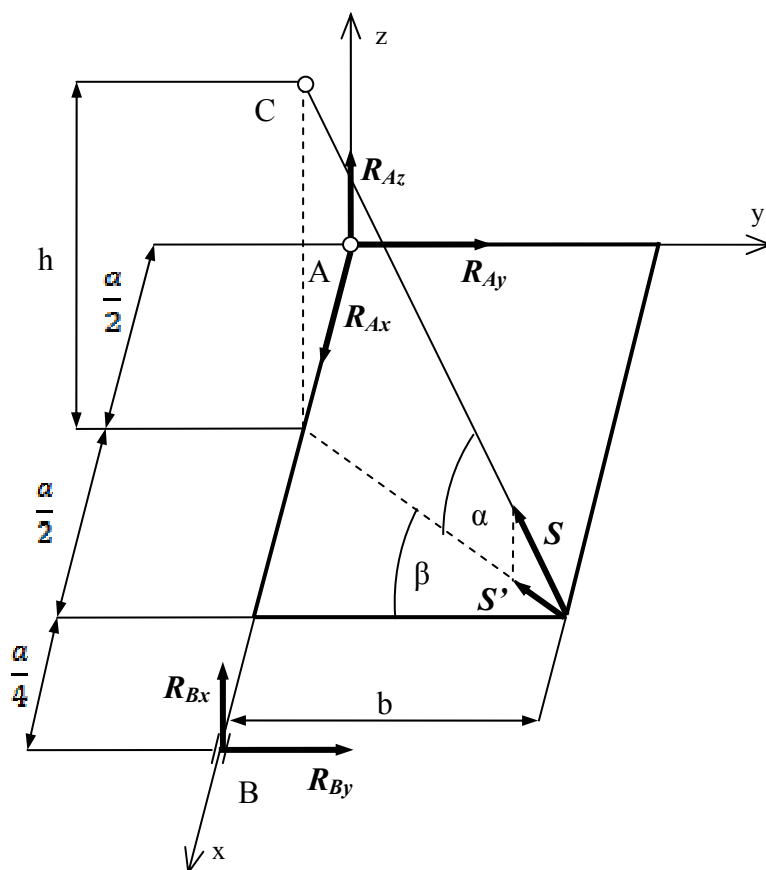
Przykład 14.

Płytę stalową prostokątną o wymiarach $a \times b$ i ciężarze G zamocowano w przegubach kulistym A i walcowym B oraz za pomocą cięgna do ściany na wysokości h do płaszczyzny płyty znajdującej się w poziomie, jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć reakcje w przegubach i siłę w cięgnię, jeżeli wartość siły $G = 10 [kN]$, $a = 6 [m]$, $b = 4 [m]$, $h = 3,317 [m]$.



Rozwiązanie.

W układzie występuje siła czynna ciężaru G płyty oraz siły bierne reakcji w przegubach kulistym R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} oraz walcowym R_{By} , R_{Bz} oraz siła napięcia cięgna S .



W celu wyznaczenia sześciu niewiadomych sformułujemy warunki równowagi dowolnego przestrzennego układu sił. Rzutując siły na oś z :

$$1) \sum_i P_{iz} = R_{Az} + R_{Bz} - G + S \sin \alpha = 0$$

Przed zapisaniem równań rzutów sił na pozostałe dwie osie określamy rzut siły S na płaszczyznę (x, y) :

$$S' = S \cos \alpha$$

wówczas

$$2) \sum_i P_{ix} = R_{Ax} - S \cos \alpha \sin \beta = 0$$

$$3) \sum_i P_{iy} = R_{Ay} + R_{By} - S \cos \alpha \cos \beta = 0$$

Ponieważ:

$$ED = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$CD = \sqrt{h^2 + (ED)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4} + b^2}$$

to

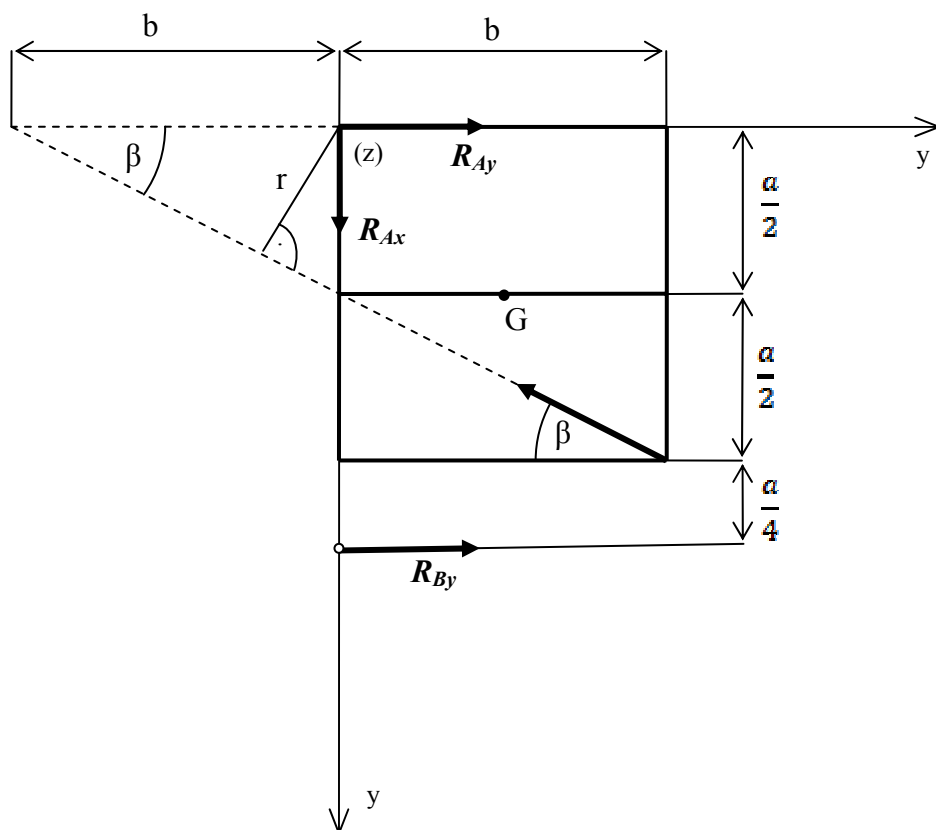
$$\sin \beta = \frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{h^2 + \frac{a^2}{4} + b^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}}{h^2 + \frac{a^2}{4} + b^2}$$

Równanie momentów względem osi (z) sformułujemy posługując się schematem



Wartość momentu siły S względem osi z obliczamy mnożąc wartość S' jej rzutu na płaszczyznę (x, y) przez ramię

$$r = b \sin \beta$$

wtedy

$$4) \sum_i M_{i(z)} = R_{By} \frac{5}{4} a - Sb \cos \alpha \sin \beta = 0$$

Względem osi (x) równanie momentów przyjmie postać:

$$5) \sum_i M_{i(x)} = Sb \sin \alpha - G \frac{b}{2} = 0$$

a względem osi (y) :

$$6) \sum_i M_{i(y)} = G \frac{a}{2} - R_{Bz} \frac{5}{4} a - Sa \cos \alpha = 0$$

Podstawiając wartości liczbowe do wcześniej określonych wzorów na wartości funkcji trygonometrycznych otrzymujemy:

$$ED = 5 [m], CD = 6 [m], \sin \beta = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{4}{5}, \sin \alpha = 0,553, \cos \alpha = \frac{5}{6}$$

Z równania (5) wyliczamy:

$$S = \frac{G}{2 \sin \alpha} = 9,04 [kN]$$

Wstawiając obliczoną wartość siły S do równań (4) i (6) obliczamy:

$$R_{By} = S \frac{b}{a} \frac{4}{5} \cos \alpha \sin \beta = 2,41 [kN]$$

$$R_{Bz} = \frac{4}{5} \left(\frac{G}{2} - S \cos \alpha \right) = -2,03 [kN]$$

Z równań (1), (2) i (3) wyliczamy składowe reakcji R_A :

$$R_{Az} = -R_{Bz} + G - S \sin \alpha = 7,21 [kN]$$

$$R_{Ax} = S \cos \alpha \sin \beta = 4,52 [kN]$$

$$R_{Ay} = -R_{By} + S \cos \alpha \cos \beta = 3,62 [kN]$$

KINEMATYKA***Równania ruchu i toru, prędkość i przyspieszenie punktu materialnego*****Przykład 15.**

Punkt porusza się zgodnie z równaniami ruchu:

$$1) \ y = t^2 + 2t + 1$$

$$2) \ x = \frac{t}{2}$$

Określić równanie toru punktu i obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu w czasie $t_1 = 1[s]$.

Rozwiązanie.

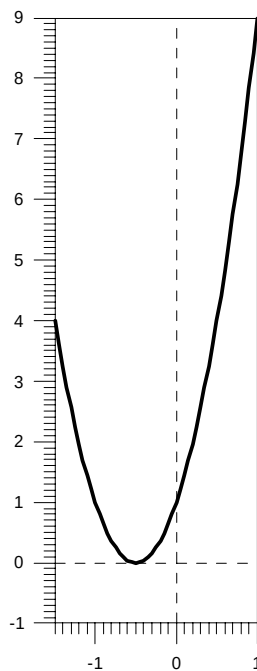
Równanie toru wyznaczmy rugując z równań ruchu zmianę czasu t . Wstawiając do równania (1) wartość t wyliczoną z równania (2):

$$t = 2x$$

otrzymujemy:

$$y = 4x^2 + 2x + 1.$$

Torem punktu jest parabola :



Prędkość i przyspieszenie obliczymy różniczkując po czasie równania ruchu:

$$V_y = \dot{y} = 2t + 2,$$

$$V_x = \dot{x} = \frac{1}{2}$$

Stąd prędkość punktu w czasie $t_1 = 1[s]$:

$$V_x(t_1) = \frac{1}{2} [m/s]$$

$$V_y(t_2) = 2t_1 + 2 = 4 [m/s]$$

$$V(t_1) = \sqrt{(V_x(t_1))^2 + (V_y(t_1))^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = 2,12 [m/s]$$

Obliczamy przyspieszenie:

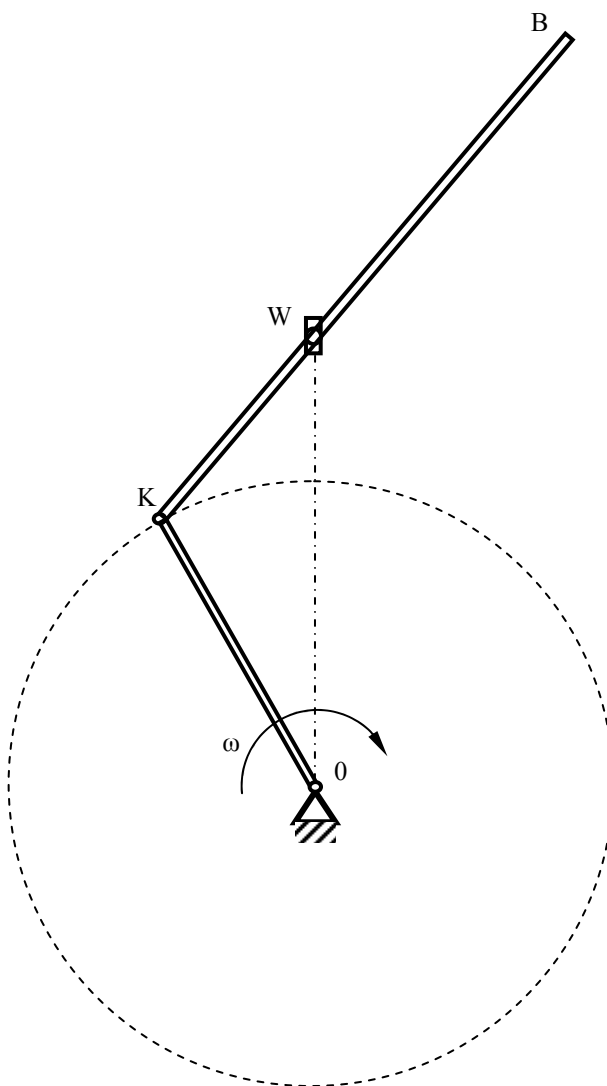
$$a_y = \ddot{y} = 2$$

$$a_x = 0$$

stąd przyspieszenie w trakcie ruchu ma wartość niezmienną $a = 2 [m/s^2]$.

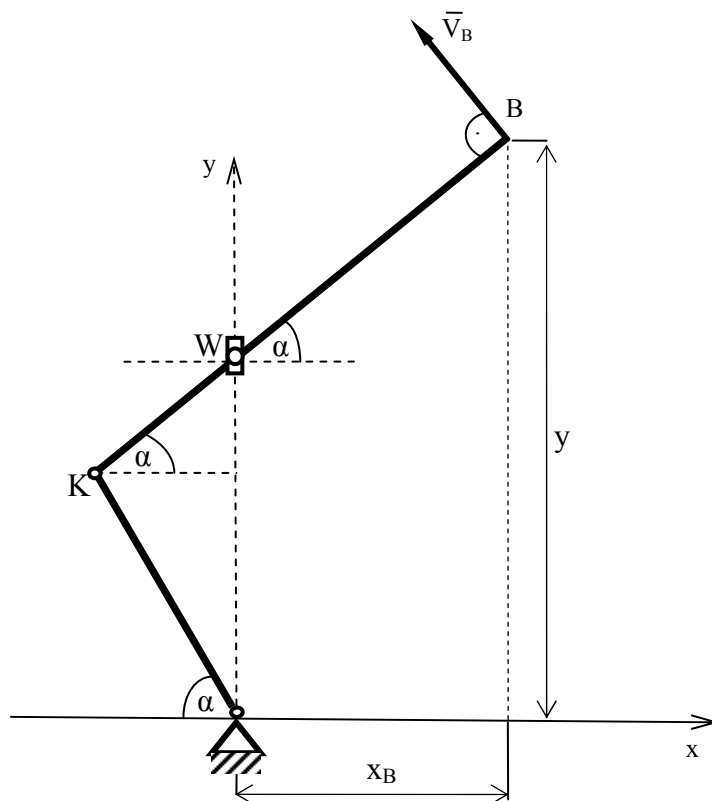
Przykład 16.

Korba OK obraca się dookoła łożyska O ze stałą prędkością kątową $\omega = \pi/6 [\text{rad/s}]$ i uruchamia pręt KB . Wodzik W porusza się po osi pionowej, której kierunek przechodzi przez punkt O . Wyznaczyć równania ruchu punktu B oraz jego prędkość i przyspieszenie w czasie $t_1 = 2 [\text{s}]$, jeżeli w chwili początkowej koniec korby K znajdował się w lewym skrajnym położeniu. Wymiary: $OK = KW = KB/3 = 0,2 [\text{m}]$.



Rozwiązanie.

Do wyznaczenia równań ruchu posłużymy się schematem:



Po rozpoczęciu ruchu obrotowego korba OB po czasie t obróci się o kąt:

$$\alpha = \omega t$$

Wówczas kąt (CKW) również wynosi α , a położenie punktu B w układzie współrzędnych określimy następująco:

$$x_B = WB \cos \alpha$$

$$y_B = OK \sin \alpha + KB \sin \alpha$$

Przyjmując $OK = a$, $WB = 2a$, $KB = 3a$, gdzie $a = 0,2 [m]$ otrzymujemy:

$$x_B = 2a \cos \alpha$$

$$y_B = 4a \sin \alpha$$

czyli równania ruchu punktu postaci:

$$x_B = 2a \cos(\omega t)$$

$$y_B = 4a \sin(\omega t)$$

lub w postaci wektorowej

$$\mathbf{r} = [2a \cos(\omega t)]\mathbf{i} + [4a \sin(\omega t)]\mathbf{j}$$

gdzie i oraz j są wersorami kierunkowymi osi układu współrzędnych odpowiednio x i y . Rzuty wektora prędkości określimy różniczkując po czasie współrzędne punktu B :

$$\dot{x}_B = -2\omega a \sin(\omega t)$$

$$\dot{y}_B = 4\omega a \cos(\omega t)$$

a rzuty wektora przyspieszenia:

$$\ddot{x}_B = -2\omega^2 a \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y}_B = -4\omega^2 a \sin(\omega t)$$

Stąd prędkość punktu B w czasie $t_1 = 2$ [s]:

$$\begin{aligned} V_B(t_1) &= \sqrt{(\dot{x}_B(t_1))^2 + (\dot{y}_B(t_1))^2} = \sqrt{(-2\omega a \sin(\omega t))^2 + (4\omega a \cos(\omega t))^2} = \\ &= \omega \sqrt{4a \sin^2(\omega t) + 16a \cos^2(\omega t)} = \frac{\pi}{6} \sqrt{4 \cdot 0,2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{6} 2\right) + 16 \cdot 0,2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{6} 2\right)} = \\ &= \frac{\pi}{6} \sqrt{0,8 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5,2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi}{6} \sqrt{0,8 \cdot \frac{3}{4} + 5,2 \cdot \frac{1}{4}} = 0,72 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

natomiast przyspieszenie:

$$\begin{aligned} a_B(t_1) &= \sqrt{(\ddot{x}_B(t_1))^2 + (\ddot{y}_B(t_1))^2} = \sqrt{(-2\omega^2 a \cos(\omega t))^2 + (-4\omega^2 a \sin(\omega t))^2} = \\ &= \omega^2 \sqrt{4a \cos^2(\omega t) + 16a \sin^2(\omega t)} = \frac{\pi^2}{36} \sqrt{4 \cdot 0,2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{6} 2\right) + 16 \cdot 0,2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{6} 2\right)} = \\ &= \frac{\pi^2}{36} \sqrt{0,8 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5,2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi^2}{36} \sqrt{0,8 \cdot \frac{1}{4} + 5,2 \cdot \frac{3}{4}} = 1,12 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

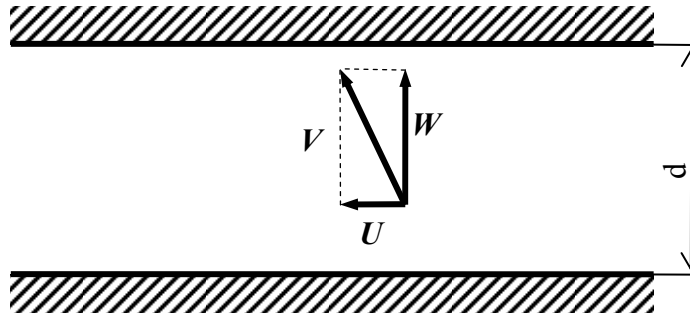
Ruch złożony punktu materialnego

Przykład 17.

Nurt rzeki o szerokości $d = 15$ [m] ma prędkością $u = 0,5$ [m/s]. Pod jaki katem w stosunku do brzegu powinien płynąć pływak z prędkością $w = 1$ [m/s], by poruszać się prostopadłe do brzegu. Jaka będzie prędkość pływaka względem nieruchomego obserwatora stojącego w miejscu, gdzie pływak rozpoczął przeprawę. Po jakim czasie pływak osiągnie przeciwny brzeg. O ile metrów przesunie się z biegiem rzeki punkt osiągnięcia przeciwnego brzegu, jeżeli pływak będzie płynął prostopadłe do nurtu i ile wtedy będzie trwała przeprawa.

Rozwiązanie.

Rozważymy najpierw przypadek, gdy pływak będzie płynął prostopadłe do brzegu (pod kątem względem nurtu rzeki).



Kąt, pod jakim pływak powinien płynąć w stosunku do nurtu rzeki wyznaczymy z zależności trygonometrycznej:

$$\cos \alpha = \frac{u}{w} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

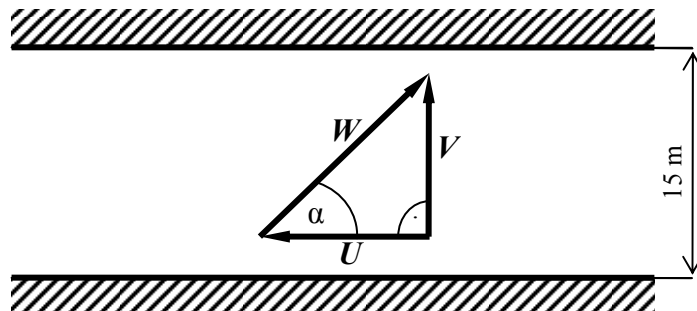
Podobnie wyznaczymy prędkość względem nieruchomego obserwatora na brzegu rzeki:

$$\frac{V}{w} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 [m/s]$$

Stąd wyznaczymy czas, jaki potrzebny jest pływakowi do osiągnięcia przeciwnego brzegu rzeki:

$$t = \frac{d}{V} = \frac{15}{0,866} = 17,32 [s].$$

W drugim przypadku:



pływak osiągnie drugi brzeg po czasie:

$$t = \frac{d}{w} = \frac{15}{1} = 15 [s],$$

a nurt zniesie pływaka o

$$s = u \cdot t = 0,5 \cdot 15 = 7,5 [m],$$

a jego prędkość względem nieruchomego obserwatora na brzegu wyznaczymy wypadkową wektorów prędkości ruchu unoszenia u i prędkości pływaka względem wody w :

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = 1,118 [m/s].$$

Prędkość bezwzględną określimy więc:

$$V = \sqrt{(V_u)^2 + w^2} = \sqrt{[\omega(r - wt)]^2 + w^2}$$

Wektor przyspieszenia bezwzględnego chwytaka jest wypadkową wektorów przyspieszeń ruchu unoszenia, względnego i przyspieszenia Coriolisa:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_c.$$

W przypadku chwytaka robota przyspieszenie ruchu unoszenia:

$$a_u = \omega^2 \rho = \omega^2 (r - wt)$$

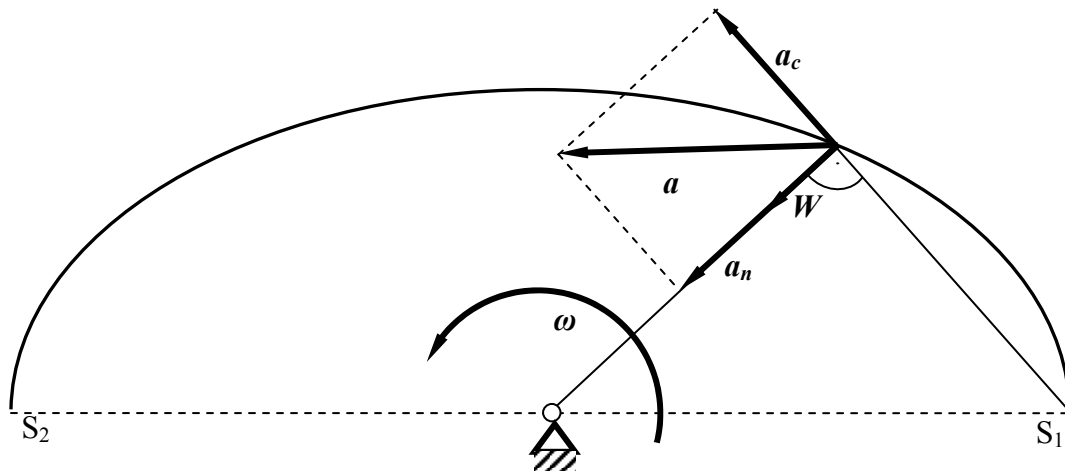
Ponieważ prędkość ruchu względnego $w = \text{const.}$, stąd $a_w = 0$.

Wartość przyspieszenia Coriolisa określamy ze wzoru:

$$a_c = 2\omega w \sin \alpha$$

gdzie α jest kątem zawartym pomiędzy wektorami prędkości kątowej ω i prędkości względnej w . W rozważanym przypadku kąt ten wynosi $\alpha = 90^\circ$, więc ostatecznie:

$$a_c = 2\omega w$$



Wartość przyspieszenia chwytaka określimy korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$a = \sqrt{a_u^2 + a_c^2}$$

ostatecznie

$$a = \sqrt{(\omega^2(r - wt))^2 + (2\omega w)^2}$$

Prędkość chwytaka w czasie $t_1 = 1 [s]$ wynosi:

$$V_{(t=1)} = \sqrt{[\omega(r - wt)]^2 + w^2} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{4}(1 - 0,25 \cdot 1)\right]^2 + 0,25^2} = 0,8 \text{ [m/s]}$$

a przyspieszenie:

$$a_{(t=1)} = \sqrt{(\omega^2(r - wt))^2 + (2\omega w)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{16}(1 - 0,25 \cdot 1)\right)^2 + \left(2 \frac{\pi}{4} 0,25\right)^2} = 1,089 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Z kolei dla czasu $t_2 = 2 \text{ [s]}$ otrzymujemy:

$$V_{(t=2)} = \sqrt{[\omega(r - wt)]^2 + w^2} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{4}(1 - 0,25 \cdot 2)\right]^2 + 0,25^2} = 0,675 \text{ [m/s]},$$

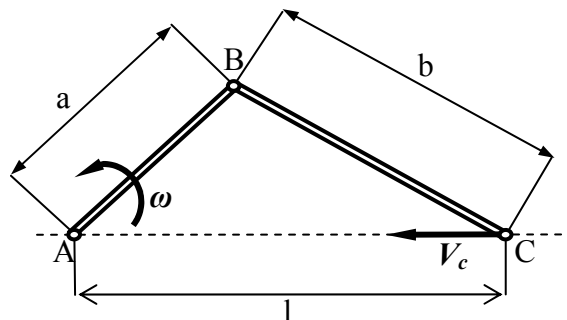
a przyspieszenie:

$$a_{(t=2)} = \sqrt{(\omega^2(r - wt))^2 + (2\omega w)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{16}(1 - 0,25 \cdot 2)\right)^2 + \left(2 \frac{\pi}{4} 0,25\right)^2} = 0,5 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Ruch płaski ciała sztywnego.

Przykład 19.

Ramię robota przemysłowego zamocowane w korpusie w przegubie składa się z ramienia dolnego AB o długości $a = 470 \text{ [mm]}$ i ramienia górnego BC o długości $b = 670 \text{ [mm]}$. Ramię dolne połączone jest z ramieniem górnym przegubem B i zakończone z drugiej strony przegubem C do montażu chwytaka. Maksymalny zasięg ramienia wynosi $l = 886 \text{ [mm]}$. Określić w funkcji czasu prędkość przegubu C , jeżeli będzie on przemieszczany wzdłuż linii poziomej w stronę przegubu A , jeżeli ramię dolne będzie się obracało względem przegubu A z prędkością kątową $\omega = \pi/4 \text{ [rad/s]}$.



Rozwiązanie.

Ramię AB obraca się ze stałą prędkością kątową:

$$\omega = \frac{d\beta}{dt}$$

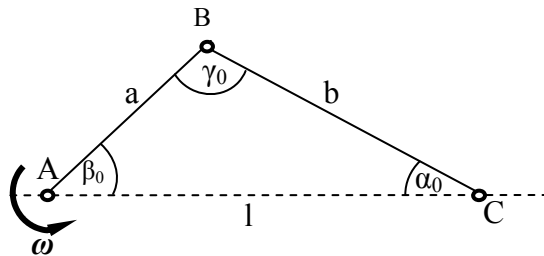
Stąd

$$d\beta = \omega dt$$

Całkując po czasie otrzymujemy:

$$\beta = \omega t + \beta_0$$

gdzie β_0 jest początkową wartością kąta β dla maksymalnego zasięgu robota. Wartość tego kąta wyznaczmy korzystając z twierdzenia Carnota (cosinusów):



$$b^2 = a^2 + l^2 - 2ab \cos \beta_0$$

skąd

$$\cos \beta_0 = \frac{a^2 + l^2 - b^2}{2ac} = 0.642787609686539 \Rightarrow \beta_0 = 0.872664625997165 \text{ [rad]} = 50^\circ$$

Wartości pozostałych kątów możemy wyznaczyć korzystając z powyższego twierdzenia bądź z twierdzenia sinusów:

$$\frac{b}{\sin \beta_0} = \frac{a}{\sin \alpha_0} = \frac{l}{\sin \gamma_0}$$

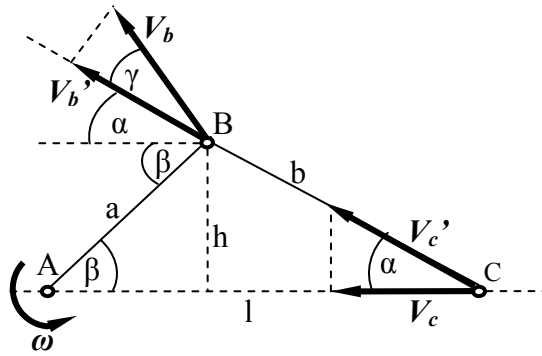
otrzymując

$$\alpha_0 = 0.523598775598299 = 30^\circ$$

i

$$\gamma_0 = 1.74532925199433 = 100^\circ$$

W chwili, gdy ramię AB tworzy z poziomem kąt β , kąt zawarty pomiędzy ramieniem BC i poziomem wynosi α . Wówczas:



$$h = a \sin \beta$$

oraz

$$h = b \sin \alpha$$

skąd wynika

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

czyli

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \sin \beta$$

Punkt B porusza się z prędkością V_B :

$$V_B = \omega a$$

prostopadłą do ramienia a pod kątem φ w stosunku do prostej wyznaczonej kierunkiem ramienia b , a punkt C porusza się po prostej poziomej, z którą ramię b tworzy kąt α . Dlatego można zastosować twierdzenie, że rzuty prędkości dwóch punktów ciała sztywnego na prostą łączącą te punkty są sobie równe. Zgodnie z tym twierdzeniem:

$$V_B' = V_C'$$

Ponieważ:

$$V_B' = V_B \cos \varphi$$

$$V_C' = V_C \cos \alpha$$

stað

$$V_B \cos \varphi = V_C \cos \alpha .$$

Wartość kąta φ wynosi:

$$\varphi = 90 - (\alpha + \beta),$$

więc

$$V_B \cos(90 - (\alpha + \beta)) = V_C \cos \alpha$$

czyli

$$V_B \sin(\alpha + \beta) = V_C \cos \alpha$$

skąd

$$V_C = V_B \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$$

Uwzględniając

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

oraz

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

mamy

$$V_C = \omega a \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Podstawiając wcześniej wyznaczone wielkości otrzymujemy ostatecznie:

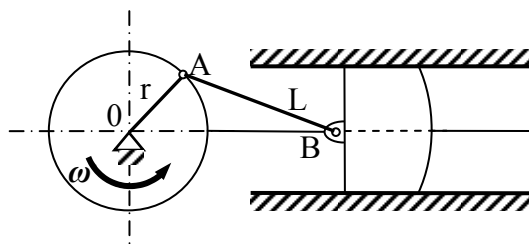
$$V_C = \omega a \frac{\sin(\omega t + \beta_0) \left[\frac{a}{b} \cos(\omega t + \beta_0) + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b} \sin(\omega t + \beta_0) \right)^2} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b} \sin(\omega t + \beta_0) \right)^2}}$$

Ruch płaski ciała sztywnego. Chwilowy środek obrotu

Przykład 20.

Silnik motocykla Yamaha DT80LC osiąga moc maksymalną przy prędkości obrotowej 6000 obr./min. Skok tłoka wynosi $h = 42 [mm]$. Odległość pomiędzy sworzniami mocującymi korbowód z wałem korbowym i tłokiem wynosi $L = 84 mm$. Obliczyć:

- metodą analityczną prędkość ruchu posuwistego tłoka dla kątów $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4 [rad]$ i $\varphi_3 = \pi/2 [rad]$,
- metodą chwilowego środka obrotu prędkość tłoka dla kąta $\varphi = \pi/4 [rad]$.



Rozwiązanie.

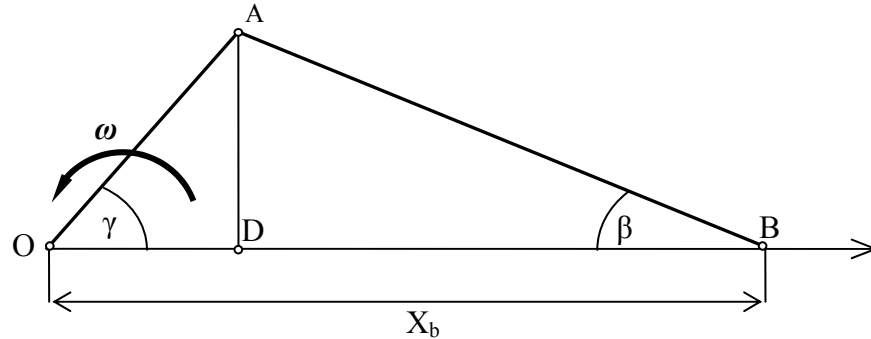
Jeżeli skok tłoka wynosi h to promień wału korbowego wynosi:

$$r = \frac{h}{2} = 21 [mm] = 0,021 [m]$$

Z kolei określimy prędkość kątową promienia OA :

$$\omega = \frac{6000 \cdot 2\pi}{60} = 628,318 [\text{rad} / \text{s}]$$

- a) obliczenie prędkości tłoka dla kątów $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = \pi/2 [\text{rad}]$



Równanie ruchu tłoka określimy z zależności:

$$x_B = OB = OD + DB$$

$$y_B = 0$$

$$OD = r \cos \varphi$$

$$DB = L \cos \beta$$

czyli

$$x_B = r \cos \varphi + L \cos \beta$$

Ponieważ

$$AD = r \sin \varphi = L \sin \beta,$$

oraz

$$L = 4r$$

stąd

$$\sin \beta = \frac{\sin \varphi}{4}.$$

Z kolei

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{16}} = \sqrt{\frac{16 - \sin^2 \varphi}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{16 - \sin^2 \varphi},$$

więc

$$x_B = r \cos \varphi + \frac{L}{4} \sqrt{16 - \sin^2 \varphi} = r \cos \varphi + r \sqrt{16 - \sin^2 \varphi}.$$

Ale

$$\varphi = \omega t$$

stąd równanie ruchu tłoka przyjmuje postać:

$$x_B = r \left[\cos(\omega t) + \sqrt{16 - \sin^2(\omega t)} \right]$$

Prędkość tłoka obliczymy różniczkując po czasie równanie ruchu tłoka:

$$\dot{x}_B = -r \left[\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{2\sqrt{16 - \sin^2(\omega t)}} 2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right]$$

i po uporządkowaniu wartość prędkości V_B wyrazimy wzorem:

$$\dot{x}_B = -r\omega \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(2\omega t)}{2\sqrt{16 - \sin^2(\omega t)}} \right]$$

Dla obliczenia prędkości tłoka dla różnych wartości kąta posłużymy się wzorem wprowadzając $\varphi = \omega t$:

$$\dot{x}_B = -r\omega \left(\sin \varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2\sqrt{16 - \sin^2 \varphi}} \right).$$

Dla kąta $\varphi_1 = 0 \Rightarrow V_B = 0$.

Dla kąta $\varphi_2 = \pi/4 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, skąd

$$\dot{x}_B = -r\omega \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{62}}{62} \right) = -11,005 [m/s]$$

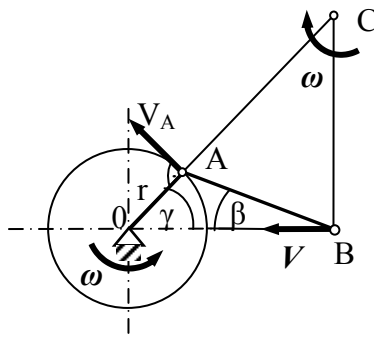
Dla kąta $\varphi_2 = \pi/4$ prędkość tłoka wyniesie $V_B = 11,005 [m/s]$, a jej wektor będzie zwrócony w stronę środka obrotu wału korbowego.

Dla kąta $\varphi_3 = \pi/2 \Rightarrow \sin \varphi = 1, \sin 2\varphi = 0$. Wówczas:

$$\dot{x}_B = -r\omega = -13,19 [m/s]$$

Dla kąta $\varphi_3 = \pi/2$ prędkość tłoka wyniesie $V_B = 13,19 [m/s]$, a jej wektor będzie zwrócony w stronę środka obrotu wału korbowego.

- b) obliczenie prędkość tłoka dla kąta $\varphi = \pi/4 [rad]$ metodą chwilowego środka obrotu
Posłużymy się następującym schematem:



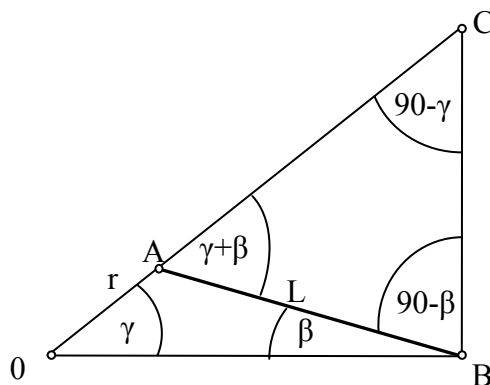
Chwilowy środek obrotu wyznaczamy prowadząc proste prostopadłe do kierunków prędkości V_A i V_B . Proste te przecinają się w punkcie C . Prędkość punktu A wynosi:

$$V_A = \omega r$$

oraz

$$V_A = \omega' CA$$

Z trójkąta OAB korzystając z twierdzenia sinusów:



$$\frac{4r}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \beta}$$

czyli

$$\sin \beta = \frac{\sin \varphi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \beta = 0,177 \text{ [rad]}$$

Z kolei dla trójkąta ABC z twierdzenia sinusów wynika:

$$\frac{4r}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{BC}{\sin(\varphi + \beta)}$$

Uwzględniając, że:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi \text{ i } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$$

mamy:

$$\frac{4r}{\cos \varphi} = \frac{AC}{\cos \beta} = \frac{BC}{\sin(\varphi + \beta)}$$

$$AC = 4r \frac{\cos \beta}{\cos \varphi}$$

$$AC = 0,116923[m].$$

Ponieważ

$$\omega' = \frac{V_A}{CA}$$

stąd

$$\omega' = \frac{\omega r}{CA} = 112,849 [rad / s].$$

Prędkość tłoka określimy z zależności:

$$V_B = \omega' BC,$$

gdzie:

$$BC = 4r \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \varphi} = 0,097526 [m].$$

Ostatecznie:

$$V_B = \omega' BC = 11,005 [m / s].$$

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

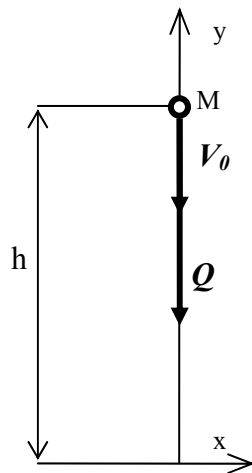
Całkowanie równań różniczkowych ruchu punktu materialnego

Przykład 21.

Dla ciała o masie m spadającego swobodnie na ziemię z wysokości h z prędkością początkową V_0 skierowaną pionowo w dół określić równanie ruchu. Obliczyć po jakim czasie i z jaką prędkością ciało uderzy o ziemię z prędkościami początkowymi $V_0 = 10 [m/s]$ oraz $V_0 = 0$, jeżeli w chwili $t = 0$ ciało znajdowało się na wysokości $h = 30 [m]$. Opory powietrza pominąć.

Rozwiązanie.

Przyjmujemy oś y układu współrzędnych skierowaną pionowo do góry.



$$m\ddot{y} = -gm$$

$$\ddot{y} = -g.$$

Całkując otrzymujemy:

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych:

dla $t = 0$

$$\dot{y} = -V_0 \Rightarrow C_1 = -V_0,$$

dla $t = 0$

$$y = h \Rightarrow C_2 = h.$$

Stąd

$$V_y = -gt - V_0,$$

a równanie ruchu:

$$y = -\frac{gt^2}{2} - V_0 t + h$$

Rozważymy przypadek, gdy $V_0 = 10 [m/s]$.

Znajdując pierwiastki równania

$$-\frac{gt^2}{2} - V_0 t + h = 0$$

wyznaczamy czas po jakim czasie ciało spadnie na ziemię: $t_1 = 1,65557 [s]$, a następnie podstawiając do wzoru na prędkość:

$$V_1 = -gt_1 - V_0 = -26,24 [m/s].$$

Dla przypadku, gdy $V_0 = 0$:

$$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{gt_2^2}{2} = h$$

stąd

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

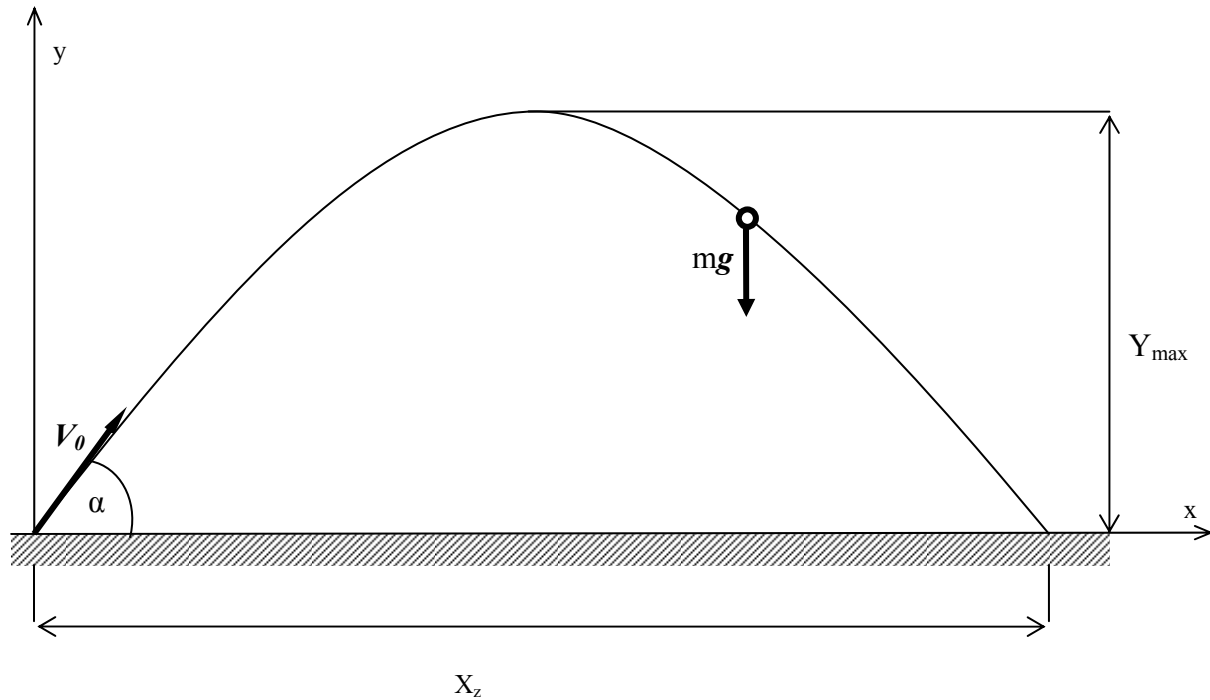
Wstawiając do równania na prędkość:

$$V_2 = -\sqrt{2gh} = -24,26 [m/s].$$

Przykład 22.

Tomasz Majewski podczas olimpiady w Pekinie w roku 2008 zdobył złoty medal rzucając kulę o masie $m = 7,62 [kg]$ z prędkością początkową $v_0 = 14,5247 [m/s]$ pod kątem $\alpha = 45^\circ$. Traktując kulę jako punkt materialny i pomijając opory powietrza wyznaczyć prędkość kuli w funkcji czasu oraz jej równania ruchu. Określić równanie toru, wysokość rzutu oraz długość rzutu.

Rozwiązanie.



Dynamiczne równania ruchu kuli:

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy wzory na wartości składowych wektora prędkości:

$$v_x = \dot{x} = C_1$$

$$v_y = \dot{y} = -gt + C_2$$

Z warunku początkowego

$$v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha \Rightarrow C_1 = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t=0) = v_0 \sin \alpha \Rightarrow C_2 = v_0 \sin \alpha$$

otrzymujemy

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + v_0^2}$$

Z kolei ponownie całkując

$$x = v_0 t \cos \alpha + D_1$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + D_2$$

i korzystając z warunków początkowych

$$x(t=0) = 0$$

oraz

$$y(t=0) = 0$$

wynika, że

$$D_1 = D_2 = 0$$

Ostatecznie

$$v_y(t=0) = v_0 \sin \alpha \Rightarrow C_2 = v_0 \sin \alpha$$

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

Podstawiając

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

do wzoru na y otrzymujemy

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x$$

Pierwiastkami powyższego równania kwadratowego są

$$x_1 = 0$$

oraz

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Stąd zasięg rzutu wynosi

$$x = \frac{v_0^2}{g} = \frac{14,5247^2}{9,80655} = 21,51 [m].$$

W celu określenia maksymalnej wysokości rzutu należy obliczyć maksimum funkcji $y(x)$.

$$y' = -2x \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0$$

dla

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}$$

wówczas otrzymujemy

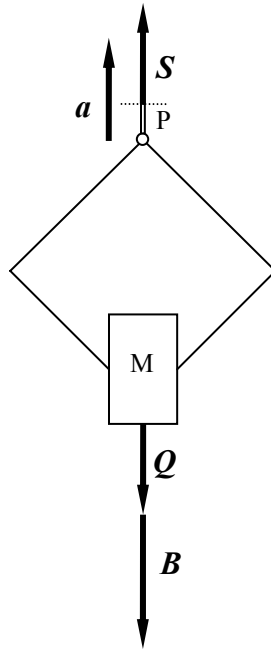
$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = 5,38 [m].$$

Metoda d'Alemberta**Przykład 23.**

Do odbierania detali ze stołu centrum obróbczego obrobionych i składowania ich w koszu zastosowano manipulator stawowy. Jaka siła działa na przegub P chwytaka podczas przenoszenia detali zaniebując siły podczas ruchu poziomego chwytaka, jeżeli masa chwytaka z detalem wynosi m , a przyspieszenie chwytaka w ruchu pionowym wynosi a .

Rozwiązanie.

Zadania rozwiążemy stosując zasadę d'Alemberta. Przyjmiemy pionową oś układu współrzędnych skierowaną ku górze, na którą będziemy rzutować siły działające na przegub. Najpierw rozważymy przypadek, gdy chwytak pobiera detal ze stołu centrum obróbczego. Ciężar chwytaka i przenoszonego detalu oznaczmy jako Q . Siłę działającą na przegub oznaczmy jako S . Zgodnie z zasadą d'Alemberta siła bezwładności B będzie skierowana w dół, przeciwnie do zwrotu wektora przyspieszenia a .



Dla quasistatycznego warunku równowagi rzutując siły na oś otrzymujemy równanie skalarne:

$$S - Q - B = 0.$$

Ponieważ:

$$Q = mg$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, oraz

$$B = ma$$

otrzymujemy:

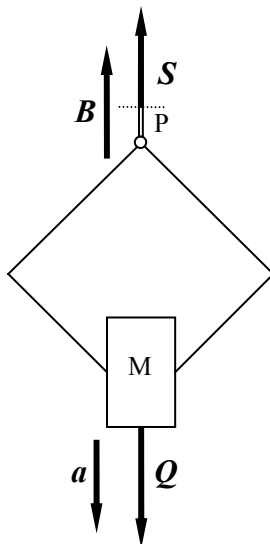
$$S - mg - ma = 0$$

skąd wynika:

$$S = m(g + a)$$

Podczas podnoszenia detalu ze stołu z przyspieszeniem a siła działająca na przegub chwytaka jest równa iloczynowi masy chwytaka i detalu przez sumę przyspieszeń podnoszenia a i przyspieszenia ziemskiego g .

Rozważmy przypadek opuszczania detalu do kosza. Wówczas:



$$S + B - Q = 0.$$

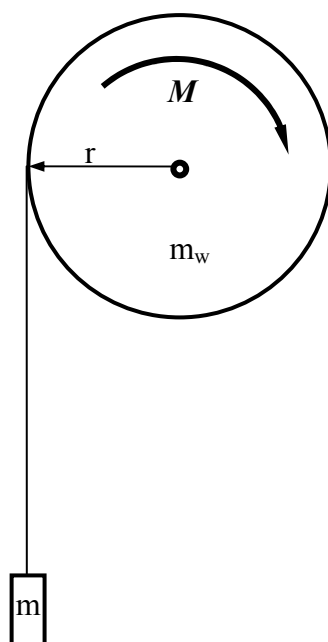
Wartość siły:

$$S = Q - B = m(g - a).$$

Jeżeli przyspieszenie $a = g$ to siła $S = 0$. Jeżeli natomiast $a = 0$, gdy detal będzie podnoszony lub opuszczany ze stałą prędkością, bądź podczas poziomego ruchu chwytaka siła będzie równa ciężarowi chwytaka i detalu $S = Q$.

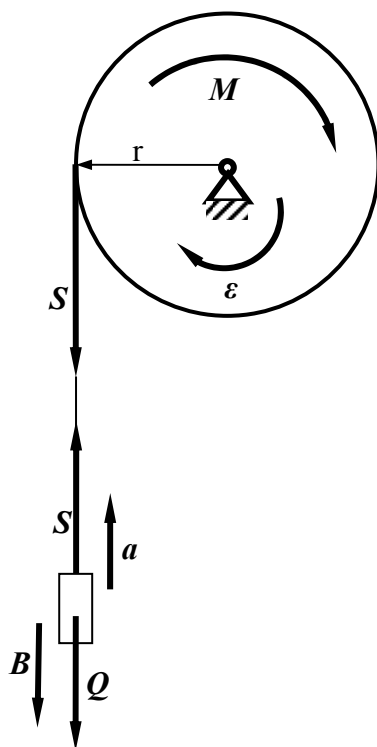
Przykład 24.

Przedmiot o masie m jest podnoszony do góry za pomocą liny o pomijalnie małej masie nawijanej na bęben wciągarki w postaci pełnego walca o masie m_b i promieniu r . Z jakim przyspieszeniem będzie poruszał się przedmiot i jaka będzie wartość siły napięcia liny, jeżeli do bębna przyłożony zostanie moment obrotowy M .



Rozwiązanie.

Rozpocniemy od myślowego przecięcia liny, na której zawieszony jest ciężar i zastąpienie jej siłą napięcia S . Rozważymy ruch przedmiotu o masie m .



Korzystając z metody d'Alemberta przy ruchu przedmiotu w górę i sile bezwładności B skierowanej pionowo w dół dla stanu fikcyjnej równowagi możemy zapisać równanie:

$$S - B - Q = 0.$$

Ponieważ $B = ma$, $Q = mg$ wartość siły napięcia liny będzie równa:

$$S = m(a - g).$$

Następnie rozważymy ruch bębna wciągarki. Na bęben działają dwa momenty: moment obrotowy M oraz moment wywołany siłą S działającą na ramieniu r . Ponieważ zmiana krętu bębna równa jest sumie momentów działających na niego, to:

$$M - J\varepsilon - Sr = 0.$$

Uwzględniając, że moment bezwładności bębna względem jego osi obrotu wynosi:

$$J = \frac{1}{2}m_B r^2$$

oraz związek pomiędzy przyspieszeniem kątowym bębna i przyspieszeniem przedmiotu

$$a = \varepsilon r \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{r}$$

oraz wcześniej określone wyrażenie na wartość siły S otrzymujemy:

$$M - \frac{1}{2}m_B r^2 \frac{a}{r} - m(a - g)r = 0,$$

skąd wyznaczamy przyspieszenie przedmiotu:

$$a = \frac{M + mgr}{r\left(\frac{1}{2}m_B + m\right)}.$$

Siła napięcia liny wyniesie więc:

$$S = m \frac{m(M + mgr)}{r\left(\frac{1}{2}m_B + m\right)} - mg.$$

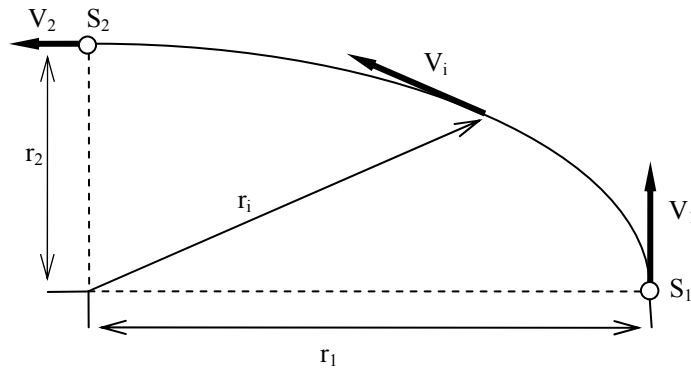
Prawo zachowanie krętu punktu materialnego

Przykład 24.

Robot przemysłowy za pomocą chwytaka wiszącego na cięgnie przenosi detal o masie m pomiędzy dwoma stanowiskami obróbczymi S_1 i S_2 po torze stanowiącym ćwiartkę elipsy o półosiach $r_1 = 1,2 [m]$ i $r_2 = 0,8 [m]$. Określić prędkość kątową ω obrotu robota w funkcji promienia r chwytaka, tak by rzuty na płaszczyznę torów chwytaka i detalu

pokrywały się. Obliczyć prędkość kątową ω_2 i liniową V_2 detalu w punkcie S_2 , jeżeli w punkcie S_1 obrót robota rozpoczął się z prędkością kątową $\omega_1 = \pi/10$ [rad/s].

Rozwiązanie.



Zakładając, że na detal nie działają żadne siły zewnętrzne i traktując go jako punkt materialny korzystamy z prawa zachowania krętu:

$$K_1 = K_i,$$

gdzie K_1 jest krętem detalu w punkcie S_1 względem osi obrotu robota O , a K_i krętem detalu podczas przenoszenia w położeniu i względem tej samej osi. Wartość krętu w punkcie określonym położeniem promienia r_1 wynosi:

$$K_1 = mV_1r_1,$$

a w punkcie i :

$$K_i = mV_ir_i$$

Dlatego możemy zapisać:

$$mV_1r_1 = mV_ir_i$$

Z kolei:

$$V_1 = \omega_1r_1$$

i

$$V_i = \omega_ir_i$$

co po podstawieniu do powyższego równania daje:

$$m\omega_1r_1^2 = m\omega_ir_i^2$$

Dzielimy obustronnie równanie przez masę m :

$$\omega_1r_1^2 = \omega_ir_i^2,$$

a następnie wyznaczamy prędkość kątową ω_i w funkcji promienia r_i :

$$\omega_i = \frac{r_1^2}{r_i^2} \omega_1$$

Prędkość kątowna detalu w punkcie S_2 wyniesie:

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 = \frac{(1,2)^2}{(0,8)^2} \frac{\pi}{10} = 0,225\pi = 0,707 \text{ [rad / s]}$$

a prędkość liniowa

$$V_2 = \omega_2 r_2 = 0,707 \cdot 0,8 = 0,565 \text{ [m / s]}.$$

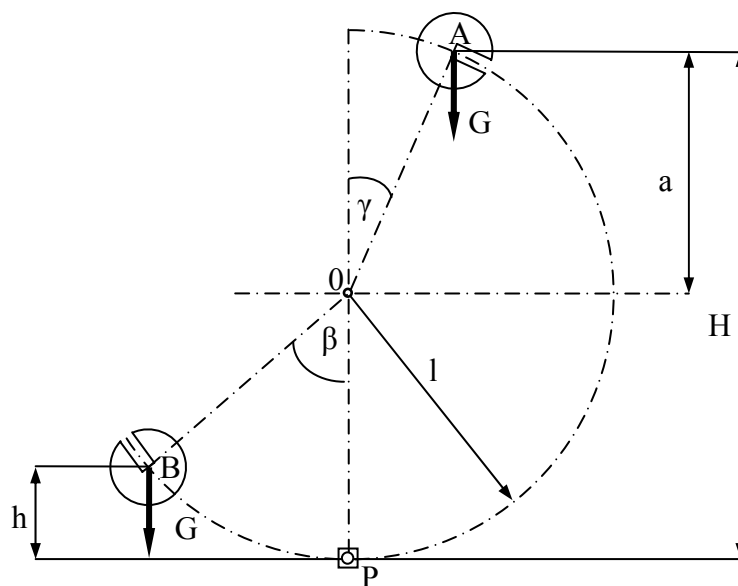
Prawo zachowania energii

Przykład 25.

Odporność materiału na złamanie przy uderzeniu określa się podczas udarowej próby zginania, którą wykonuje się z wykorzystaniem stalowego młota o masie $m = 24 \text{ [kg]}$ zamocowanego na pręcie, który razem z młotem obraca się wokół nieruchomej osi O . Wstępne wychylenie młota od pionu w górnym położeniu A wynosi $\varphi = 5^\circ$, a długość ramienia młota $l = 0,64 \text{ [m]}$. Pomijając masę pręta i tarcie w łożysku O obliczyć prędkość młota w skrajnym dolnym położeniu P oraz pracę wykonaną podczas złamania próbki, jeżeli po złamaniu próbki młot wychylił się o kąt $\beta = 60^\circ$.

Rozwiązanie.

Potraktujemy młot jako punkt materialny.



Praca siły ciężkości $Q = mg$ na drodze H energii potencjalnej młota względem punktu wynosi:

$$L_B = mgH,$$

gdzie:

$$H = l + a.$$

Z kolei

$$a = l \cos \varphi,$$

stąd

$$H = l + l \cos \varphi = l(1 + \cos \varphi).$$

W dolnym położeniu P energia kinetyczna młota wynosi:

$$E_k = \frac{mV^2}{2}.$$

Przyrównując:

$$L_B = E_k,$$

czyli

$$mgl(1 + \cos \varphi) = \frac{mV^2}{2},$$

wyznaczamy prędkość młota w najniższym położeniu:

$$V = \sqrt{2gl(1 + \cos \varphi)}$$

Przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,80665 [m/s^2]$, więc: $V = 5,005697 [m/s]$.

Ponieważ

$$\cos \varphi = \cos(0.0872664) = 0,9962 \cong 1$$

możemy przyjąć, że:

$$V = \sqrt{4gl} = \sqrt{2gH},$$

a obliczona prędkość przy przyjętym uproszczeniu wynosi $V = 5,01 [m/s]$.

Pracę wykonaną na złamanie próbki obliczymy z różnicy energii potencjalnych w punktach A i B :

$$L = E_B - E_A = mgH - mgh = mg(H - h)$$

Wysokość h wyznaczymy z zależności trygonometrycznej:

$$h = l \cos \beta,$$

stąd

$$L = mg(l(1 + \cos \varphi) - l \cos \beta) = mgl(1 + \cos \varphi - \cos \beta),$$

a przyjmując wcześniejsze uproszczenie:

$$L = mgl(2 - \cos \beta)$$

Praca wykonana na złamanie próbki wynosi $L = 226 [J]$.