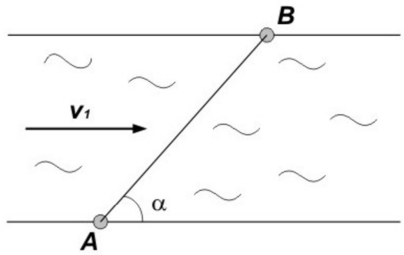
3. Kinematyka ruchu jednostajnego, zmiennego, jednostajnie zmiennego, rzuty.

Wybór i opracowanie zadań 3.1-3.22: Barbara Kościelska, zadań 3.23-3.25: Ryszard J. Barczyński i zadań 3.26-3.36: Krystyn Kozłowski.

3.1. Zależność drogi przebytej przez punkt materialny od czasu można opisać równaniem: $x(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3$, gdzie A, B i C są wielkościami stałymi wyrażonymi w odpowiednich jednostkach. Znaleźć zależność prędkości i przyspieszenia tego punktu od czasu.

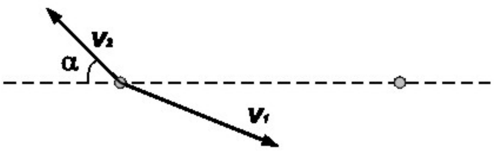
3.2.* Rakieta ustawiona jest na wysokości h nad powierzchnią ziemi. Po starcie porusza się pionowo w górę, a jej przyspieszenie zmienia się zgodnie z zależnością $a = \mathrm{k}t^2$, gdzie k jest stałą wyrażoną w odpowiednich jednostkach. Znaleźć zależność prędkości oraz drogi rakiety od czasu.

3.3. Prom kursuje pomiędzy punktami A i B leżącymi na przeciwległych brzegach rzeki. Odległość między punktami A i B wynosi d, a linia AB tworzy kąt α z brzegiem rzeki. Prędkość v_1 wody w rzece jest stała na całej szerokości rzeki. Jakie powinny być wartość i kierunek prędkości v_2 promu względem wody, aby przebył on drogę d w czasie t?



3.4.* Prędkość wody w rzece zmienia się wraz z szerokością rzeki według równania: $v = 4x^2 + 4x + 0{,}5$ [m/s], gdzie $x = a/b$ (a jest odległością od brzegu a b szerokością rzeki). O jaki odcinek prąd wody w rzece zniesie łódkę przy przeprawie na drugi brzeg, jeżeli prędkość v_l łódki względem wody jest stała i ma kierunek prostopadły do brzegu rzeki. szerokość rzeki wynosi d.

3.5. Znaleźć czas przelotu samolotu między dwoma punktami odległymi od siebie o L, jeżeli prędkość samolotu względem powietrza wynosi v_1, a prędkość przeciwnego wiatru skierowanego pod kątem α względem kierunku ruchu samolotu wynosi v_2.



3.6. Ciało rzucono pod kątem α do poziomu nadając mu prędkość v_0. (a) Napisać kinematyczne równania ruchu ciała. (b) Napisać równania toru ciała. (c) obliczyć czas lotu ciała. (d) Obliczyć zasięg rzutu. (e) Znaleźć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ciało.

3.7. Na jakiej wysokości wektor prędkości ciała wyrzuconego z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu, utworzy kąt β ($\alpha > \beta$) ? Nie uwzględniać oporu powietrza. Napisać kinematyczne równania ruchu ciała.

3.8. Z jaką prędkością poziomą v_1 powinien lecieć lotnik na wysokości h nad torami, w chwili gdy przelatuje on nad punktem A, aby puszczony przez niego ładunek trafił w uciekający z prędkością v_2 pociąg, który znajduje się w odległości d od A (samolot i pociąg poruszają się w tym samym kierunku)?

3.9. Dwa ciała wyrzucono jednocześnie z dwóch różnych punktów. Jedno ciało zostało rzucone poziomo z prędkością v_{0x} z wieży o wysokości h, drugie wyrzucono pionowo z prędkością v_{0y} z miejsca odległego o x_0 od podnóża wieży. Jaka powinna być prędkość v_{0y}, aby ciała zderzyły się w powietrzu?

3.10. Ciało spada swobodnie z wieży. W chwili, gdy przebyło ono drogę równą L, z punktu położonego o h metrów niżej od wierzchołka wieży zaczyna spadać drugie ciało. Oba ciała spadają na ziemię w tej samej chwili. Znaleźć wysokość wieży.

3.11. Z samolotu lecącego na wysokości h ze stałą prędkością poziomą v zostaje zrzucona bomba. Napisać równania ruchu, prędkości i przyspieszenia bomby względem obserwatora stojącego na ziemi oraz względem pilota samolotu.

3.12. W wagonie pociągu jadącego ze stałą prędkością v, jeden z pasażerów upuścił z wysokości h względem podłogi wagonu pudełko zapałek. Napisać równanie toru tego pudełka, w układzie odniesienia związanym z: (a) wagonem, (b) szynami.

3.13. Koło zamachowe wykonujące n_0 = 240 obr/min zatrzymuje się w czasie t_1 = 0,5 min. Przyjmując, że ruch jest jednostajnie zmienny obliczyć, ile obrotów koło wykonało do chwili zatrzymania się.

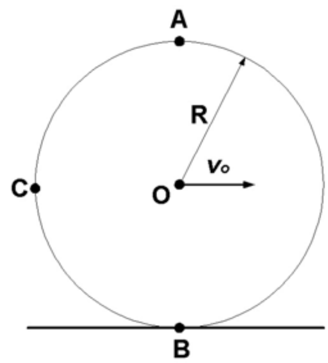
3.14. Równania ruchu punktu znajdującego się na obwodzie koła toczącego się bez poślizgu wzdłuż osi x mają postać:

$$x = R\sin\omega t + \omega R t$$

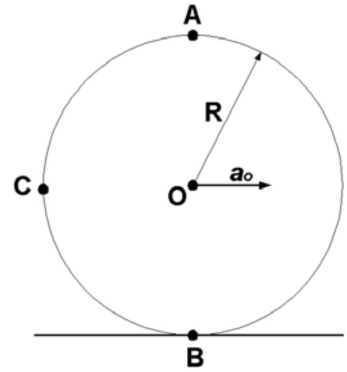
$$y = R\cos\omega t + R\,.$$

Oblicz prędkość i przyspieszenie punktu na obwodzie w chwili, gdy współrzędna y ma wartość (a) minimalną, (b) maksymalną, (c) $y = y_{max}/2$.

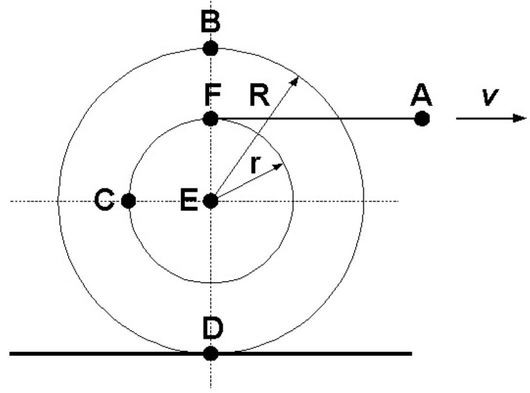
3.15. Obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej. Prędkość środka O obręczy jest stała i wynosi v_0. Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych prędkości i przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami A, B i C.



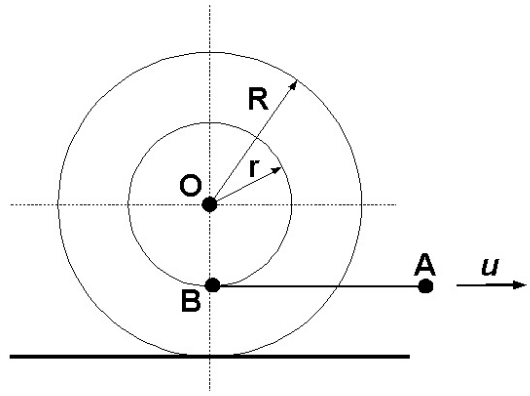
3.16. Obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej. Przyspieszenie środka O obręczy jest stałe i wynosi a_0. Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami A, B i C.



3.17. Koniec liny (A) przesuwa się ze stałą prędkością v skierowaną w prawo. Lina nawinięta jest na układ współśrodkowych, kołowych tarcz pokazanych na rysunku (promień małego koła = r, dużego = R). Oblicz wartości oraz wskaż kierunki i zwroty chwilowych prędkości i przyspieszeń tych punktów tarcz, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literami B, C, D, E i F.



3.18. Na szpulę o promieniach R i r nawinięto linę, której koniec A ma stałą prędkość u. Obliczyć, jaką drogę S_B przebędzie koniec A liny, gdy odcinek AB liny nawinie się na szpulę.



3.19. Koło obraca się wokół swojej osi. Znaleźć jego przyspieszenie kątowe jeżeli wiadomo, że po upływie czasu t od rozpoczęcia ruchu jednostajnie przyspieszonego, wektor całkowitego przyspieszenia punktu położonego na obwodzie tworzy kąt α z kierunkiem prędkości liniowej tego punktu.

3.20. Punkt materialny zaczyna poruszać się po okręgu z przyspieszeniem stycznym a_s. Znaleźć jego wypadkowe przyspieszenie a_w po $u = 0{,}1$ obrotu.

3.21.* Taśma magnetofonowa jest przewijana z drugiej szpulki na pierwszą, która obraca się ze stała prędkością kątową ω_1. W chwili początkowej promienie krążków nawiniętej taśmy były odpowiednio równe R_{01} i R_{02}. grubość taśmy wynosi a. Znaleźć: (a)zależność długości nawiniętej taśmy od czasu, (b) zależność prędkości przesuwu taśmy od czasu.

3.22. Ciało rzucono z pewnej wysokości z prędkością v_0 w kierunku poziomym. Obliczyć jego prędkość, przyspieszenie styczne i normalne oraz promień krzywizny toru po czasie t. Opory powietrza pominąć.

3.23. Narciarz na nartach wodnych porusza się częstokroć znacznie szybciej niż ciągnąca go motorówka. Jak to jest możliwe?

3.24. System napędu samochodu posiada w torze przeniesienia napędu tak zwany mechanizm różnicowy, który pozwala obracać się kołom samochodu z różną prędkością. Dlaczego jest to konieczne?

3.25. Ciało porusza się wzdłuż osi x według zależności $x = A\sin(\omega t)$, gdzie A i ω są wielkościami stałymi. Narysuj wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu. Jakie są maksymalne wartości prędkości i przyspieszenia?

3.26. Załoga statku Apollo umieściła na powierzchni Księżyca zwierciadło odbijające światło laserowe wysyłane z powierzchni Ziemi. Obliczyć odległość Księżyca od Ziemi wiedząc, że światło odbite od zwierciadła zarejestrowano po czasie $t = 2,6\ s.$ od chwili wysłania go z Ziemi. Przyjąć prędkość światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

3.27. Koń wykonał $n = 4$ okrążenia wokół kolistej areny cyrkowej o promieniu $r = 12\ m$ w czasie $t = 120\ s$, wracając do punktu wyjścia. Obliczyć

a) średnią wartość prędkości konia,
b) średni wektor prędkości konia.

3.28. Samochód przebył pierwszą połowę drogi ze stałą prędkością $v_1 = 20\ m/s$, a drugą połowę ze stałą prędkością $v_2 = 30\ m/s$. Obliczyć średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi.

3.29. W pierwszej połowie czasu swojego ruchu samochód jechał ze stałą prędkością $v_1 = 20\ m/s$, a w drugiej połowie czasu, ze stałą prędkością $v_2 = 30\ m/s$. Obliczyć średnią prędkość samochodu na całym odcinku drogi

3.30. Łódka płynie rzeką z miejscowości A do B i z powrotem. Prędkość łódki względem wody $v_1 = 5\ m/s$, a prędkość wody względem brzegów rzeki $v_2 = 2\ m/s$. Obliczyć średnią wartość prędkości łódki względem brzegów rzeki na całym odcinku jej drogi.

3.31. Pociąg jadący z prędkością $v_0 = 18\ m/s$ zaczyna hamować i zatrzymuje się w ciągu czasu $t = 15\ s$. Obliczyć przyspieszenie a i drogę s przebytą przez pociąg do chwili zatrzymania się zakładając, że w czasie hamowania poruszał się on ruchem jednostajnie zmiennym.

3.32. Swobodnie puszczona kulka stalowa odbija się (bez strat energii) od poziomej, doskonale sprężystej powierzchni, uderzając w nią co jedną sekundę. Jak wysoko podskakuje kulka? Przyjąć $g = 10\ m/s^2$.

3.33. Z pewnego miejsca nad powierzchnią Ziemi zaczęło spadać swobodnie ciało A. Po określonym odstępie czasu $\Delta t = const.$, z tego samego miejsca, zaczęło spadać swobodnie ciało B. Jakim ruchem porusza się jedno z tych ciał względem drugiego ?

3.34. Z powierzchni Ziemi wyrzucono pionowo do góry ciało A z prędkością początkową v_0, niezbędną do osiągnięcia maksymalnej wysokości H. Jednocześnie, z punktu położonego na wysokości H nad powierzchnią Ziemi, zaczęło spadać swobodnie ciało B. Na jakiej wysokości h nad powierzchnią Ziemi ciała te spotkają się?

3.35. Struga wody wypływa z rury z prędkością $v_0 = 20\ m/s$ pod kątem $\alpha = 45^0$ do poziomu. Na jakiej wysokości h trafi ona w ścianę znajdującą się w odległości $d = 60\ m$ od wylotu strugi? Przyjąć $g = 10\ m/s^2$, wpływ oporu powietrza pominąć. Podać krótką interpretację uzyskanego wyniku.

3.36*. Pocisk artyleryjski rozerwał się na dwa fragmenty, które zaczęły się poruszać w polu grawitacyjnym Ziemi z prędkościami początkowymi (nie pionowymi) o takich samych wartościach, ale o zwrotach przeciwnych: $\vec{v}_{01} = \vec{v}_0$, $\vec{v}_{02} = -\vec{v}_0$. Po jakim czasie od rozerwania się pocisku wektory prędkości obu fragmentów będą wzajemnie do siebie prostopadłe? Przyspieszenie grawitacyjne równe jest g.

Rozwiązania:

3.1.R. Korzystając z definicji prędkości chwilowej oraz przyspieszenia chwilowego otrzymamy następujące równania opisujące zależność prędkości v i przyspieszenia a od czasu:

$$v = \frac{dx}{dt} = A + 2Bt + 3Ct^2 \ ,$$

oraz

$$a = \frac{dv}{dt} = 2B + 6Ct \ .$$

3.2.R.* Przyspieszenie rakiety dane jest równaniem:

$$(1) \quad a = kt^2 \ .$$

Przyspieszenie chwilowe:

$$(2) \quad a = \frac{dv}{dt} \ .$$

Z (1) i (2):

$$\frac{dv}{dt} = kt^2 \ ,$$

$$dv = kt^2\, dt \ ,$$

$$(3) \quad v = \int kt^2\, dt = \frac{1}{3}kt^3 + C_1 \ ,$$

gdzie C_1 jest stałą. Wiadomo, że w chwili czasu $t = 0$, $v = 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (3) otrzymamy stałą $C_1 = 0$, czyli zależność prędkości rakiety od czasu:

$$(4) \quad v = \frac{1}{3}kt^3 \quad .$$

Prędkość chwilowa:

$$(5) \quad v = \frac{ds}{dt} \quad .$$

Z (4) i (5):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}kt^3 \quad ,$$

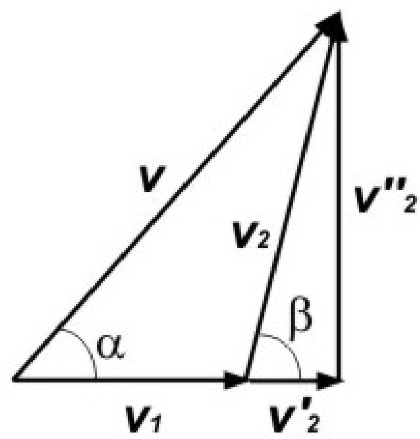
$$ds = \frac{1}{3}kt^3\, dt \quad ,$$

$$(6) \quad s = \int \frac{1}{3}kt^3\, dt = \frac{1}{12}kt^4 + C_2 \quad ,$$

gdzie C_2 jest stałą. Wiadomo, że w chwili czasu $t = 0$ rakieta znajdowała się na wysokości h nad powierzchnią ziemi, czyli $s = h$. Podstawiając te wartości do równania (6) otrzymamy stałą $C_2 = h$, czyli zależność drogi przebytej przez rakietę od czasu:

$$s = h + \frac{1}{12} k t^4 \quad .$$

3.3.R. Prędkość v promu względem brzegu jest wypadkową prędkości v_1 wody w rzece i prędkości v_2 promu względem wody.



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \; .$$

Wektor prędkości v_2 można rozłożyć na dwie składowe: równoległą (v'_2) i prostopadłą do brzegu rzeki (v''_2). Wartości tych składowych można zapisać:

$$(1) \qquad \begin{aligned} v'_2 &= v\cos\alpha - v_1 \; , \\ v''_2 &= v\sin\alpha \; . \end{aligned}$$

Wiadomo, iż prom musi pokonać drogę d w czasie t, czyli jego prędkość v:

$$v = \frac{d}{t} \; .$$

Równania (1) przybiorą wówczas postać:

$$v'_2 = \frac{d}{t}\cos\alpha - v_1 \; ,$$

$$v''_2 = \frac{d}{t}\sin\alpha \; .$$

Z rysunku wynika, że:

$$v_2 = \sqrt{v'^2_2 + v''^2_2} = \sqrt{\left(\frac{d}{t}\cos\alpha - v_1\right)^2 + \left(\frac{d}{t}\sin\alpha\right)^2} \; .$$

Kierunek wektora prędkości v_2 znajdujemy znajdując wartość kąta β:

$$\tan\beta = \frac{v''_2}{v'_2} = \frac{d\sin\alpha}{d\cos\alpha - v_1 t} \; .$$

3.4.R.* Odcinek s o jaki prąd wody w rzece zniesie łódkę w czasie t_1 jej przeprawy na drugą stronę rzeki:

$$(1) \qquad s = \int_0^{t_1} v\,dt \; ,$$

gdzie:

$$v = 4x^2 + 4x + 0{,}5 \; ,$$

$$x = a/b \; .$$

Czas przeprawy można zdefiniować jako:

$$t_1 = \frac{b}{v_l}.$$

Czas t, w którym łódka znajduje się w odległości a od brzegu:

$$t = \frac{a}{v_l} = \frac{bx}{v_l},$$

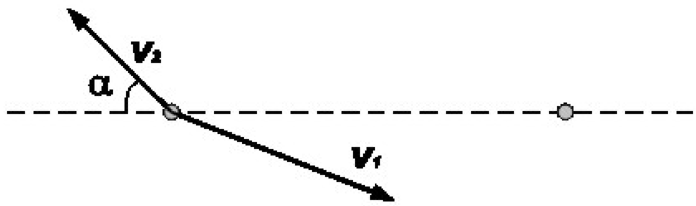
skąd:

$$dt = \frac{b}{v_l} dx.$$

Wówczas równanie (1):

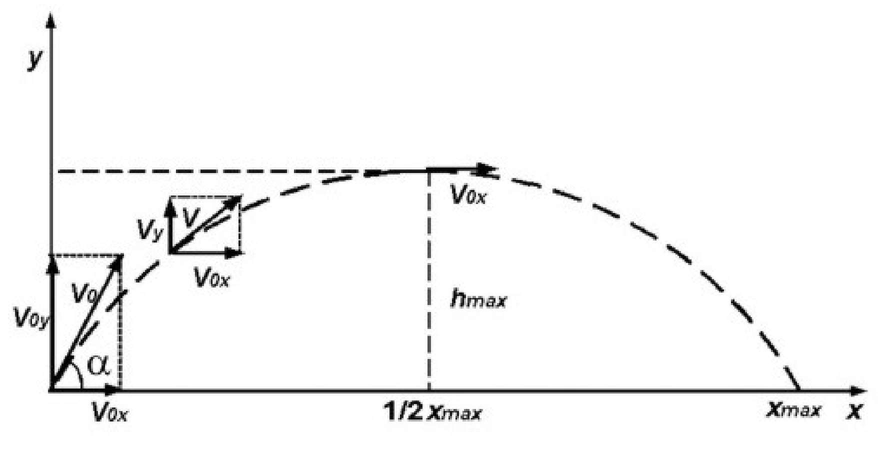
$$s = \frac{b}{v_l} \int_0^1 (-4x^2 + 4x + 0{,}5) dx = \frac{b}{v_l} (-\frac{4}{3} + 2 + 0{,}5) \cong 1{,}17 \frac{b}{v_l}.$$

3.5.R. Wskazówka: Prędkość samolotu względem ziemi jest wypadkową prędkości samolotu względem powietrza oraz prędkości wiatru. Wówczas czas przelotu samolotu między dwoma punktami odległymi od siebie o L wynosi:



$$t = \frac{L}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2 \sin^2 \alpha} - v_2 \cos \alpha}.$$

3.6.R.



(a) Równania ruchu mają postać:

$$(1) \quad x = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha,$$

$$(2) \quad y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

(b) Równanie toru ciała:

Wyznaczając czas z równania (1):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

i podstawiając do równania (2) otrzymamy równanie toru ciała:

$$y = \tan\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 .$$

Torem ciała jest parabola skierowana ramionami w dół.

(c) Czas lotu ciała, t_z, można obliczyć podstawiając w równaniu (2) $y = 0$:

$$0 = v_0 t_z \sin\alpha - \frac{g t_z^2}{2} .$$

Czyli:

$$t_{z1} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{lub} \quad t_{z2} = 0 .$$

Czas $t_{z2} = 0$ oznacza moment, w którym dopiero rozpoczyna się lot kamienia, czyli czas lotu ciała $t_z = t_{z1}$:

$$(3) \quad t_z = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \quad .$$

(d) Zasięg rzutu, z, można obliczyć podstawiając w równaniu (1) $t = t_z$ (czyli czas całego lotu opisany równaniem (3)). Wówczas współrzędna x będzie równa zasięgowi rzutu, $x = z$:

$$z = v_0 t_z \cos\alpha .$$

Otrzymamy wówczas:

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} .$$

(e) Czas w jakim ciało wzniesie się na maksymalna wysokość jest równy połowie czasu t_z (równanie (3)). Podstawiając w równaniu (2) $t = ½t_z$ otrzymamy maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się ciało:

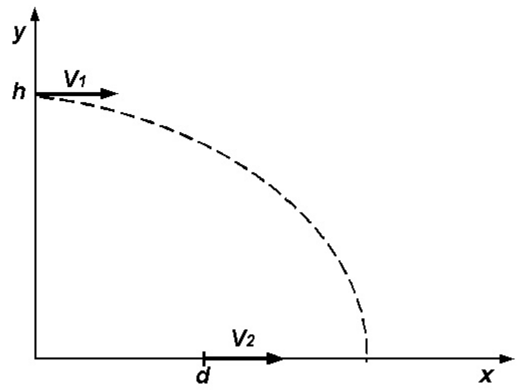
$$h_{\max} = v_0 \frac{1}{2} t_z \sin\alpha - \frac{g\left(\frac{1}{2} t_z\right)^2}{2} ,$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} .$$

3.7.R. Odpowiedź: Równania ruchu są takie same jak w zadaniu 3.6, a szukana wysokość wynosi:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \tan^2\beta\right)$$

3.8.R. Równania ruchu pocisku (1) i pociągu (2) w przedstawionym na rysunku układzie współrzędnych mają postać:



$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = v_1 t \\ y_1 = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases},$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_2 = d + v_2 t \\ y_2 = 0\,. \end{cases}$$

Współrzędne x_1 i y_1 pocisku muszą w momencie trafienia być równe współrzędnym x_2 i y_2 pociągu. W rezultacie otrzymujemy:

$$v_1 = \frac{d}{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}} + v_2\,.$$

3.9.R. Odpowiedź:

$$v_{0y} = \frac{h}{x_0} v_{0x}\,.$$

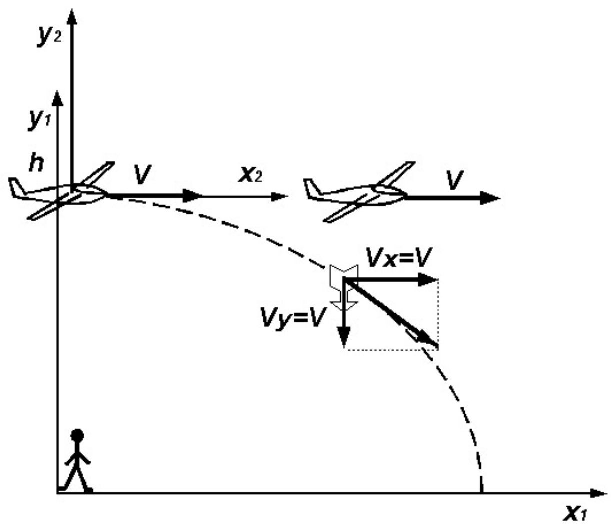
3.10.R. Odpowiedź:

$$H = \frac{(L+h)^2}{4L}\,.$$

3.11.R. Z punktu widzenia obserwatora stojącego na ziemi prędkość bomby w kierunku poziomym jest równa prędkości samolotu v i pozostaje stała. Równania ruchu bomby w układzie odniesienia (x_1,y_1), związanym z obserwatorem stojącym na ziemi mają postać:

$$x_1 = vt\,,$$

$$y_1 = h - \frac{gt^2}{2}\,.$$



Różniczkując powyższe równania ruchu otrzymujemy równania prędkości:

$$v_{1x} = v\,,$$

$$v_{1y} = -gt\,.$$

Różniczkując równania opisujące prędkość otrzymamy przyspieszenia:

$$a_{1x} = 0\,,$$

$$a_{1y} = -g.$$

W układzie odniesienia (x_2,y_2) związanym z pilotem równania ruchu bomby w przyjętym układzie współrzędnych mają postać:

$$x_2 = 0\,,$$

$$y_2 = -\frac{gt^2}{2}\,.$$

Różniczkując powyższe równania ruchu otrzymujemy równania prędkości:

$$v_{2x} = 0\,,$$

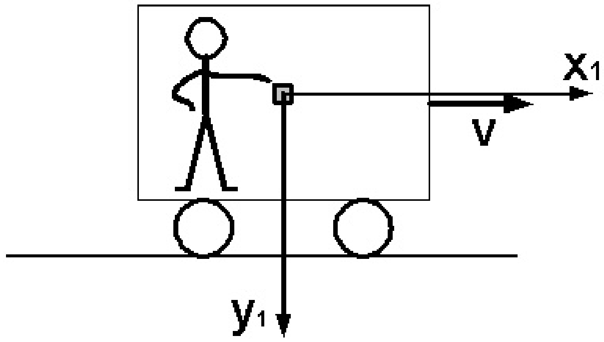
$$v_{2y} = -gt\,.$$

Różniczkując równania opisujące prędkość otrzymamy przyspieszenia:

$$a_{2x} = 0\,,$$

$$a_{2y} = -g.$$

3.12.R. (a) W układzie odniesienia (x_1,y_1) związanym z wagonem równania ruchu mają postać:



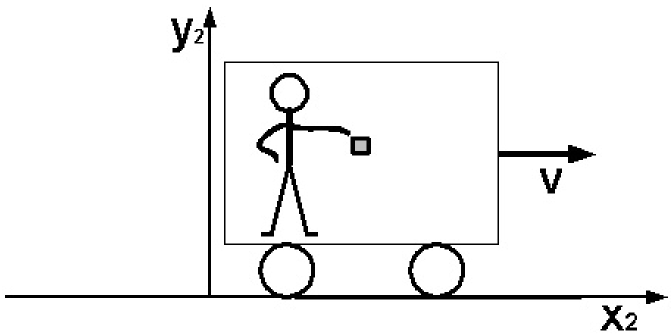
$$x_1 = 0\,,$$

$$y_1 = \frac{gt^2}{2}\,,$$

czyli równanie toru:

$$x_1 = 0\,.$$

(b) W układzie odniesienia (x_2, y_2) związanym z szynami:



$$x_2 = vt\,,$$

$$y_2 = h - \frac{gt^2}{2}\,.$$

Równanie toru:

$$y_2 = h - \frac{g}{2v^2}x_2^2\,.$$

3.13.R. Ilość obrotów można zdefiniować jako stosunek drogi kątowej φ, którą przebył dowolny punkt znajdujący się na obwodzie koła w czasie t_1, do kąta 2π:

$$(1) \quad N = \frac{\varphi_1}{2\pi} .$$

Ruch koła jest ruchem jednostajnie opóźnionym, czyli droga kątowa przebyta przez wybrany punkt znajdujący się na jego obwodzie:

$$(2) \quad \varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{2} .$$

Ponieważ po czasie t_1 koło się zatrzymuje, więc:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t_1 = 0 ,$$

czyli:

$$(3) \quad \omega_0 = \varepsilon t_1 = 2\pi n_0 .$$

Z (2) i (3) otrzymamy:

$$(4) \quad \varphi_1 = \pi n_0 t_1 .$$

Podstawiając (4) do (1) otrzymamy:

$$N = \frac{n_0 t_1}{2} = 60 \; obrotów .$$

3.14.R. Równania ruchu punktu mają postać:

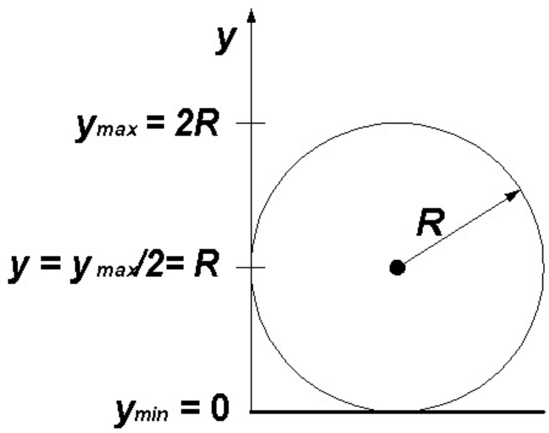
$$(1) \quad \begin{aligned} x &= R\sin\omega t + \omega R t , \\ y &= R\cos\omega t + R . \end{aligned}$$

Różniczkując równania ruchu otrzymamy prędkość:

$$(2) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = R\omega\cos\omega t + \omega R , \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -R\omega\sin\omega t , \end{aligned}$$

Różniczkując równania prędkości otrzymamy przyspieszenie:

$$(3) \quad \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \sin\omega t , \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2 \cos\omega t . \end{aligned}$$



(a) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość minimalną (czyli y = 0), gdy cos(ωt) = -1. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

$$v_x = 0\,,$$
$$v_y = 0.$$

$$a_x = 0\,,$$
$$a_y = R\omega^2\,.$$

(b) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość maksymalną (czyli $y = 2R$), gdy cos(ωt) = 1. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

$$v_x = 2\omega R\,,$$
$$v_y = 0.$$

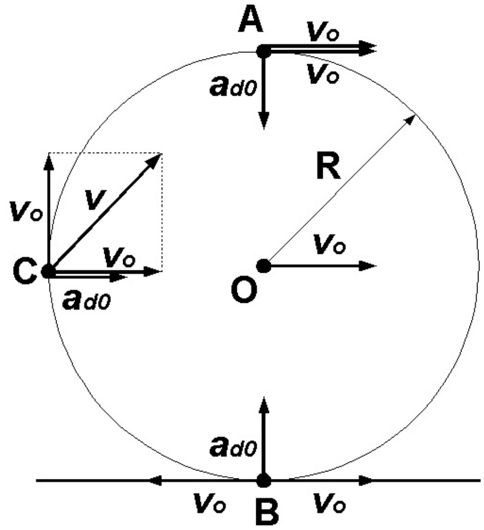
$$a_x = 0\,,$$
$$a_y = -R\omega^2\,.$$

(c) Z równań ruchu (1) wynika, że współrzędna y ma wartość równą połowie wartości maksymalnej (czyli $y = R$), gdy cos(ωt) = 0. Prędkość (2) i przyspieszenie (3) punktu są wówczas odpowiednio równe:

$$v_x = \omega R\,,$$
$$v_y = -\omega R\,.$$

$$a_x = -\,R\omega^2,$$
$$a_y = 0\,.$$

3.15.R.



Punkt A:

Prędkość w punkcie A jest sumą prędkości v_0 z jaką porusza się środek obręczy oraz prędkości stycznej do obręczy, wynikającej z jej ruchu obrotowego. W rozważanym przypadku wartość prędkości stycznej jest równa v_0.

$$v_A = v_0 + v_0 = 2v_0 \, .$$

Prędkość kątowa ω punktów znajdujących się na obręczy:

$$\omega = \frac{v_0}{R} \, .$$

Przyspieszenie punktu A jest przyspieszeniem dośrodkowym:

$$a_A = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} \, .$$

Przyspieszenie wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.

Punkt B:

$$v_A = v_0 - v_0 = 0,$$

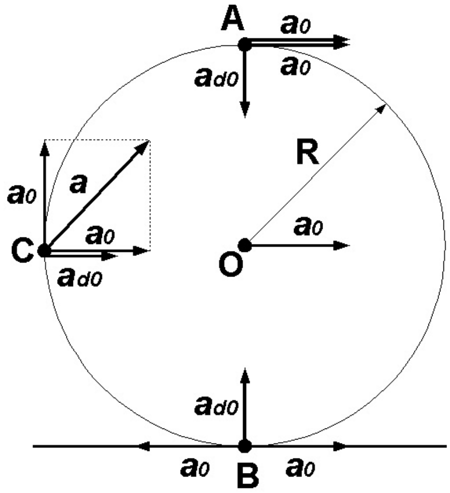
$$a_B = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} \, .$$

Punkt C:

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = v_0\sqrt{2} \, ,$$

$$a_B = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} \, .$$

3.16.R.



Przyspieszenie styczne w punkcie A jest sumą przyspieszeń a_0 z jakim porusza się środek obręczy oraz przyspieszenia stycznego, wynikającego z jej ruchu obrotowego. Wartość przyspieszenia stycznego wynosi a_0.

$$a_A = a_0 + a_0 = 2a_0 \,.$$

Przyspieszenie kątowe ε punktów znajdujących się na obręczy:

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R} \,.$$

Przyspieszenie kątowe wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.
Przyspieszenie dośrodkowe punktu A w danej chwili czasu t:

$$a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(a_0 t)^2}{R} \,.$$

Przyspieszenie dośrodkowe wszystkich punktów znajdujących się na obręczy jest takie samo.

Punkt B:

$$a_A = a_0 - a_0 = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R} \,,$$

$$a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(a_0 t)^2}{R} \,.$$

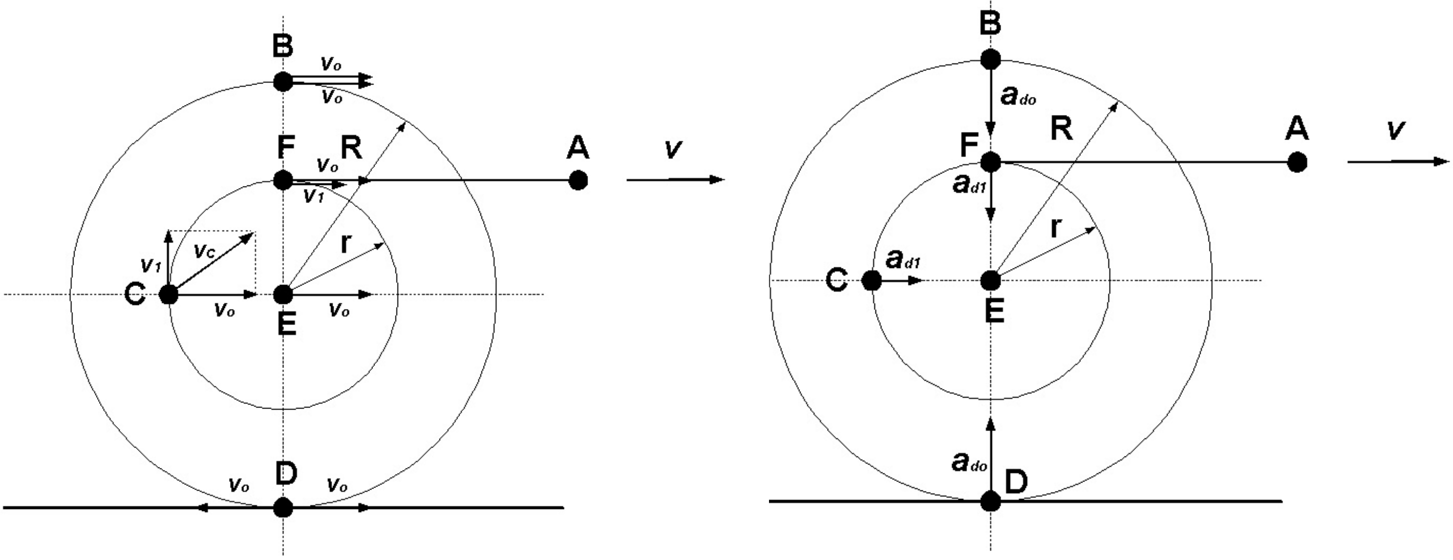
Punkt C:

$$a_C = \sqrt{a_0^2 + a_0^2} = a_0\sqrt{2} \,,$$

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R} \,,$$

$$a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{(a_0 t)^2}{R} \,.$$

3.17.R.



Punkt F:

Wypadkowa prędkość punktu F jest równa prędkości *v*, z którą przesuwa się punkt A:

$$v_F = v\ ,$$

Prędkość *v* w punkcie F można rozłożyć na dwie składowe: prędkość v_0, która jest prędkością ruchu postępowego szpuli oraz prędkość v_1 wynikającą z ruchu obrotowego szpuli wokół punktu E:

$$v = v_0 + v_1 = \omega R + \omega r = \omega(R + r)\ ,$$

skąd

$$\omega = \frac{v}{R + r}\ .$$

Przyspieszenie dośrodkowe a_F punktu F wynosi:

$$a_F = a_{d1} = \omega^2 r = \frac{v^2 r}{(R + r)^2}\ .$$

Punkt E:

$$v_E = v_0 = \omega R = \frac{vR}{R + r}\ ,$$

$$a_E = 0.$$

Punkt D:

$$v_D = v_0 - v_0 = 0$$

$$a_D = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v^2 R}{(R + r)^2}\ .$$

Punkt B:

$$v_B = v_0 + v_0 = 2v_0 = 2\omega R = \frac{2vR}{R + r}\ ,$$

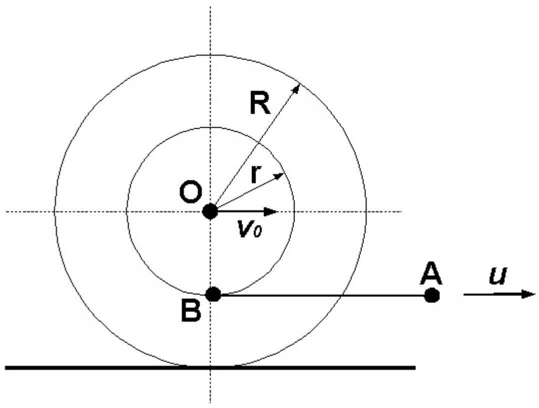
$$a_B = a_{d0} = \omega^2 R = \frac{v^2 R}{(R+r)^2}.$$

Punkt C:

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{(\omega R)^2 + (\omega r)^2} = \frac{v}{R+r}\sqrt{R^2 + r^2} \ ,$$

$$a_C = a_{d1} = \omega^2 r = \frac{v^2 r}{(R+r)^2}.$$

3.18.R.



Wskazówka: W jednakowym czasie t droga (S_0) środka O szpuli będzie większa o odcinek AB od drogi (S_B) punktów, które w rozważanej chwili znajdują się w punktach oznaczonych literą B:

$$S_0 = S_B + AB \ ,$$

gdzie:

$$S_0 = v_0 t \ ,$$

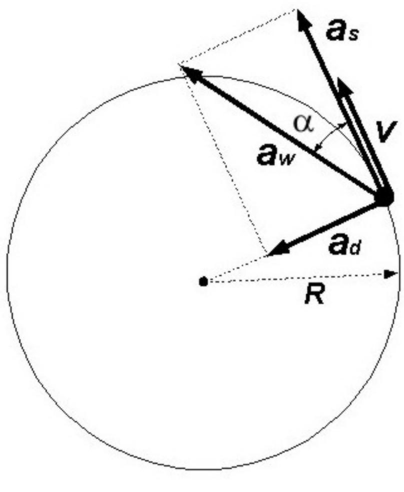
$$S_B = ut \ .$$

Odpowiedź:

$$S_B = \frac{AB(R-r)}{r} \ .$$

3.19.R. Wypadkowy wektor przyspieszenia a_w jest sumą wektorów przyspieszeń stycznego i dośrodkowego, a jego wartość można zapisać jako:

$$(1) \quad a_w^2 = a_d^2 + a_s^2 \ .$$



Przyspieszenie styczne a_s:

$$(2) \quad a_s = a_w \cos\alpha \ ,$$

oraz

$$(3) \quad a_s = \varepsilon R \ ,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym. Z (2) i (3):

$$(4) \quad a_w = \frac{\varepsilon R}{\cos\alpha} .$$

Przyspieszenie dośrodkowe a_d:

$$(5) \quad a_d = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R .$$

Podstawiając (3), (4) i (5) do (1) otrzymamy:

$$\frac{\varepsilon^2 R^2}{\cos^2\alpha} = \varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2 ,$$

skąd

$$\varepsilon = \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{tg\alpha}{t^2} .$$

3.20.R. Odpowiedź:

$$a_w = a_s\sqrt{1+4\pi u} .$$

3.21*.R. (a) Promień szpulki przy jej obrocie o kąt φ można opisać równaniem:

$$R = R_0 \pm a\frac{\varphi}{2\pi} ,$$

gdzie znak + dotyczy nawijania a - odwijania się taśmy. Zatem długość taśmy nawiniętej po obrocie szpulki o pewien kąt φ_1:

$$s = \int_0^{\varphi_1} (R_{01} + \frac{a\varphi}{2\pi})d\varphi = R_{01}\varphi_1 + \frac{a}{4\pi}\varphi_1^2 .$$

Ponieważ szpulki obracają się ze stałą prędkością, to:

$$\varphi_1 = \omega_1 t ,$$

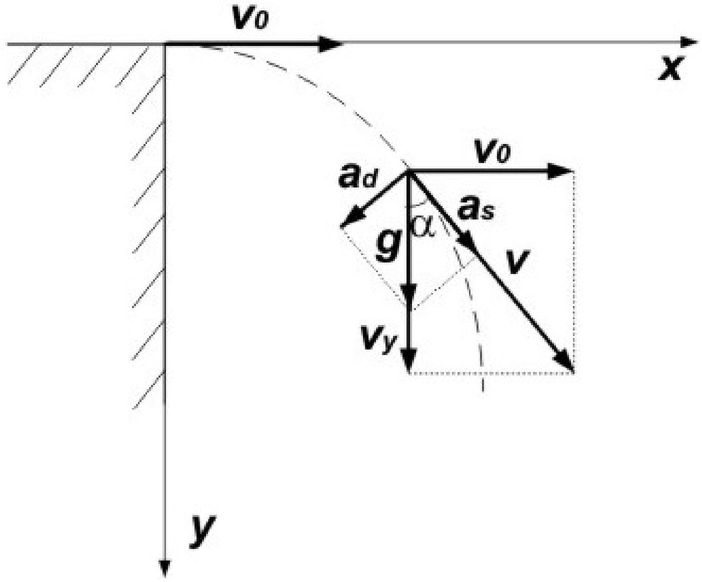
gdzie t oznacza czas, w ciągu którego szpulka obróciła się o kąt φ_1. Wówczas długość taśmy s wynosi:

$$s = R_{01}\omega_1 t + \frac{a}{4\pi}\omega_1^2 t^2 .$$

(b) Prędkość przesuwu taśmy:

$$v = \frac{ds}{dt} = R_{01}\omega_1 + \frac{a}{2\pi}\omega_1^2 t .$$

3.22.R.



Prędkość v kamienia w chwili czasu t jest wypadkową prędkości v_0 w kierunku poziomym i prędkości v_y w kierunku pionowym. Jej wartość wynosi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}\ .$$

Przyspieszenie styczne:

$$a_s = g\cos\alpha = g\frac{v_y}{v} = g\frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\ .$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = g\sin\alpha = g\frac{v_0}{v} = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}\ .$$

3.23.R. Jeżeli założymy, że lina łącząca narciarza i motorówkę jest cały czas napięta, to w każdym memencie jedynie rzut chwilowej prędkości narciarza i łodzi na kierunek liny musi być jednakowy. Wartość każdej z prędkości będzie zależała od kąta pomiędzy jej kierunkiem, a kierunkiem liny.

3.24.R. Na zakręcie koła wewnętrzne pokonują mniejszą drogę niż zewnętrzne. Jeżeli koła byłyby związane na sztywno, musiałby wystąpić poślizg jednego z kół. Mechanizm różnicowy, który pozwala obracać się kołom samochodu z różną prędkością, zapobiega temu poślizgowi. (Tramwaje starego typu nie posiadały mechanizmu różnicowego i na zakrętach powodowały spory hałas).

3.25.R. Odpowiedź:
Maksymalna wartość prędkości: $v_{max}=A\omega$, maksymalna wartość przyspieszenia: $a_{max}=A\omega^2$.

3.26.R. Prędkość w ruchu jednostajnym:

$$v = \frac{s}{t},$$

gdzie:

$s = 2l$ - droga przebyta przez światło wysłane z powierzchni Ziemi i powracające po odbiciu od zwierciadła umieszczonego w odległości l od źródła światła.

$v = c$ - prędkość światła,

skąd:

$$l = \frac{vt}{2} = 390000 km.$$

3.27.R. a) Średnia wartość prędkości:

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie:

$\Delta s = n \cdot 2\pi r$ - całkowita droga przebyta przez konia,

$\Delta t = t$ - czas ruchu konia.

Stąd:

$$v_{śr} = n\frac{2\pi t}{t} = 2{,}51 m/s.$$

b) Średni wektor prędkości:

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

gdzie:

$\Delta \vec{r}$ - wektor przemieszczenia (zmiany położenia) konia,

Δt - czas ruchu konia.

Ponieważ koń, po okrążeniu areny, wrócił do punktu startu, więc $\Delta \vec{r} = 0$ i ostatecznie:

$$\vec{v}_{śr} = 0$$

3.28.R. Średnia prędkość:

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

gdzie:

$\Delta s = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s$ - całkowita droga przebyta przez samochód,

$\Delta t = t_1 + t_2$ - całkowity czas ruchu samochodu, przy czym:

$t_1 = \frac{s}{2v_1}$ - czas, w którym samochód przebył pierwszą połowę drogi z prędkością v_1,

$t_2 = \frac{s}{2v_2}$ - czas, w którym samochód przebył drugą połowę drogi z prędkością v_2.

Średnia prędkość samochodu jest więc równa:

$$v_{śr} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 24 m/s.$$

Wniosek: Średnia prędkość samochodu nie jest, w tym przypadku, średnią arytmetyczną prędkości v_1 i v_2 (*25 m/s*). Wynika to z faktu, że samochód jechał dłużej z mniejszą prędkością v_1, a więc prędkość ta silniej wpłynęła na jego prędkość średnią, niż większa prędkość v_2, z którą samochód jechał krócej.

3.29.R. Średnia prędkość:

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie:

$\Delta t = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$ - całkowity czas ruchu samochodu,

$\Delta s = s_1 + s_2$ - całkowita droga przebyta przez samochód, przy czym:

$s_1 = v_1 \frac{t}{2}$ - droga przebyta przez samochód w pierwszej połowie czasu z prędkością v_1,

$s_2 = v_2 \frac{t}{2}$ - droga przebyta przez samochód w drugiej połowie czasu z prędkością v_2.

Średnia prędkość samochodu jest więc równa:

$$v_{śr} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 25 m/s.$$

Wniosek: W tym przypadku średnia prędkość samochodu jest średnią arytmetyczną prędkości v_1 i v_2, ponieważ czas ruchu samochodu z każdą z tych prędkości był taki sam. .

3.30.R. Łódka przebyła dwa jednakowe odcinki drogi AB i BA z wypadkowymi prędkościami:

$v_{AB} = v_1 - v_2$ - ruch łódki w górę rzeki,

$v_{BA} = v_1 + v_2$ - ruch łódki w dół rzeki.

Średnia wartość prędkości łódki na całym odcinku drogi (patrz rozwiązanie zadania **3.28.R.**):

$$v_{śr} = \frac{2v_{AB}v_{BA}}{v_{AB} + v_{BA}} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1} = 4{,}2 \frac{m}{s}.$$

3.31.R. Kinematyczne równania ruchu jednostajnie zmiennego mają postać:

$v = v_0 + at$

oraz:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Pociąg zatrzyma się, gdy $v = 0$, skąd:

$$a = -\frac{v_0}{t} = -1{,}2 \frac{m}{s^2} \text{ (ruch jednostajnie opóźniony)}$$

oraz:

$$s = v_0 t - \frac{v_0}{t}\frac{t^2}{2} = \frac{v_0 t}{2} = 135 m.$$

3.32.R. Kulka, odbijająca się bez straty energii od poziomej powierzchni, wznosi się na wysokość h, równą wysokości, z jakiej została swobodnie puszczona:

$$h = \frac{g t_h^2}{2},$$

gdzie:

t_h – czas spadku kulki z wysokości h, równy czasowi wznoszenia się kulki na wysokość h po jej odbiciu się od poziomej powierzchni, a więc równy połowie odstępu czasu Δt, w którym kulka uderza o sprężystą powierzchnię:

$$t_h = \frac{\Delta t}{2},$$

skąd otrzymamy:

$$h = \frac{g(\Delta t)^2}{8} = 1{,}25m.$$

3.33.R. Obliczmy prędkość względną ciała A względem ciała B.
Spadające swobodnie ciało A porusza się z prędkością v_A opisaną równaniem:

$$v_A = gt.$$

Ciało B zaczęło spadać o Δt później, więc jego prędkość opisana jest równaniem:

$$v_B = g(t - \Delta t).$$

Prędkość względna dwóch ciał, których zwroty prędkości są zgodne, równa jest różnicy ich prędkości, więc:

$$v_w = v_A - v_B = g\Delta t.$$

ponieważ:

$$g = const. \text{ oraz } \Delta t = const.,$$

więc: $v_w = const.,$
Prędkość względna ciała A względem ciała B jest wartością stałą, a więc ciała te poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym.

3.34.R. Droga przebyta przez ciało A (rzut pionowy do góry):

$$s_A = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

droga przebyta przez ciało B (swobodny spadek):

$$s_B = \frac{gt^2}{2}.$$

Ciała spotkają się, gdy:

$$s_A + s_B = H,$$

gdzie:

$H = \frac{v_0^2}{2g}$ - maksymalna wysokość w rzucie pionowym,

a więc:

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

lub:

$$v_0 t = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Możemy stąd obliczyć czas, po którym spotkają się ciała:

$$t = \frac{v_0}{2g}$$

oraz wysokość, na jakiej to nastąpi.
Będzie ona równa drodze s_A przebytej przez ciało A w obliczonym poprzednio czasie:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_o^2}{8g} = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{2g} = \frac{3}{4}H.$$

3.35.R. Rzut ukośny jest ruchem złożonym z ruchów prostych o równaniach:

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

oraz

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Eliminując z tych równań czas *t* możemy znaleźć równanie toru ciała:

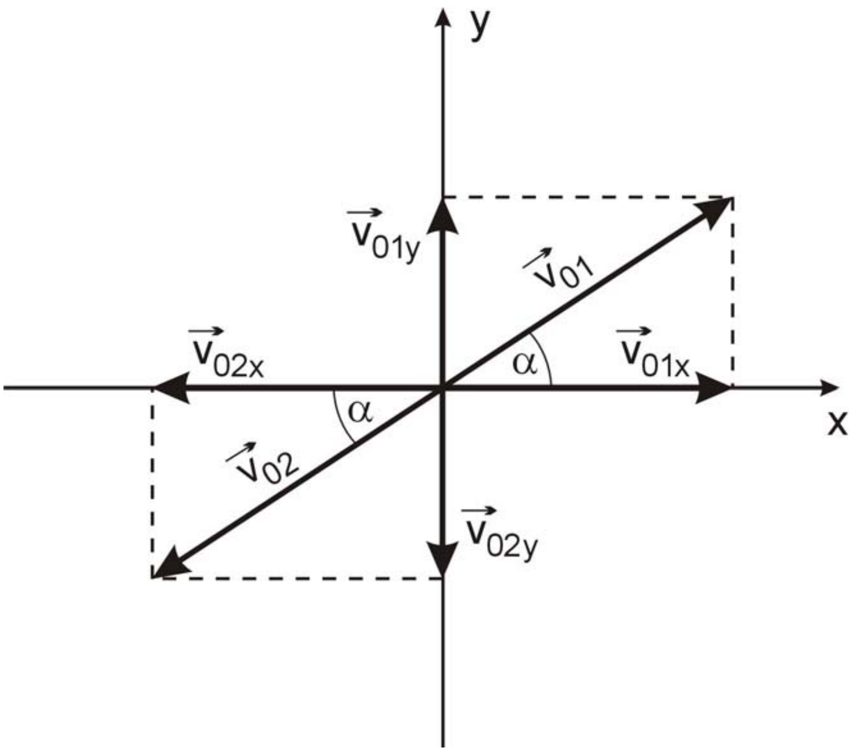
$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2$$

Podstawiając $x = d$, otrzymamy z tego równania wysokość $y = h$, na jakiej znajdzie się wtedy struga wody:

$$h = d \cdot tg\alpha - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} d^2 .$$

Po wstawieniu wartości liczbowych, otrzymamy: *h = - 30 m.*
Znak minus oznacza, że woda trafia w ścianę poniżej poziomu wylotu strugi.

3.36.R*. Ruchy obu fragmentów pocisku, po jego rozerwaniu się, są rzutami ukośnymi, których wektory prędkości początkowej mają takie same wartości i kierunki, ale przeciwne zwroty: $\vec{v}_{01} = \vec{v}_0$, $\vec{v}_{02} = -\vec{v}_0$.



Po rozłożeniu wektorów prędkości początkowej na składowe, otrzymamy:

$$v_{01x} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_{02x} = -v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{01y} = v_0 \sin\alpha, \qquad v_{02y} = -v_0 \cos\alpha.$$

Zmiany wektorów prędkości fragmentów pocisku w czasie ich ruchu opisane są równaniami:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{v}_2 = -\vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

co, po rozłożeniu na składowe (uwzględniając zwrot wektora $\vec{g}$), prowadzi do związków:

$$v_{1x} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_{2x} = -v_0 \cos\alpha,$$

$$v_{1y} = v_0 \sin\alpha - gt, \qquad v_{2y} = -v_0 \sin\alpha - gt.$$

Iloczyn skalarny wektorów wzajemnie prostopadłych jest równy zeru, a więc wektory prędkości obu fragmentów pocisku będą do siebie prostopadłe po spełnieniu warunku:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} = 0,$$

czyli:

$$-v_0^2 \cos^2\alpha - (v_0 \sin\alpha - gt)(v_0 \sin\alpha + gt) = 0,$$

co, po prostych przekształceniach, prowadzi do związku:

$$g^2 t^2 - v_0^2 = 0,$$

a więc wektory prędkości obu fragmentów pocisku będą wzajemnie do siebie prostopadłe po czasie:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

od rozerwania się pocisku.