Lista IV — Relacje i funkcje

1. Znajdź dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji:

a) $R = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ b) $R = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$ c) $aRb \Leftrightarrow (a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge a < b\}$

2. Zbadaj, czy relacja jest: zwrotna, przeciwzwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna.

a) $R \subseteq \{a,b\}^2 \quad R = \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$,

b) $R \subseteq \{a,b,c,d\}^2 \quad R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$,

c) $R \subseteq \{a,b,c,d\}^2 \quad R = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,c),(a,a),(b,b)\}$,

d) $R \subseteq \mathbb{N}^2 \quad xRy \Leftrightarrow x|y$,

e) $R \subseteq \mathbb{N}^2 \quad xRy \Leftrightarrow 2|(x+y)$,

f) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow |x| < |y|$,

g) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \quad xRy \Leftrightarrow 3|(x-y)$,

h) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow |x+y+1| = 1$,

i) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow x+y = 1$,

j) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow x+y \geq 2$

k) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$

l) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \quad xRy \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$,

m) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \quad xRy \Leftrightarrow |x|+|y| \neq 3$

n) $\perp \subseteq X^2 \quad X =$ zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie.

3. Ogólna definicja funkcji sformułowana za pomocą teorii mnogości pochodzi od G. Peano (1911 r.):

Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. Jeżeli relacja dwuargumentowa $R \subset X \times Y$ spełnia następujący warunek: dla każdego $x \in X$ istniej dokładnie jeden element $y \in Y$, taki że xRy, to relację tę nazywamy funkcją (odwzorowaniem).

Definicję tę z wykorzystaniem kwantyfikatorów zapisujemy następująco:

1. $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} \; xRy$,
2. $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} \; xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Sprawdź, czy poniższe relacje są funkcjami:

a) $R = \{(a,a),(a,b)\} \subseteq \{a\} \times \{a,b\}$,

b) $R = \{(a,a),(b,a)\} \subseteq \{a,b\} \times \{a\}$,

c) $R = \{(x,y) : x^2 = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

d) $R = \{(x,y) : x^2 = y^2\} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

e) $R = \{(x,y) : x^3 = y^2\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$,

f) $R = \{(x,y) : x^2 = y^3\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$,

g) $R = \{(x,(y,z)) : x = y+z\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$,

h) $R = \{(x,y) : xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4. Dla danego zbioru X oraz relacji $R \subset X^2$ zbadaj, czy R jest relacją równoważności. Jeśli tak, to znajdź zbiór ilorazowy X/R.

a) $X = \mathbb{N} \quad mRn \Leftrightarrow 2|(n+m)$,

b) $X = \mathbb{R} \quad aRb \Leftrightarrow a-b = 2$,

c) $X = \mathbb{R} \quad aRb \Leftrightarrow a-b \in \mathbb{N}_0$,

d) $X = \{1,2,\ldots,16\} \quad nRm \Leftrightarrow 4|(n^2-m^2)$,

e) $X =$ zbiór liczb parzystych $\quad xRy \Leftrightarrow 3|(x-y)$,

f) $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie $\quad aRb \Leftrightarrow a||b$,

g) X = zbiór macierzy kwadratowych wymiaru 2×2 $\quad ARB \Leftrightarrow \det A = \det B$.

5. Sprawdź, czy poniższe przyporządkowanie określa funkcję. Jeśli tak, to wskaż dziedzinę, przeciwdziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $f : \{1, 2, 5, 8\} \to \{8, 3, 2\},\ f(1) = 8,\ f(5) = 3,\ f(8) = 2,$

b) $f : \mathbb{N} \to \{2\},\ f(n) = 2,$

c) $f : \{1, 5, 6\} \to \{2, 3, 5, 8\},\ f(1) = 5,\ f(5) = 5,\ f(6) = 8,$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \sqrt{2},$

e) $f : \{-8, 3, 3\} \to \{5, 8\},\ f(-8) = 5,\ f(3) = 5,\ f(3) = 8,$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^2,$

g) $f : [-2, 8) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x - 5,$

h) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 - 4x - 5,$

i) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x^2,$

j) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = x/2,$

k) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = 1/x,$

l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = |x + 1| + |x - 2|,$

m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \log x,$

n) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \log x$

6. Wyznacz dziedziny następujących funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)(x + 4)}$

c) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2 + 2x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x - 12}$

f) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \dfrac{2}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x - 1}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{x - 2}}$

j) $f(x) = \sqrt{|x - 5| + 1}$

k) $f(x) = \sqrt{-6 - |x + 1|}$

l) $f(x) = \sqrt{2|x + 2| - 6}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$

n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3|x - 1| - 6}{5 - |x|}}$

o) $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x - 3\sin x}$

p) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 2x - 2)$

7. Wyznacz zbiór wartości funkcji dla podanego zbioru argumentów (obraz zbioru).

a) $f(x) = 3x - 5, \quad x \in [-7, -2),$

b) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \{0, 1, 4, 6\},$

c) $f(x) = x^2 + 2, \quad x \in [-3, 3],$

d) $f(x) = |x| - 1, \quad x \in [-2, -1] \cup [0, 1],$

e) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

8. Wykaż, że poniższe funkcje są różnowartościowe w swoich dziedzinach:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -\sqrt{2}x + 3$

c) $f(x) = \sqrt{5x}$

d) $f(x) = -5\sqrt{x - 3}$

e) $y = \dfrac{1}{x}$

f) $y = \dfrac{3 - x}{x + 1}$

9. Sprawdzić, które z własności: różnowartościowość, *na*, bijekcja, mają poniższe funkcje. Sprawdzić, czy podane funkcje są odwracalne. Jeśli tak, to podać funkcję odwrotną.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$

b) $f:[-2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$

c) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$

d) $f:(-\infty,0]\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$

e) $f:(-\infty,0]\to(-\infty,0],\ f(x)=-x^2$

f) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x-1)$

g) $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0,\ f(n)=n^2+1$

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-1} & \text{gdy } x\neq 1\\ 0 & \text{gdy } x=1\end{cases}$

i) $f:\mathbb{R}\to(-1,1),\ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+|x|$

k) $f:(1,\infty)\to(2,\infty),\ f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

l) $f:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0,\ f(x,y)=2^x(2y+1)-1$

m) $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$

n) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=6^x-6^{-x}$

o) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\left(x+2y,\frac{x-y}{3}\right)$

p) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+8 & \text{gdy } x\leq -2\\ (x+2)^2 & \text{gdy } x>-2\end{cases}$

q) $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{Z},\ f(n)=\begin{cases}n/2 & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą}\\ -(n+1)/2 & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą}\end{cases}$

10. Niech $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$. Wyznacz $f(A)$, $f^{-1}(B)$, gdy:

a)	$X=Y=\mathbb{R}$	$f(x)=x^2-3x+2$	$A=(0,1]$	$B=(-\infty,-6]$
			$A=[-2,1]$	$B=\{-3,-4\}$
b)	$X=Y=\mathbb{R}$	$f(x)=x^3-x$	$A=(1,\infty)$	$B=(0,\infty)$
			$A=[0,1]$	$B=\{0\}$
c)	$X=Y=\mathbb{R}$	$f(x)=\operatorname{sgn} x$	$A=(-5,6]$	$B=[0,1)$
			$A=\{8\}$	$B=[-5,5]$
			$A=[-2,0)$	$B=\{-1\}$
			$A=(-3,0]$	$B=(\frac{1}{2},8)$
d)	$X=Y=\mathbb{R}$	$f(x)=\sin x+1$	$A=[0,\frac{3}{2}\pi]$	$B=(\frac{1}{2},\infty)$
			$A=\{0,\pi\}$	$B=(-\infty,1]$
			$A=\{\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{6}\pi\}$	$B=\{0\}$
e)	$X=Y=\mathbb{R}$	$f(x)=\begin{cases}x & \text{gdy } x<0\\ -2x+1 & \text{gdy } x\geq 0\end{cases}$	$A=(-1,1)$	$B=[0,\frac{1}{2})$
			$A=\{0,\frac{1}{2}\}$	$B=(-1,2)$
			$A=(0,\frac{1}{2})$	$B=(1,\infty)$

11. Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=-\dfrac{2}{x-1}$,

b) $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$,

c) $f(x)=\sqrt{|x-4|}$,

d) $f(x)=\sqrt{|x|-4}$,

e) $f(x)=x-6|x|$

f) $f(x)=|x+1|-|x-1|$

g) $f(x)=\left|\dfrac{1}{4-x}+2\right|$,

h) $f(x)=||x^2-4|-4|$,

i) $f(x)=\max\{|x|,4\}$,

j) $f(x)=\min\left\{\dfrac{2}{|x|},2\right\}$.

k) $f(x)=|x+1|+|x-2|$,

12. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $\varphi(z) = 2$, $z \in \mathbb{N}_0$

b) $w(r) = 2^r$, $r \in \mathbb{R}$

c) $x(y) = y^2$, $y \in (-1, 2)$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

e) $h(t) = \{\operatorname{sgn}(\sin t)\}$, $t \in \mathbb{R}$

f) $D(s) = s^2 - 1$, $s \in \{-1, 1\}$

g) $\Phi(t) =$"reszta z dzielenia liczbt t przez 3", $t \in \mathbb{Z}$

13. Niech $f : [-6, \infty) \to \mathbb{R}$ dana będzie wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+5)^2 + 2, & \text{gdy } x \in [-6, -4] \\ -(x+3)^3, & \text{gdy } x \in (-4, -2] \\ (x+2)^2 - 1, & \text{gdy } x \in (-2, -1] \\ -|x + \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}, & \text{gdy } x \in (-1, 0] \\ \operatorname{tg} x, & \text{gdy } x \in (0 \frac{\pi}{4}] \\ 1, & \text{gdy } x \in (\frac{\pi}{4}, 1] \\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, niedodatnie, ujemne, nieujemne?

d) Znajdź $f(A)$ oraz $f^{-1}(B)$ dla $A = [-6, -4]$, $B = \{0\}$; $A = (-2, 2)$, $B = [\frac{1}{2}, 1)$; $A = \{-3, -1\} \cup (2, \infty)$, $B = (0, 1]$.

14. Wyznacz złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ (o ile istnieją):

a) $f(x) = 2x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sin x - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$

c) $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = [x - \frac{1}{3}]$ dla $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{gdy } x < 0 \\ x + 1 & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{gdy } x \leq 1 \\ x^2 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

15. Przedstaw poniższe funkcje jako złożenia dwóch funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = |2^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \log|x + 2|$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2\}$

d) $f(x) = 2^{|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = \log(|x| + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = \cos\sqrt{x + 1}$, $x \geq -1$