Lista III: Logika i zbiory

1. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$
d) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
e) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$
g) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$
h) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
i) $p \vee (\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg q \wedge \neg q)$

2. Czy prawdziwe są następujące zdania (oceń ich wartość logiczną):

a) Jeżeli liczba a dzieli się przez 2 i a dzieli się przez 7, to z faktu, że a nie dzieli się przez 7 wynika, iż a dzieli się przez 3.
b) $2 < 3$ i $4 < 3$
c) $2 < 3$ lub $4 < 3$
d) jeśli $2 + 2 = 5$, to $3 + 3 = 7$
e) liczba dzieli się przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 2
f) Warszawa leży nad Wisłą i Łódź leży nad Wisłą.
g) $2 \cdot 2 = 4$ i $2 + 2 = 4$
h) $2 < 0$ i $3 > 2$
i) $\sqrt{4} = 2$ i $2^2 = 2$
j) $-1 > 0$ i $\sqrt{9} = -3$
k) Warszawa jest stolicą Polski i Genewa jest stolicą Szwajcarii.
l) Równanie $x^2 + x - 2 = 0$ ma dwa pierwiastki lub równanie $x^2 + x - 2 = 0$ ma tylko jeden pierwiastek.
m) Wielomian $x^5 - x - 2$ jest podzielny przez $x - 1$ lub wielomian $x^5 + x - 2$ jest podzielny przez $x - 1$.
n) Jeżeli 9 jest dzielnikiem 36, to 6 jest dzielnikiem 36.
o) Jeżeli $2^0 = 2$, to równanie $x^2 - 1 = 0$ nie ma pierwiastków.

3. Podane poniżej funkcje zdaniowe zapisz symbolicznie, używając kwantyfikatorów, symboli logicznych, symboli działań arytmetycznych, nierówności i podzielności:

a) dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n < 2^n$
b) istnieje liczba rzeczywista x, dla której $x^2 = 5$
c) dla każdej liczby rzeczywistej x jest spełniona równość $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
d) istnieje taki kąt α, dla którego $\sin\alpha = \cos\alpha$
e) dowolna liczba rzeczywista x jest suma kwadratów dwóch liczb naturalnych
f) dla każdej liczby rzeczywistej prawdziwa jest nierówność $-x < x$
g) między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia
h) dla każdej liczby całkowitej x można wskazać liczbę naturalną y taką, że suma $x + y$ jest dodatnia
i) dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $x^2 + x + 1 > 0$
j) nie istnieje rozwiązanie rzeczywiste równania $2x^2 + x + 1 = 0$
k) dla dowolnej liczby naturalnej można wskazać liczbę naturalną większą od niej o 3
l) każda liczba całkowita dodatnia n spełnia przynajmniej jedną z nierówności: $n^2 > 4n$ lub $n^2 \leq 25$

4. Zapisz słowami następujące zdania, a następnie zapisz za pomocą kwantyfikatorów ich zaprzeczenia:

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \sqrt{x^2} = |x|$

b) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 = \frac{1}{4}$

c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \cos^2 x \geq 0$

d) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \sin 2x = 1$

e) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \sin x < 2$

f) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x < |x|$

g) $\forall_{x\in\mathbb{N}}\ n > \frac{1}{n}$

h) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}}\ x^2 + y^2 < 0$

i) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \leq 1$

j) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\geq x}\ f(x) < f(y)$

k) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ ((x < 3) \Rightarrow (\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y = \frac{1}{x})$

l) $\exists_{x\in\mathbb{R}} \forall_{y\in\mathbb{R}} \exists_{z\in\mathbb{R}}\ (z = y^2) \wedge (xyz = 1)$

5. Podane wyrażenia poprzedź kwantyfikatorami $\forall$, $\exists$ tak, aby otrzymane zdania były prawdziwe:

a) $x + 5 = 11$

b) $x^2 + 3 > 0$

c) $x + 1 = 1 + x$

d) $x^2 + 2x + 10 = 0$

e) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

f) $\sin x = \cos x$

g) $x^2 + x^3 = x^4$

h) $\cos \dfrac{x}{2} + 1 \geq 0$

i) $|x| - x \neq 0$

j) $|\sin x| \geq 1$

6. Które z podanych zdań są prawdziwe?

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x + y = 0$

b) $\exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x + y = 0$

c) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x > y$

d) $\exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x > y$

e) $\forall_{m\in\mathbb{N}} \exists_{n\in\mathbb{N}}\ m > n$

f) $\exists_{m\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\ m > n$

7. Wypisz wszystkie elementy następujących zbiorów:

a) $A = \{a, b, c\}$,

b) $G = \{a\}$,

c) $M = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 0\}$,

d) $B = \{x \in \mathbb{Z} : (x-3)^2 \leq 2\}$,

e) $H = \{\{a, b, c\}, c\}$,

f) $N = \{x \in \mathbb{Q} : (x+1)^2 = 2\}$,

g) $C = \{X : X \subset A\}$,

h) $I = \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 0\}$,

i) $O = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0\}$,

j) $D = \{1, 2, \{3, 4\}\}$,

k) $J = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$,

l) $P = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 4 \leq 0\}$,

m) $E = \{X : X \subset D\}$,

n) $K = \{\emptyset\}$,

o) $R = \{x \in \mathbb{Q} : (x+1)^2 \leq 0\}$,

p) $F = \emptyset$,

q) $L = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2\}$,

r) $S = \{x \in \mathbb{Z} : |3 - x^2| < 11\}$.

8. Przyjmując, że różne litery oznaczają różne liczby rzeczywiste, zbadaj czy pomiędzy zbiorami A i B zachodzą relacje inkluzji, a następnie wypisz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $A \cap (B \cup C)$ dla:

a) $A = \{a, b\} \quad B = \{a, c, d\}$,

b) $A = \emptyset \quad B = \{a\}$,

c) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\} \quad B = \{y \in \mathbb{N} : x > 2\}$,

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} \quad B = \{y \in \mathbb{N} : x > 3\}$,

e) $A = \{\text{kwadraty}\} \quad B = \{\text{prostokąty}\}$,

f) $A = \{a, \{a\}, \{b\}\} \quad B = \{\{a\}, \{b\}\}$,

g) $A = [-3, 1] \quad B = [-2, 3) \cup [5, \infty)$,

h) $A = \{x \in \mathbb{N}_0 : x < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 3\}$,

i) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 5x + 3 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 1 = 0\}$,

j) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 0 \wedge \log_2 x < 5\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : |\sin(\frac{\pi}{2}x)| = 1\}$.

9. Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $A \cap (B \cup C)$ dla:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 < 4\}$,

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 < 1\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 2\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\}$.

10. Oblicz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla następujących zbiorów:

a) $A=\{x\in\mathbb{N}:x<4\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}:x\geq 4\}$

b) $A=\{x\in\mathbb{N}:x<0\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}:x=2\}$

c) $A=\{x\in\mathbb{R}:x<2\}$ $B=\{x\in\mathbb{N}:x<2\}$

d) $A=\{x\in\mathbb{R}:x<2\}$ $B=\{x\in\mathbb{R}:x<4\}$

11. Zilustruj graficznie zbiory A, B, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, A^c dla:
   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:2x-y+3>0\}$ $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x+2y-1\leq 0\}$
   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2-y-1<0\}$ $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y-1\leq 0\}$

12. Uzasadnij poniższe równości używając diagramów Venna:
   a) $A\setminus B=B^c\setminus A^c$
   b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
   c) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
   d) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$
   e) $(A\cup C)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(C\setminus A)$

13. Które z poniższych równości są prawdziwe, jeśli $A\subseteq B$?
   a) $A\cap B=A$
   b) $A\setminus B=\emptyset$
   c) $(A\cup B)\setminus B=\emptyset$
   d) $A\cup B=A$
   e) $B\setminus A=B$
   f) $(A\cap B)\cup B=B$

14. Wypisz wszystkie elementy zbiorów $A\times B$ oraz $B\times A$ (gdzie przez $\times$ oznaczamy *iloczyn kartezjański*) dla:
   a) $A=\{1\}$ oraz $B=\{2,3\}$
   b) $A=\{a,b\}$ oraz $B=\{c,d,e\}$.

15. Niech $A=\{0,1,2,3,4\}$ oraz $B=\{0,2,4\}$. Wypisz elementy następujących zbiorów:
   a) $\{(m,n)\in A\times B:m<n\}$
   b) $\{(m,n)\in B\times A:m<n\}$
   c) $\{(m,n)\in A\times B:m+n\geq 3\}$
   d) $\{(m,n)\in A\times B:m+n=9\}$

16. Przyjmując, że punkty na płaszczyźnie są uporządkowanymi parami (a,b) liczb rzeczywistych, gdzie a jest odciętą, a b jest rzędną punktu, znajdź graficznie $A\times B$ oraz $B\times A$ dla następujących zbiorów:
   a) $A=\{x\in\mathbb{R}:1<x<2\}$ $B=\{y\in\mathbb{R}:0<y<1\}$
   b) $A=\{x\in\mathbb{R}:0<x\}$ $B=\{y\in\mathbb{R}:0<y\}$
   c) $A=\{y\in\mathbb{R}:-1<y<1\}$ $B=\{x\in\mathbb{R}:0\leq x<1\}$
   d) $A=\{x\in\mathbb{R}:x<1\vee x>1\}$ $B=\{y\in\mathbb{R}:y^2>0\}$
   e) $A=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\vee 2<x<3\}$ $B=\{x\in\mathbb{R}:1\leq x<2\vee 3<x\leq 4\}$
   f) $A=\{x\in\mathbb{R}:|x|<3\}$ $B=\{x\in\mathbb{R}:x^2>4\}$

17. Znajdź zbiór potęgowy (zbiór wszystkich podzbiorów) $\mathcal{P}(A)=2^A$ dla następujących zbiorów A:
   a) $A_1=\{a,b,c\}$,
   b) $A_2=\{1,2,3,4\}$,
   c) $A_3=\emptyset$,
   d) $A_4=\{7\}$,
   e) $A_5=\{\emptyset\}$,
   f) $A_6=\{\{a\},a\}$,
   g) $A_7=\{k\in\mathbb{Z}:|k-5|\leq 1\}$,
   h) $A_8=\{(m,n)\in\{0,1\}^2:m+n=1\}$.

18. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Udowodnij następujące własności różnicy symetrycznej:

a) $A \triangle B = B \triangle A$

b) $A \triangle \emptyset = A$

c) $A \triangle A = \emptyset$

d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

19. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$ oraz $B = \{y \in \mathbb{N} : |1 - y| < 7\}$. Wyznaczyć różnicę symetryczną $A \triangle B$.

20. Znaleźć $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dla zbiorów:

a) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$

b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right\}$

c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right\}$

d) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq x \leq 3\right\}$

e) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x \leq n + 1\}$